رقم الهاتف: 0550 47 22 35 / 023 71 54 63 فاكس: 023 71 54 67 Email: saitameur3@gmail.com

المستوى الثالثة ثانوي تقني رياضي
امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات دورة ماي 2024 **المدة: 04 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 ن)

يحتوي كيس على 8 كرات لا نميز بينها عند اللمس منها: 4 كرات سوداء تحمل الأرقام: 0،1،2،1.

و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام: 1،2،1،2.

1) نسحب ثلاث كرات في آن واحد من هذا الكيس:

-احسب احتمال الحوادث التالية:

A: " الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم"

B: " الكرات المسحوبة من نفس اللون"

C: " الكرات المسحوبة أرقامها مختلفة مثنى مثنى"

2) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل رقم 1

- اكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي

- ما هي قيم المتغير العشوائي X حيث $P(X^2 - 3X + 2 = 0)$

التمرين الثاني: (4 ن)

اختر الجواب الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات، مع التعليل:

1) الشكل الأسي للعدد المركب $1 - \sqrt{3}i$ هو :

أ) $2e^{\frac{\pi}{6}i}$ ب) $2e^{\frac{-\pi}{3}i}$ ج) $2e^{\frac{-\pi}{6}i}$

2) لتكن النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A = -4$ ، $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ و $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$

الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ هو:

أ) i ب) $1 + i$ ج) $-i$

3) الجذران التربيعيان للعدد $1+3i$ هما:

أ) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ب) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

ج) $\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

4) عمدة العدد المركب $(1+i)\left(-1-\sqrt{3}i\right)$ هي

أ) $-\frac{13\pi}{12}+2\pi k$ ب) $\frac{19\pi}{12}+2\pi k$ ج) $-\frac{19\pi}{12}+2\pi k$

التمرين الثالث: (5 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<2$

ب) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+u_n-1}$

ج) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) استنتج ثانية أن المتتالية (u_n) متقاربة

3) احسب بدلالة n المقدار: $P_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)$

التمرين الرابع: (7 ن)

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(1-x)e^x$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.27<\alpha<1.28$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x+x+1}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ') هو المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

3) أ) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب) بين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) أ) أثبت أن $f(-\alpha) = 0$

ب) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha; 0)$ موازيا للمستقيم (Δ)

ج) أكتب معادلة (T)

5) أرسم (Δ)، (Δ')، (T) و (C_f)

6) ناقش بيانيا حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 ن)

يحتوي كيس على كرات لا نميز بينها عند اللمس منها: أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين

1) نسحب ثلاث كرات في آن واحد من هذا الكيس:

-احسب احتمال الحوادث التالية:

A: " سحب كريتين سوداوين و كرة حمراء"

B: " سحب ثلاث كرات من نفس اللون"

C: " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل"

2) أ) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها

- ما هي قيم المتغير العشوائي X

- بين أن: $P(X=3)=\frac{24}{84}$ ثم استنتج $P(X=2)$ و عين قانون احتمال X

ب) نقترح اللعبة التالية: يدفع اللاعب مبلغ 50DA قبل إجراء السحب ويكسب 25DA لكل لون من الألوان المحصل عليها

هل اللعبة مربحة له؟

التمرين الثاني: (4 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة: $693x-216y=738$ ... ... (E_1) و المعادلة $77x-24y=82$ ... ... (E_2)

1) جد $PGCD(693;216)$ ثم بين أن المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتين

2) تحقق أن الثنائية $(2;3)$ حلا للمعادلة (E_2) ثم استنتج حلول المعادلة (E_2)

3) عين كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ حلول المعادلة (E_2) والتي تحقق $|y-x|\leq 54$

4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{b68a}$ في النظام ذي الأساس 9 و يكتب $\overline{1ab0a}$ في النظام ذي الأساس 6 حيث a و b عددان طبيعيان.

عين a و b ثم أكتب N في النظام العشري

التمرين الثالث: (5 ن)

1) لتكن الدالة f معرفة و مستمرة على $[1;3]$ بـ: $f(x)=\frac{x+3}{5-x}$

أ) بين أن الدالة f متزايدة تماما على $[1;3]$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1;3]$ فان : $f(x) \in [1;3]$

2) (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) بين أن: $u_n = \frac{2^n+3}{2^n+1}$ ثم احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{3-u_0} + \frac{1}{3-u_1} + \cdots + \frac{1}{3-u_n}$

<u>التمرين الرابع: (7 ن)</u>

I. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - lnx$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II. f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{lnx}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا

ب) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

ب) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ)

5) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلته

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]\frac{1}{2}; 1[$

ج) أرسم (Δ)،(T) و (C_f)

7) أ) أوجد عبارة الدالة F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

ب) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها:
$y = x + \frac{1}{2}$، $x = 2$ و $x = 1$

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي: الموضوع 1

التمرين الأول: (4 ن)

1) نسحب 3 كرات في آن واحد : نستعمل التوفيقات

عدد الحالات الممكنة(توفيقة3لـ عناصر من8): $C_8^3 = \boxed{56}$

أ)حساب احتمال الحوادث:

- الحادثة A الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم:

معناه 3 كرات تحمل الرقم 1 أو 3 تحمل الرقم 2

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_8^3} = \boxed{\frac{5}{56}}$$

- الحادثة B الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون:

أي $(3N)$ أو $(3R)$:

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_4^3}{C_8^3} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

-الحادثة Cالحصول على ثلاث كريات أرقامها مختلفة مثنى مثنى:

أي كل الأرقام مختلفة:

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{12}{56} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات التي تحمل الرقم ❶.

2)أ)تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X:

قيم X**الممكنة هي** : 0 ، 1 ، 2 و 3 .

- لما $(X=0)$: (سحب 3 كرات لا تحمل الرقم ❶)

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = = \boxed{\frac{4}{56}}$$

-لما $(X=1)$:سحب(1تحمل الرقم ❶و2 لا تحمل الرقم ❶)

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_4^2}{C_8^3} = \boxed{\frac{24}{56}}$$

- لما $(X=2)$:سحب(2تحمل الرقم ❶و1 لا تحمل الرقم ❶)

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{C_8^3} = \boxed{\frac{24}{56}}$$

- لما $(X=3)$: (سحب 3 كرات تحمل الرقم ❶)

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = = \boxed{\frac{4}{56}}$$

ومنه :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب)حساب الأمل الرياضياتي ، التباين ، الإنحراف :

- الأمل الرياضياتي: $E(X) = \sum_1^4 X_i P_i = \frac{84}{56} = \boxed{\frac{3}{2}}$

-الإنحراف المعياري: $V(X) = \sum_1^4 (X_i - E(X))^2 P_i = \boxed{\frac{15}{28}} = 0{,}53$

- التباين : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boxed{\sqrt{\frac{44}{75}}}$

التمرين الثاني: (4 ن)

اختر الجواب الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات، مع التعليل:

1) الشكل الأسي للعدد المركب $1 - \sqrt{3}i$ هو : ب) $2e^{\frac{-\pi}{3}i}$

2) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = i$ هو: أ) i

3) الجذران التربيعيان للعدد $1 + 3i$ هما: أ) $\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $-\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

4) عمدة العدد المركب $(1+i)(-1-\sqrt{3}i)$ هي : ب) $\frac{19\pi}{12} + 2\pi k$

التمرين الثالث: (5 ن)

جـ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \prec u_n \prec 2$

من أجل $n=0$ $u_0=\frac{3}{2}$ ومنه $1 \prec u_0 \prec 2$ ومنه محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n \in N$ أي: $1 \prec u_n \prec 2$

نبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $1 \prec u_{n+1} \prec 2$

لدينا: $1 \prec u_n \prec 2$ ومنه $0 \prec u_n - 1 \prec 1$ ومنه $0 \prec \sqrt{u_n - 1} \prec 1$

ومنه $1 \prec 1+\sqrt{u_n - 1} \prec 2$ ومنه $1 \prec u_{n+1} \prec 2$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل $n \in N$ فإن $1 \prec u_n \prec 2$

2- اثبات أن (u_n) متزايدة تماما على N

$$u_{n+1}-u_n = 1+\sqrt{u_n-1}-u_n = \sqrt{u_n-1}-(u_n-1)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)\right)\left(\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)\right)}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

$$= \frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

نضع $x=u_n$ ولدينا $a+b+c=0$ ومنه

x	$-\infty$		1	2	$+\infty$
$-x^2+5x-4$		$-$	$+$	$-$	

وبما أنه $n \in N$: $1 \prec u_n \prec 2$ فإن (u_n) متزايدة تماما على N

وبما أن (u_n) متزايدة تماما على N ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنها متقاربة.

3- (v_n) متتالية معرفة على N بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ- اثبات أن (v_n) هندسية مع تعيين الأساس والحد الأول

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1) = \ln\left(1+\sqrt{u_n-1}-1\right) = \ln(u_n-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u_n-1) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0 = -\ln 2$

ب- عبارة الحد العام $v_n = -\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- حساب $\lim_{n\to\infty} u_n$ لدينا $v_n = \ln(u_n-1)$ يكافئ $e^{v_n} = u_n - 1$

ومنه $u_n = e^{v_n} + 1$

$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ لأن $-1 \prec q \prec 1$ ومنه $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} e^{v_n} + 1 = 2$

4- حساب $\Pi_n = (u_0-1)(u_1-1).....(u_n-1)$

لدينا $e^{v_n} = u_n - 1$ ومنه $\Pi_n = (u_0-1)(u_1-1).....(u_n-1)$ يكافئ

ومنه $\Pi_n = e^{v_0}e^{v_1}....e^{v_n}$ ومنه $\Pi_n = e^{v_0+v_1+....+v_n}$

$$\Pi_n = e^{\left[-\ln 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]} = e^{\left[-2\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right]}$$

التمرين الرابع: (7 ن)

I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(1-x)e^x$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+(1-x)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x-xe^x=1$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+(1-x)e^x=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)=-\infty$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $g'(x)=-e^x+e^x(1-x)=-e^x+e^x-xe^x=-xe^x$

من أجل كل عدد حقيقي x , $e^x>0$ و منه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $-x$ و عليه : $g'(0)=0$

من أجل $x\in]-\infty;0[$, $-x>0$ و منه $g'(x)>0$ و من أجل $x\in]0;+\infty[$, $-x<0$ و منه $g'(x)<0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $[0;+\infty[$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$

3) التحقق أن : $1.27<\alpha<1.28$

لدينا : $g(1.27)\approx 0.03$ و $g(1.28)\approx -0.007$ إذن : $g(1.28)\times g(1.27)<0$ و منه $1.27<\alpha<1.28$.

إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$, $g(x)>0$ و من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$, $g(x)<0$ و $g(\alpha)=0$

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}$

1) تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x}=0$

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

2) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+x+1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-xe^x}{e^x+1}=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

3) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$f(x)-y=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)=\dfrac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}=\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$

لدينا : $e^x>0$ و $e^x+1>0$ و منه إشارة الفرق $f(x)-y$ هي نفس إشارة $-x$:

إذا كان $x>0$ فإن $-x<0$ و منه : $f(x)-y<0$

إذا كان $x<0$ فإن $-x>0$ و منه $f(x)-y>0$

و عليه من أجل $x\in]-\infty;0[$, (C_f) يوجد فوق (Δ) و من أجل $x\in]0;+\infty[$, (C_f) يوجد تحت (Δ) و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$		(C_f) تحت (Δ)

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}-1=\dfrac{e^x+x+1-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{x}{e^x+1}$

و و منه إشارة الفرق $f(x)-y$ هي نفس إشارة x على $\mathbb{R}$

و عليه من أجل $x\in]-\infty;0[$, (C_f) يوجد فوق (Δ') و من أجل $x\in]0;+\infty[$, (C_f) يوجد تحت (Δ') و (C_f) يقطع (Δ') في النقطة $A(0;1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ')		(C_f) يقطع (Δ') في النقطة $A(0;1)$		(C_f) تحت (Δ')

4) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=\dfrac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x+e^x+1-e^{2x}-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{1+e^x-xe^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لأن $(e^x+1)^2>0$ و عليه :

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$, $g(x)>0$ أي : $f'(x)>0$

من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$, $g(x)<0$ أي : $f'(x)<0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha$

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}+1$ تكافئ $g(\alpha)=0$ تكافئ $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ و منه : $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}$

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}+1=\dfrac{\alpha}{\frac{-1}{1+\alpha}+1}+1=\dfrac{\alpha}{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}+1+\alpha=\alpha\left(\dfrac{1-\alpha}{-\alpha}\right)+1=-1+\alpha+1=\alpha$

طريقة ثانية :

$f(\alpha)-\alpha=\dfrac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}-\alpha=\dfrac{e^\alpha+\alpha+1-\alpha e^\alpha-\alpha}{e^\alpha+1}=\dfrac{1+(1-\alpha)e^\alpha}{e^\alpha+1}=\dfrac{g(\alpha)}{e^\alpha+1}=0$

بما أن : $f(\alpha)-\alpha=0$ فإن : $f(\alpha)=\alpha$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$

5) أ) تبيان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$:

$f(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}$ و لدينا : $e^{-\alpha}=\dfrac{-1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ يكافئ : $e^{-\alpha}=\alpha-1$

إذن : $f(-\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)-\alpha+1}{(\alpha-1)+1}=0$ و منه : (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

ب) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ) :

المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(-\alpha)=1$

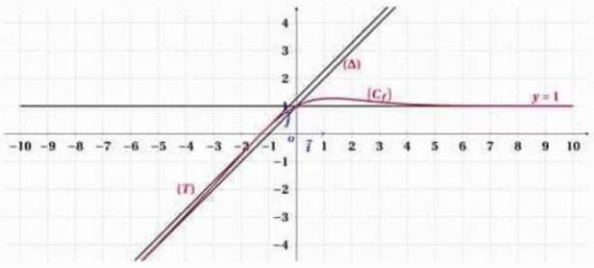
$f'(-\alpha)=\dfrac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\dfrac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\dfrac{1-(1+\alpha)(\alpha-1)}{(\alpha-1+1)^2}=\dfrac{1+\alpha^2-1}{\alpha^2}=1$.

و منه (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ) .

ج) كتابة معادلة (T) :

معادلة المماس (T) هي : $y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)$ أي : $y=x+\alpha$

6) رسم (Δ) , (Δ') , (T) و (C_f) :



التصحيح النموذجي:

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 ن)

عدد الإمكانيات : $C_9^3 = 84$.

1) حساب إحتمالات الأحداث :

$P(A) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{84} = \frac{6}{84}$ ، $P(B) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{84} = \frac{5}{84}$ ، $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{C_5^3}{84} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84}$.

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها .

أ- قيم X هي : $\{1;2;3\}$.

$P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{84} = \frac{24}{84}$.

$P(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1 + C_2^1 \times C_3^2 + C_2^1 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_4^1 + C_3^1 \times C_4^2}{84} = \frac{55}{84}$

$P(X=1) = P(B) = \frac{5}{84}$

قانون الإحتمال :

X_i	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

ب- نقترح اللعبة التالية :

يدفع اللاعب $50\,DA$ قبل إجراء السحب . يكسب $25\,DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها . هل اللعبة مربحة ؟

نسمي Y قيمة الربح المحتمل في اللعبة .

قيم Y الممكنة هي : $\{-25;0;25\}$.

قانون الإحتمال :

Y_i	-25	0	25
$P(Y=Y_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

الأمل الرياضياتي : $E(Y) = -25 \times \frac{5}{84} + 0 + \frac{55}{84} + 25 \times \frac{24}{84} = -\frac{125}{84} + \frac{600}{84} = \frac{475}{84}$.

لدينا $E(Y) > 0$ و بالتالي اللعبة مربحة .

التمرين الثاني: (4 ن)

1) $PGCD(693;216) = 9$ ، المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتين

2) الثنائية $(2;3)$ حلا للمعادلة (E)

حلول المعادلة (E) هي : x=24k+2 و y=77k+3

3) الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|y-x| \leq 54$ هي

{(26 ;80) ;(2 ;3) ;(-22 ;-24)}=(x ;y) مع {1- ;0 ;1}=k

4) $a = 3$ و b=2 و N=2019

التمرين الثالث: (5 ن)

f الدالة المعرفة على $[1,3]$ بـ: $f(x)=\frac{x+3}{5-x}$.

1) حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1,3]$

f قابلة للاشتقاق على $[1,3]$: $f'(x)=\frac{8}{(5-x)^2}>0$.

ومنه f متزايدة تماما على $[1,3]$.

ب) إثبات أنه من أجل كل $x\in[1,3]$ فإن : $f(x)\in[1,3]$.

$x\in[1,3]$ معناه $1\le x\le 3$ وبما أن f متزايدة تماما على $[1,3]$

فإن $f(1)\le f(x)\le f(3)$ ومنه $f(x)\in[1,3]$.

2) (u_n) معرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\frac{u_n+3}{5-u_n}$.

أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $1\le u_n\le 3$

$P(n)$....$1\le u_n\le 3$

من أجل $n=0$: $1\le u_0=2\le 3$ ومنه $P(0)$ محققة ....(1)

نفرض أن $1\le u_n\le 3$ ومنه $f(1)\le f(u_n)\le f(3)$

(لأن f متزايدة تماما) اي $1\le f(u_n)\le 3$

وعليه $1\le u_{n+1}\le 3$ ومنه $P(n+1)$ محققة ....(2)

من (1) و (2) ينتج $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

ب) اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة :

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+3}{5-u_n}-u_n=\frac{u_n^2-4u_n+3}{5-u_n}=\frac{(u_n-3)(u_n-1)}{5-u_n}$

$(u_n-3)(u_n-1)\le 0$ و $5-u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n\le 0$

ومنه (u_n) متناقصة.

• (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n\ge 1)$ فهي متقاربة.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}}=\frac{\frac{u_n+3}{5-u_n}-1}{3-\frac{u_n+3}{5-u_n}}=\frac{2u_n-2}{-4u_n+12}=\frac{2(u_n-1)}{4(3-u_n)}$

ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$. (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=1$

ب) $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

$v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}$ ومنه $v_nu_n+u_n=3v_n+1$ ومنه $u_n=\frac{3v_n+1}{v_n+1}$

وعليه

$$u_n=\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\frac{\frac{3}{2^n}+1}{\frac{1}{2^n}+1}=\frac{\frac{3+2^n}{2^n}}{\frac{1+2^n}{2^n}}=\frac{2^n+3}{2^n+1}$$

• $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+3}{2^n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n\left(1+\frac{3}{2^n}\right)}{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}=1$

ج) حساب S_n حيث: $S_n=\frac{1}{3-u_0}+\frac{1}{3-u_1}+...+\frac{1}{3-u_n}$.

لدينا

• $\frac{1}{3-u_n}=\frac{1}{3-\frac{2^n+3}{2^n+1}}=\frac{1}{\frac{3\times2^n+3-2^n-3}{2^n+1}}=\frac{2^n+1}{2\times2^n}$

$\frac{1}{3-u_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+...+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}}_{(n+1)\text{ مرة}}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$

ومنه $S_n=\frac{n+1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1$

التمرين الرابع: (7 ن)

I) $g(x)=x^2+1-\ln x$ و $D=]0;+\infty[$

1) نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to0}x^2+1-\ln x=+\infty$

يمكن أن نكتب: $g(x)=x^2(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x})$ إذن فإن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+1-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x})=+\infty$

2) اتجاه تغير الدالة g وجدول تغيراتها:

- المشتقة : $g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$

- جدول التغيرات :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-\quad0\quad+$	
$g(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow\ g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \nearrow$	$+\infty$

3) استنتاج إشارة الدالة g : $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln2\approx1.85$

من جدول التغيرات و بما أن $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$

فإن الدالة g موجبة تماما على D

II) $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$ و $D=]0;+\infty[$

1) أ) نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0:

$\lim\limits_{x\to+\infty}x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0}x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$

ومنه حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحنى (C).

ب) المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x+\frac{1}{2}$ ومقارب مائل للمنحنى (C_f)، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

ج) الوضع النسبي: إشارة $f(x)-(x+\frac{1}{2})$ من إشارة $\ln x$.

من أجل $x>1$ فإن : $\ln x>0$ و (C) يقع فوق (Δ).

من أجل $0<x<1$ فإن: $\ln x<0$ و (C) يقع تحت (Δ).

2) أ) التحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب) اتجاه تغير الدالة f: بما أن g موجبة تماما على D فإن f' موجبة تماما على D و منه f متزايدة تماما على D

- جدول التغيرات:

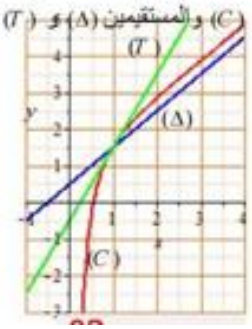
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

ج) معادلة (T) الذي يمس المنحنى (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$

$(T): \boxed{y=2x-\frac{1}{2}}$ و منه : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

3) إثبات أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\left]\frac{1}{2};1\right[$

4) رسم المنحنى (C) والمستقيمين (Δ) و (T):



7) أ) $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{(lnx)^2}{2}$

ب) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=x+\frac{1}{2}$، $x=2$ و $x=1$ هي $0.24cm^2$