المستوى: ثالثة علوم تجريبية	دورة ماي 2024 التوقيت: 3 سا و 30 د
بكالوريا تجريبية في مادة الرياضيات	

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على [0 ; 1] بـــ: $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ و (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ (الوحدة : 10 سم)

1- أ) أدرس اتجاه تغير f .

ب) استنتج أنه إذا كان $x \in [0 ; 1]$ فإن $f(x) \in [0 ; 1]$

ج) أرسم (C_f)

2- نعتبر المتتالية العددية (Un)المعرفة بـ: $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(Un)$

أ) باستعمال (C_f) ، عيّن على محور الفواصل الحدود : $U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3$ ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب (Un).

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq Un \leq 1$

ت) أدرس اتجاه تغير (Un).

ث) هل المتتالية (Un) متقاربة؟ برّر اجابتك.

3-نعتبر المتتالية العددية (Vn) المعرفة على □ كما يلي : $Vn = \frac{Un-1}{Un+2}$ ،

أ) برهن أن المتتالية (Vn) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل.

ب) أكتب عبارة Vn بدلالة n، ثم عبارة Un بدلالة n.

ت) استنتج نهاية المتتالية (Un).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يلعب طفل بـ 20 كرية ، منها 13 كرية حمراء و 7 كريات خضراء ، يضع 10 كريات حمراء و 3 كريات خضراء في العلبة A ، ويضع الباقي في العلبة B.

1- في أول اللعبة، يختار 3 كريات عشوائيا وفي آن واحد من العلبة A وينظر كم كرية حمراء ظهرت.

ليكن X المتغير العشوائي المتعلق بعدد الكريات الحمراء المسحوبة.

- عرّف قانون احتمال X ثم أحسب الأمل الرياضياتي E(X)

2- وفي ثاني اللعبة، يختار الطفل إحدى العلب ويسحب منها كرية واحدة.

أ- مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات.

ب- أحسب احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء

ت- علما أن الطفل سحب كرية حمراء، ما هو احتمال أن تكون من العلبة A ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1- نعتبر كثير الحدود $P(z) = z^3 - 5z + 8z - 6$ حيث z عدد مركب.

أ- تحقق أن 3 حل للمعادلة $P(z) = 0$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

2- في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{U}; \vec{V})$ حيث $\|\vec{U}\| = 2$ cm ، نعتبر النقط A ، B ، C ، I التي لواحقها على الترتيب : $Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = 2Z_B$ ، $Z_I = 3$.

أ- أحسب $|Z_A - Z_I|$ ، $|Z_B - Z_I|$ ، $|Z_C - Z_I|$ ، ثم استنتج ان النقط A، B ، Cتنتمي الى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ب- أكتب العدد المركب $\frac{Z_C - Z_I}{Z_A - Z_I}$ على الشكل المثلثي، ثم استنتج طبيعة المثلث IAC.

ت- أكتب Z_A على الشكل الأسي، ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $L = \left(\frac{Z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ تخيليا صرفا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g الدالة العددية المعرفة على $]0 ، + \infty[$ كما يلي $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

1- أدرس تغيرات الدالة g

2- أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على $]0 ، + \infty[$

II. نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0 ، + \infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o ; \vec{i}; \vec{j})$.

1- أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

2- أ- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب - بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب لـ (C_f)

ج- أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3- أ-بيّن أنه من أجل كل x من $]0 ، + \infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أرسم (C_f) و (Δ)

III. λ عدد حقيقي موجب تماما ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذان معادلتيهما $x=1$ ، $x=\lambda$.

1- نفرض أن $\lambda > 1$:

أ-باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $A(\lambda) = 1 - \frac{\ln\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$

ب- عين النهاية 1 للمساحة $A(\lambda)$ لما يؤول λ الى $+\infty$

2- بين أن $A(\frac{1}{e}) = 1$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - 1 - i\sqrt{3})(z^2+2z+2)=0$

2- في المستوى المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{U}; \vec{V})$ نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب $Z_A = -1 + i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = 1 + \sqrt{3}i$

أ- أكتب العددان المركبان Z_A و Z_C على الشكل الأسي ، واستنتج الشكل الأسي لـــ Z_B.

ب- أكتب العدد المركب $\frac{Z_C}{Z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي.

ج-استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ، و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

3- عيّن z_D، لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDC متوازي أضلاع.

4- عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_C}{Z_A}\right)^n$ حقيقيا.

5- عيّن (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث:

$$(E_1) : |Z + 1 - i| = |\bar{Z} + 1 - i|$$

$$(E_2): \arg(Z) = \arg(\bar{Z}) + \pi + 2k\pi \ / k\epsilon\mathbb{Z}$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

U_1 صندوق يحتوي على 3 كريات حمراء وكريتين خضراوتين و U_2 صندوق آخر يحتوي على كريتين حمروين و 3 كريات خضراء (الكريات لا نميز بينها عند اللمس).

نسحب كرية عشوائيا من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين في آن واحد.

R_1 : سحب كرية حمراء من U_1

A: سحب كريتين حمراوين من U_2

1- احسب $P(R_1)$ و $P(R_1 \cap A)$

2- احسب $P(A)$

3- n عدد طبيعي غير معدوم

نضيف n كرية حمراء الى الصندوق U_1 ، ونعيد التجربة العشوائية السابقة.

يربح لاعب 5 دينار عند كل سحب لكرية خضراء من U_2 ويخسر 10 دينار عند كل سحب لكرية حمراء من U_2 .

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، مجموع أرباح اللاعب أو خسائره.

أ- عرف المتغير العشوائي X

ب- عرّف قانون احتمال X

التمرين الثالث :

(Un) متتالية عددية معرفة بـ: $U_0 = 1$ و $U_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم؛

$U_{n+1} = 2\alpha Un + 3\alpha^2 U_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من $]-1\ ,\ 0[\ \cup\ ]0\ ,\ 1[$ نضع ، من اجل كل عدد طبيعي n

$$V_n = U_{n+1} - 3\alpha\, U_n$$

1- أثبت ان (V_n) متتالية هندسية يطلب أساسها وحدها الأول بدلالة α

2- هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟ علّل.

3- أحسب بدلالة α و ω المجموع : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

4- عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

استنتج عندئذ Un بدلالة n ، ثم بين أن (Un) متقاربة.

5- في كل ما يلي ، نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\boldsymbol{\pi_n = V_0 \times V_1 \times \ldots\ldots \times V_n}$$

أ- بيّن أنّ : $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب- عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على ℝ كما يلي: $g(x)= 2+(x-1).e^{-x}$

1- أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

2- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن المعادلة $g(x)= 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}38 < \alpha < -0{,}37$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على ℝ بـ : $f(x)= 2x + 1 - x.e^{-x}$

(Cf) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\ \vec{i};\ \vec{j})$

1- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أثبت أن (Cf) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) في جوار $+\infty$.

ج- أدرس الوضع النسبي لـ (Cf) و (Δ)

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير f ، وشكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة للمماس (T) لـ (Cf) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4- أرسم (Δ) , (T) و (Cf) نأخذ ($f(\alpha) = 0.8$)

5- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول x:

$$x= (1 – m). e^x$$

6- أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \to x.e^{-x}$ على □ ، والتي تنعدم عند 1 .

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Cf) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x=1$; $x=3$;$y=2x+1$

-بالتوفيق -

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول: (5ن)

$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$; $D_f = [0\ ;\ 1]$

1) أ) من أجل كل x من $[0\ ;\ 1]$:

$$f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$$

$f'(x) > 0$

إذن: f متزايدة تماما على $[0\ ;\ 1]$

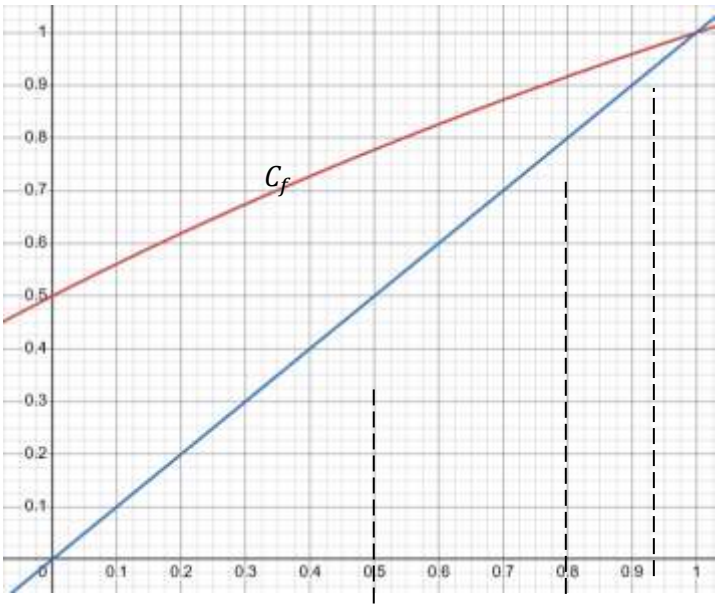
ب) بما أن f متزايدة تماما على $[0\ ;\ 1]$ فإنه:

إذا كان $0 \leq x \leq 1$

فإن: $f(x) \leq f(x) \leq f(1)$

ومنه: $0 \leq \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

جـ) $0 \leq f(x) \leq 1$



2) أ) تعيين U_3, U_2, U_1, U_0 على محور الفواصل

التخمين: (U_n) متزايدة تماما و متقاربة

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq U_n \leq 1$

جـ) اتجاه تغير (U_n): من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(1-U_n)(U_n+2)}{U_n+4}$$

(U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

د) (U_n) متقاربة لأنها متزايدة و محدودة على الأعلى.

3) $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$

أ) من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \frac{2}{5}V_n$

(V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

وحدها الأول $V_0 = \frac{-1}{2}$

ب) $V_n = V_0 \times q^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$U_n = \frac{-2V_n-1}{V_n-1} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}$$

جـ) نهاية (U_n):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

إذن: $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

التمرين الثاني: (4ن)

1) $x(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

$$P(x=0) = \frac{C_3^3}{C_{13}^3} = \frac{1}{286}$$

$$P(x=1) = \frac{C_{10}^1 \times C_3^2}{C_{13}^3} = \frac{30}{286}$$

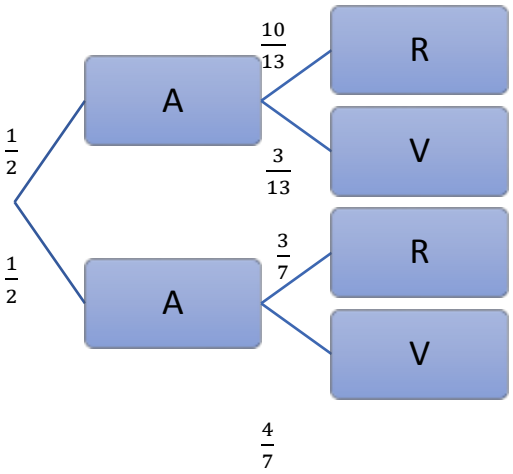
$$P(x=2) = \frac{C_{10}^2 \times C_3^1}{C_{13}^3} = \frac{135}{286}$$

$$P(x=3)=\frac{C_{10}^{3}}{C_{13}^{3}}=\frac{120}{286}$$

x_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286}$

$$E(x)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=\frac{660}{286}\approx 2{,}3$$

2) أ) شجرة الإحتمالات:



ب) $P(R)=P(A)\times P_A(R)+P(B)\times P_B(R)$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{10}{13}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\right)=\frac{109}{182}$$

جـ) $P_R(A)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}}=\frac{70}{109}$

التمرين الثالث: (4ن)

$$P(z)=z^3-5z^2+8z-6$$

1) أ) $P(3)=0$

ب) $P(z)=(z-3)(z^2-2z+2)$

$$P(z) = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} z = 3 \\ \text{أو } z^2 - 2z + 2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \{3, 1 - i, 1 + i\}$$

2) أ) $|z_A - z_I| = |1 + i - 3| = |-2 + i| = \sqrt{5}$

$$|z_B - z_I| = |1 - i - 3| = |-2 - i| = \sqrt{5}$$

$$|z_C - z_I| = |2 - 2i - 3| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$$

إذن: C, B, A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $\sqrt{5}$

ب) $\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

طبيعة المثلث IAC:

$$\begin{cases} I_A = I_C \\ \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IC} \end{cases}$$

إذن المثلث IAC قائم في I و متساوي الساقين

جـ) $z_A = \sqrt{2}.e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$L = \left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n = e^{\frac{i\pi n}{4}}$$

$$\left(\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \ldots k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow (L \text{ تخيلي صرف})$$

$$\Leftrightarrow (n = 4k + 2 \quad \ldots k \in \mathbb{Z})$$

التمرين الرابع: (7ن)

I) $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \ ; \ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$: $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$

g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $+\infty$ $-\infty$	↗

2) $g(1) = 0$

x	0		1	$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	$+$	

II) $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ إذن: حامل محور التراتيب مقارب لـ (C_f)

2) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$

إذن: المستقيم (Δ) $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

جـ) من أل كل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x^2}$

x	0		1	$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	$+$	
$f(x) - x$	‖	$+$	$-$	
الوضعية	‖	(C_f) يقع أعلى (Δ)	يتقاطعان (C_f) و (Δ) في A(1,1)	(C_f) يقع أسفل (Δ)

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	$+$	

3) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب) اتجاه تغير f:

f متناقصة تمام على $[0, 1]$ و متناقصة تماما على $]1, +\infty[$.

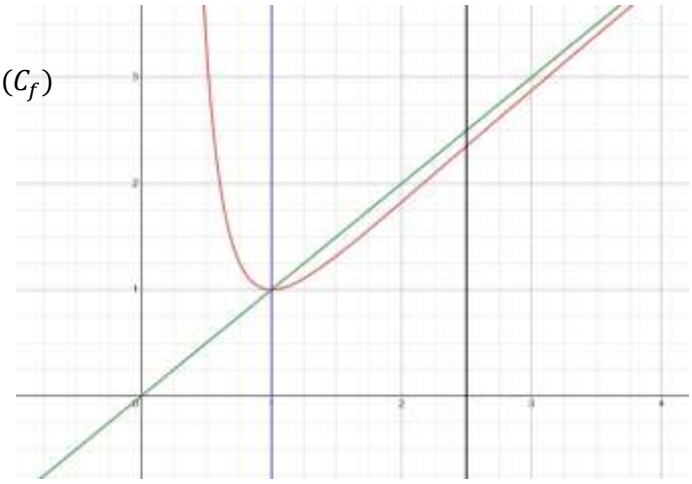
جدول تغيرات f:

x	0		1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	$+$	
$g(x)$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

4) رسم (C_f) و (Δ)

$x = 1$ $\quad$ $x = \lambda$

(Δ)



III) $\lambda > 1$:

أ) $A(\lambda) = \left(\int_1^{\lambda}\left(x - f(x)\right)dx\right) ua$

$$A(\lambda) = \left(\int_1^{\lambda}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx\right) ua$$

$$A(\lambda) = \left(1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) ua$$

ب) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 1$ إذن $l = 1$

2) $A\left(\frac{1}{e}\right) = 1 = l$

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4ن)

1) $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$

إما $z=1+\sqrt{3}i$ أو $z^2+2z+2=0$

نحل المعادلة $z^2+2z+2=0$

$\Delta=(2i)^2$ ، $z_1=-1+i$ ، $z_2=-1-i$

إذن: $S=\{1+\sqrt{3}i\ ;\ -1+i\ ;\ -1-i\}$

2) $z_A=-1+i\ ; z_B=-1-i\ ; z_C=1+\sqrt{3}$

أ) $z_A=\sqrt{2}.e^{\left(\frac{i3\pi}{4}\right)}\ ; z_B=\sqrt{2}.e^{\left(-\frac{i3\pi}{4}\right)}$

$z_B=2.e^{\left(\frac{i\pi}{3}\right)}$

ب) $\frac{z_C}{z_A}=\frac{(-1+\sqrt{3})}{2}-\frac{i(1+\sqrt{3})}{2}$

$\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{2}e^{-\frac{i5\pi}{12}}$

جـ) $\frac{z_C}{z_A}=\frac{(-1+\sqrt{3})}{2}-\frac{i(1+\sqrt{3})}{2}$

$\frac{z_C}{z_A}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

3) $(\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow (ABDC$ متوازي أضلاع$)$

ومنه: $z_D=1+i(\sqrt{3}-2)$

4) تعين n بحيث $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$:

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n=\left(\sqrt{2}e^{-\frac{i5\pi}{4}}\right)^n=(\sqrt{2})^n.e^{-\frac{i5\pi n}{4}}$

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)\right)$

$\left[\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}\right]\Leftrightarrow\left(\frac{5n\pi}{12}=k\pi\ \ldots k\in\mathbb{Z}\right)$

$\left[\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}\right]\Leftrightarrow(n=12k'\ \ldots k'\in\mathbb{N})$

5) $|z-(-1+i)|=|\bar{z}-(-1+i)|$ *

$$|z - z_A| = |\bar{z} - z_A|$$
$$|z - z_A| = |\overline{\bar{z} - z_A}|$$
$$|z - z_A| = |z - \bar{z_A}|$$
$$|z - z_A| = |z - z_B|$$
$$AM = BM$$
ومنه (E_1) هي محور $[AB]$
$$\arg(z) = \arg(\bar{z}) + \pi + 2k\pi \dots k \in \mathbb{Z}$$ *
$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \dots k \in \mathbb{Z}$$
$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \dots k \in \mathbb{Z}$$
ومنه (E_2) هي حامل محور التراتيب ماعدا المبدأ O.

التمرين الثاني: (4ن)

1) $P(R_1) = \frac{C_3^1}{C_5^1} = \frac{3}{5}$

$$P(R_1 \cap A) = \frac{C_3^1}{C_5^1} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{25}$$

2) $P(A) = \frac{C_3^1}{C_5^1} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{C_2^1}{C_5^1} \times \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{11}{75}$

3) أ) $x(\Omega) = \{-20, -5, 10\}$

x_i	-20	-5	10
P_i	$\frac{3n+11}{15(n+5)}$	$\frac{9n+43}{15(n+5)}$	$\frac{3n+21}{15(n+5)}$

التمرين الثالث: (5ن)

1) من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = -\alpha V_n$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها α – و حدها الأول $_0 = 2 - 3\alpha$

2) $\begin{cases} -1 < \alpha < 1 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -\alpha < 1 \\ -\alpha \neq 0 \end{cases}$

إذن (V_n) متقاربة

3) $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

$$S_n = \frac{2-3\alpha}{1-\alpha}[1 - (-\alpha)^{n+1}]$$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2-3\alpha}{1+\alpha} = \frac{3}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{1}{3}\right)$$

ومنه: $V_n = U_{n+1} - U_n$

$S_n = (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \cdots + (U_{n+1} - U_n)$

$S_n = U_{n+1} - U_0 \Leftrightarrow (U_{n+1} = S_n + U_0)$

$\Leftrightarrow (U_n = S_{n-1} + U_0)$

$\Leftrightarrow \left(U_n = -\frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{4}$ إذن (U_n) متقاربة

5) أ) نبين أن: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب) $(\pi_n \leq 3^{-44}) \Leftrightarrow (n \geq 10)$

إذن أصغر قيمة لـ n هي: $n = 10$

التمرين الرابع: (7ن)

I) $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$

2) من أجل x في $\mathbb{R}$:

$g'(x) = (-x+2)e^{-x}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

إذن g متزايدة تماما على $]-\infty; 2]$

g متناقصة تماما على $[2; +\infty[$

x	$+\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2+e^{-2}$	↘	2

3) g مستمرة و متزايدة تماما على $[-0{,}38; -0{,}37]$.

$\begin{cases} g(-0{,}38) \approx -0{,}01 \\ g(-0{,}37) \approx 0{,}01 \end{cases} \Rightarrow (g(-0{,}38) \times g(-0{,}37) < 0)$

إذن و حسب برهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$-0{,}38 < \alpha < -0{,}37$

II) $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=0$

إذن المستقيم $(\Delta): y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ج)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	$-$	
الوضعية	(C_f) يقع أعلى (Δ)	يتقاطعان (C_f) و (Δ) في A(0,1)	(C_f) يقع أسفل (Δ)

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

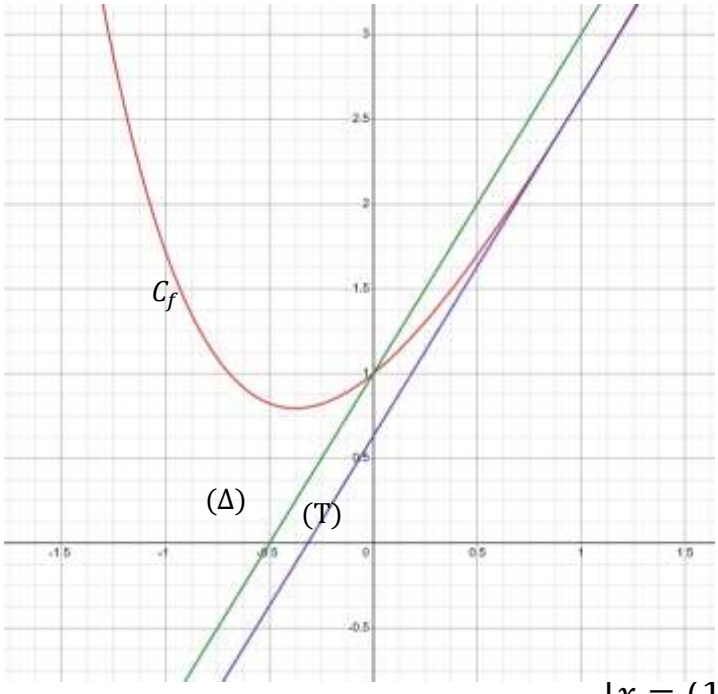
إذن f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ و f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3) $(T): y=f'(x).(x-1)+f(x)$

$y=2x+1-e^{-1}$

4) رسم (Δ) ، (T)، (C_f):



5) $(f(x)=2x+m) \Leftrightarrow [x=(1-m)e^x]$

مناقشة:

* إذا كان $m<1-e^{-1}$: المعادلة لا تقبل حلول
* إذا كان $m=1-e^{-1}$: المعادلة تقبل حلا موجبا
* إذا كان $1-e^{-1}<m<1$: المعادلة تقبل حلين موجبين
* إذا كان $m=1$: المعادلة تقبل حل معدوم

* إذا كان $m > 1$: المعادلة تقبل حل سالب

6) أ) $F(x) = \int_1^x te^{-t}dt$

$F(x) = (-x-1)e^{-x} + 2e^{-1}$

ب) $A = \int_1^3 \big((2x+1) - f(x)\big)dx.ua$

$A = (2e^{-1} - 4e^{-3}).ua$