

ثانوية أوبينيتر الخاصة

امتحان بكالوريا تجريبية

دورة ماي 2024

الشعبة: رياضيات

المدة: 4 سا ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام : $-2, -1, 0, 1, 2$ و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام : $-1, 0, 1$ و كرتان سوداوان تحملان الرقمين : $-1, 0$ (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس).

(1) نسحب عشوائيا ودون إرجاع كرتين من هذا الكيس و ليكن الحدثان :

A : "الكرتان المسحوبتان لونا هما مختلفان", B : "الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما"

- أحسب $p(A)$ و $p(B)$ ثم بين أن $p(A \cup B) = \frac{32}{45}$.

(2) نعيد الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كرتين في آن واحد .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x - y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكرتان المسحوبتان من الكيس.

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم أكتب قانون إحصائه .

ب/ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

(2) أ/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

(3) هل (u_n) متقاربة ؟ عين نهايتها .

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$.

ب/ أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$.

ج/ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) a و b عدنان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a = \overline{201}$ و $b = \overline{100}$.
أكتب العددين a و b في النظام العشري .

(2) x و y عدنان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $ax - by = 3$
أ/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x \equiv 0[3]$

ب/ استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $0 \leq x_0 < 5$ ثم حل المعادلة (E) .

(3) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حل للمعادلة (E) .
أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب/ بين ان $\text{pgcd}(x, y) = \text{pcgd}(y, 3)$.

ج/ عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\frac{y}{x}$ كسرا قابلا للاختزال .

(4) (u_n) و (v_n) متاليتان حسابيتان معرفتان على $\mathbb{N}$ ب : $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = u_n + 19$ و $v_0 = 5$ ، $v_{n+1} = v_n + 9$.
- عين كل الثنائيات $(p; q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق $u_p = v_q$ و $|q - p| \leq 20$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x+2}$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(4) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$

(5) أ/ بين أن $I(2; 3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

ب/ بين ان المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0 < x_0 < 0.2$.

ج/ بين المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

(6) أحسب $f(-1)$ ثم أرسم (T) ، (Δ) و (C_f)

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): xe^{-x+2} - 1 - m = 0$$

(8) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ ب : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1 + x)e^{-x+2} + 3$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير x .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي حيث: $n \geq 4$

يحتوي صندوق U على n كرية لا يمكن التمييز بينها في اللمس ، منها 3 حمراء و البقية سوداء . نسحب في آن واحد كرتين .

(1) أحسب احتمال الحدثين : A " سحب كرتين من نفس اللون " ، B " سحب كرية حمراء على الأكثر " .

(2) أحسب احتمال الحدث C " سحب كرية حمراء على الأقل "

(3) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k للصندوق k ($1 \leq k \leq 3$) الذي يحتوي على k كرية حمراء و

$n - k$ كرية سوداء ، نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين .

نسمي RR الحدث: " الحصول على كرتين حمراويتين " و NN الحدث "الحصول على كرتين سوداويتين"

و RN الحدث " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

ليكن المتغير X العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء .

(أ) انجز شجرة الاحتمالات.

(ب) عين مجموعة قيم X .

(ج) أثبت أن: $P(X = 1) = \frac{4(3n - 7)}{3n(n - 1)}$ و $P(X = 2) = \frac{8}{3n(n - 1)}$.

(د) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية:

$$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C لواقعها على الترتيب

$$z_C = 2 \text{ و } z_B = -1 - i\sqrt{3} , \quad z_A = -1 + i\sqrt{3}$$

$$(1) \text{ بين أن : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(أ) عين طبيعة المثلث ABC .

(ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC ثم أرسم $(\mathcal{C})$.

(2) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

(3) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) .

(4) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

(أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

- (ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.
 (ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E): 5x - 6y = 3$
 (1) أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.
 ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

$$(S) : \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$$

(2) a و b عدنان طبيعيان حيث :

$$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00} \text{ في النظام ذو الأساس } 3 \text{ و } b = \overline{\alpha\beta 0\alpha} \text{ في النظام ذو الأساس } 5.$$

أ/ عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

$$1. \text{ نعتبر الدالة العددية } g \text{ المعرفة على المجموعة } \mathbb{R} \text{ بـ : } g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$$

ولیکن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$(1) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

$$(3) \text{ بين أنه من أجل كل } x \text{ عدد حقيقي, } g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} - \ln(1 + e^{-x}) - x$$

$$(أ) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 1)] \text{ ثم فسر النتيجة هندسيا .}$$

أرسم (Δ) و (C_g)

$$(4) \text{ استنتج إشارة } g(x) \text{ عندما يتغير } x \text{ في المجموعة } \mathbb{R}.$$

$$II. f \text{ الدالة العددية المعرفة على المجموعة } \mathbb{R} \text{ بـ : } f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$$

$$(1) \text{ برهن أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \text{ ثم أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x, f'(x) = e^{-x} \times g(x), \text{ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة } f \text{ وشكل جدول تغيراتها}$$

$$(3) \text{ تحقق أنه من أجل كل } x \text{ عدد حقيقي: } \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \text{ ثم أحسب : } \int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$(4) \text{ أحسب } \int_{-\ln 3}^0 f(x) dx$$

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

التمرين الأول:

(1) حساب الاحتمالات :

$$P(A) = \frac{62}{90}$$

$$P(B) = \frac{6}{90}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{90}$$

$$P(A \cup B) = \frac{64}{90} = \frac{32}{45}$$

(2)

أ) المتغير العشوائي

$$P(X = 0) = \frac{7}{45}$$

$$P(X = 1) = \frac{20}{45}$$

$$P(X = 2) = \frac{12}{45}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{45}$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{45}$$

ب) حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = 1.4$$

التمرين الثاني:

• لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

- لدينا : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} = \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$ ومنه : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

(2) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ و $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ أي $0 < u_0 < \frac{1}{2}$

اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن :

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}.$$

- لدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $0 < 2u_n < 1$ أي $1 < 2u_n + 1 < 2$

وبالتالي $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n + 1} < 1$ إذن $-1 < -\frac{1}{2u_n + 1} < -\frac{1}{2}$

وأخيرا : $0 < 1 - \frac{1}{2u_n + 1} < \frac{1}{2}$ أي $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$(2) \text{ التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$$

$$\bullet \text{ لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n+1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$$

$\bullet$ تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة :

ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$

$$- \text{ لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$$

$$\text{ولدينا : } 0 < u_n < \frac{1}{2} \text{ ومنه } -1 < -2u_n < 0 \text{ أي } 0 < 1 - 2u_n < 1$$

$$\text{وبالتالي : } 0 < u_n(1-2u_n) < \frac{1}{2}$$

$$- \text{ ولدينا : } \frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n+1} < 1 \text{ ومنه } 0 < \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1} < \frac{1}{2}$$

- أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

(ج) دراسة تقارب المتتالية : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد } \frac{1}{2} \text{ فهي متقاربة وتتقارب من العدد } \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ تعيين نهاية المتتالية } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

$$(3) \text{ لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$$

(1) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية :

$$\bullet \text{ لدينا : } v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1} = \frac{3 \times 3^n \times \frac{2u_n}{2u_n+1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n+1} - 1} = \frac{\frac{6 \times 3^n \times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n - 2u_n - 1}{2u_n+1}}$$

أي

$$v_{n+1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{\cancel{2u_n+1}} \times \frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n-1} = 6v_n$$

ومنه $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{3^0 \times u_0}{2u_0-1} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{1}{3}$$

(2) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$$

• لدينا :

$$u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$$

• استنتاج أن :

$$2u_n v_n - 3^n u_n = v_n \quad \text{أي} \quad 2u_n v_n - v_n = 3^n u_n \quad \text{ومنه} \quad v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$$

- لدينا :

$$u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n} \quad \text{وبالتالي} \quad (2v_n - 3^n)u_n = v_n \quad \text{ومنه} \quad u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$$

-

$$u_n = \frac{-\frac{1}{3} \times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3} \times 6^n\right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n}$$

إذن :

$$u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \frac{2^n}{3+2^{n+1}} \quad \text{أي} \quad u_n = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3 \times 3^n}$$

ومنه

$$\bullet \text{ حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1}+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين الثالث:

(1) a, b في النظام العشري $b=9$ و $a=19$

(2)

(أ) تبين أن $x \equiv 0[3]$

$$19x - 9y = 3 \dots (E), 19x = 9y + 3, 19x = 3(3y + 1), 19x \equiv 0[3]$$

و 19 أولي مع 3 (حسب مبرهنة غوص) إذن $x \equiv 0[3]$ (ب) الحل الخاص $(x_0, y_0) = (3, 6)$

حل المعادلة (E)

$$S = \{(9k + 3, 19k + 6)/k \in \mathbb{Z}\}$$

(3)

(أ) القيم الممكنة لـ d هي : $d \in \{1; 3\}$ (ب) $\text{pgcd}(x; y) = \text{pgcd}(y; 3)$ (ج) $\frac{y}{x}$ قابلاً للاختزال من أجل $(x; y) = \{(27k' + 3; 57k' + 6)/k' \in \mathbb{Z}\}$ (4) $(p; q) = \{(3; 6); (12, 25)\}$

التمرين الرابع:

(1) لدينا : ~~$g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$~~ (أ) دراسة تغيرات الدالة : g

● حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + (1-x)e^{-x+2}) = +\infty \quad \text{لدينا : -}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (1-x)e^{-x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^2 \times e^{-x} - e^2 \times x e^{-x}) = 1 \quad \text{لدينا : -}$$

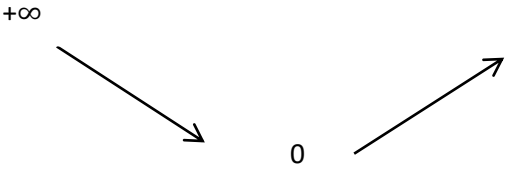
● حساب المشتقة :

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+1} = (x-2)e^{-x+2}$$

● دراسة إشارة المشتقة :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

● جدول التغيرات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ 		

- (1) استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$
- من أجل $x \in \mathbb{R}$ فان $g(x) \in [0; +\infty[$ ومنه $g(x) \geq 0$

(2) لدينا : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$
 -1 حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1 + xe^{-x+2}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1 + xe^{-x+2}) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{e^2} = 0 \end{cases}$$

-2 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = g(x)$

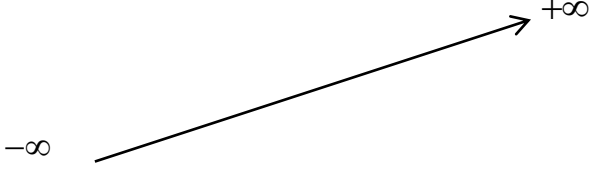
• لدينا : $f'(x) = 1 + e^{-x+2} - xe^{-x+2} = 1 + (1-x)e^{-x+2} = g(x)$

ومنه $f'(x) = g(x)$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة : $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

• جدول تغيرات الدالة : f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

3- حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1 + xe^{-x+2} - x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = 0$$

• التفسير الهندسي :
•

المستقيم ذي المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

4- دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى $y = x-1$ (Δ)

• ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$

- لدينا : $f(x) - y = xe^{-x+2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي	فوق (C_f) (Δ)	يقطع (C_f) (Δ)	تحت (C_f) (Δ)

5- أ) تبيان أن النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني : (C_f)

• لدينا : $f''(x) = g'(x) = (x-2)e^{-x+2}$

• جدول إشارة : $f''(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

- المشتقة الثانية f'' تنعدم من أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

(2) تبين أن المنحني (C_f) في نقطة فاصلتها : $0 < x_0 < 0.2$

• الدالة f مستمرة ورتبية تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

$$f(0.2) = 0.2 - 1 + 0.2 \times e^{-0.2+2} = -0.8 + 1.21 = 0.41 \text{ و } f(0) = -1$$

ومنه $f(0) \times f(0.2) < 0$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $0 < x_0 < 0.2$

- أي (C_f) يقطع (x, x') في النقطة $(x_0, 0)$ حيث $0 < x_0 < 0.2$

(3) تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :
 (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه المماس (T) يساوي 1

$$f'(x) = 1 \text{ ومنه } g(x) = 1 \text{ وبالتالي : } 1 + (1-x)e^{-x+2} = 1$$

$$\text{إذن : } (1-x)e^{-x+2} = 0 \text{ ومنه } 1-x=0 \text{ أي } x=1$$

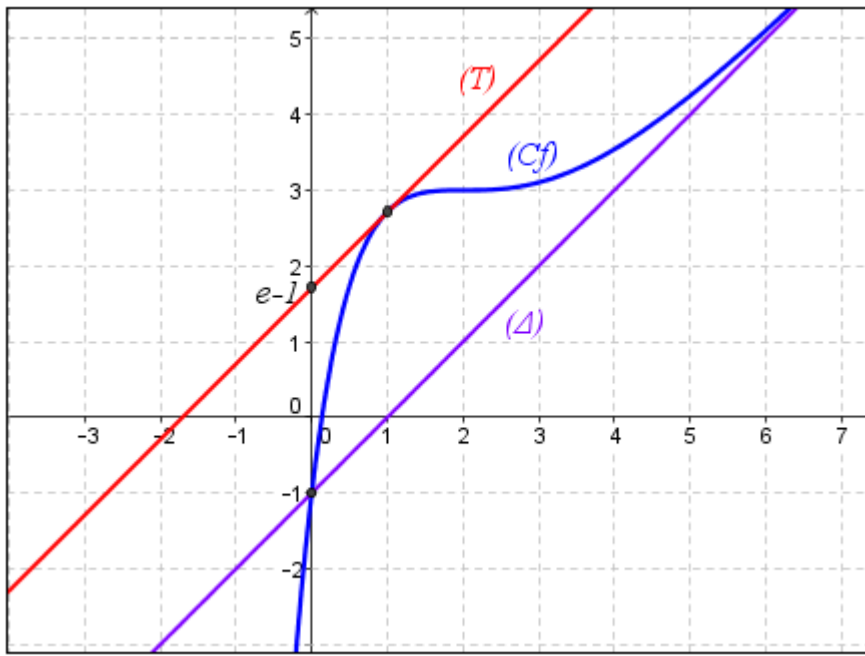
• كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$$(T) : y = x - 1 + e \text{ أي } y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 \times (x-1) + e = x - 1 + e$$

(د) حساب : $f(-1)$

$$f(-1) = -1 - 1 - e^3 = -2 - e^3 = -22.09$$

الرسم :



6- المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2} - 1 - m = 0$
 $xe^{-x+2} - 1 = m$ معناه

ومنه $f(x) = x + m$ أي $x - 1 + xe^{-x+2} = x + m$

- إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ الموازي لكل من (T) و (Δ)
- إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .
- إذا كان $m = -1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .
- إذا كان $m \in]-1; e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبيين .
- إذا كان $m = e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1 .
- إذا كان $m \in [e-1; +\infty[$ فإن المعادلة ليس لها حل .

7- تبين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1+x)e^{-x+2} + 3 \quad \bullet \text{ لدينا :}$$

$$F'(x) = x - 1 - [e^{-x+2} + (1+x)(-e^{-x+2})] = x - 1 - (1-1-x)e^{-x+2}$$

$$= x - 1 + xe^{-x+2}$$

ومن

$$F'(x) = f(x) \quad \bullet \text{ أي}$$

$$F(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 - (1+2)e^{-2+2} + 3 = 2 - 2 - 3e^0 + 3 = -3 + 3 = 0 \quad \bullet \text{ ولدينا :}$$

وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

(1) احتمال الأحداث A, B, C :

$$P(C) = \frac{6n-12}{n^2-n}, P(B) = \frac{n^2-n-6}{n^2-n}, P(A) = \frac{n^2-7n+18}{n^2-n}$$

(3) أ- شجرة الاحتمالات

ب- $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

$$P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}, P(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)} \text{ ج-}$$

$$P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}, P(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}, P(X=0) = \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)} \text{ د-}$$

$$E(X) = \frac{4}{n}$$

التمرين الثاني:

1. حل المعادلة: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

$z^2+2z+4=0$ أو $z-2=0$ يكافئ $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

• $z-2=0$ معناه $z=2$

• حل المعادلة $(*)$ $z^2+2z+4=0$

- حساب المميز: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12$

$$\Delta = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2 \text{ نضع}$$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$$z_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}, z_1 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3}$$

• مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$

II. لدينا: $z_C = 2$ و $z_B = -1-i\sqrt{3}, z_A = -1+i\sqrt{3}$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1- أ) تبيان أن :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{(-3 - i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}{(-3 + i\sqrt{3})(-3 - i\sqrt{3})}$$

• لدينا :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{9 + 6i\sqrt{3} - 3}{12} = \frac{6}{12} + i\frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- ومنه

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

- أي

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

لأن :

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

-

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC

$$\frac{CB}{CA} = 1 \quad \text{أي} \quad CB = CA \quad \text{ومنه} \quad \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1$$

• لدينا :

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{أي} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

• ولدينا :

ABC مثلث متقايس الأضلاع

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC

$$|z_A| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 = OA$$

• لدينا :

$$|z_C| = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2 = OC, \quad |z_B| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 = OB$$

• وبالتالي : $OA = OB = OC = 2$ أي النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r = 2$

2- أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق :

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0 \quad \text{معناه} \quad 2(x + iy + x - iy) + x^2 + y^2 = 0$$

$$(x + 2)^2 + y^2 = 4 \quad \text{وبالتالي :} \quad x^2 + y^2 + 4x = 0 \quad \text{ومنه}$$

أي أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r=2$.

(ب) التحقق من أن A و B تنتميان إلى (Γ) :

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 = r \quad \text{- لدينا :}$$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 2| = |1 - i\sqrt{3}| = 2 = r \quad \text{- ولدينا :}$$

وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ) .

3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

(1) تعيين صورة النقطة B بالدوران R :

$$R(B) = B' \quad \text{معناه} \quad z_{B'} = az_B + b \quad \bullet \text{ لدينا :}$$

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أي} \quad a = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \quad \bullet \text{ ولدينا :}$$

$$b = (1-a)z_A = \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + i\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + i\sqrt{3}) \quad \bullet \text{ ولدينا كذلك :}$$

$$b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{أي}$$

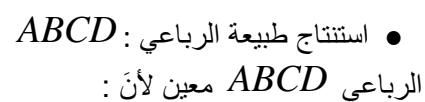
$$z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 + i\sqrt{3} \quad \bullet \text{ إذن :}$$

$$R(B) = C \quad \text{ومنه} \quad z_{B'} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 + i\sqrt{3} = 2 = z_C \quad \text{أي}$$

(2) تعيين z_D للاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R :

$$z_D = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C + 1 + i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 + 1 + i\sqrt{3} = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$z_D = 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{أي}$$



و $z_{\overline{AB}} = -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ لأن $ABCD$ متوازي أضلاع •
 $z_{\overline{DC}} = 2 + 2i\sqrt{3} - 2 = 2i\sqrt{3}$
 أى $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}} = 2i\sqrt{3}$

• ولدینا : $BC = CD$ لأن $R(B) = C$ و $R(C) = D$

(ج) صورة (Γ) بالدوران R :

$$R(B)=C \quad , \quad R(\Omega)=O \quad \text{لأن } (\mathcal{C}) \text{ هي}$$

التمرين الثالث:

(E) : $5x - 6y = 3$: لدينا

(1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3

• لدينا : $5x - 6y = 3$ تكافئ $5x = 3 + 6y$

أي $5x = 3(1 + 2y)$

• لدينا : $3/5x$ و $3 \wedge 5 = 1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3

(2) تعيين حل خاص للمعادلة : (E)

• نفرض $x = 3$ وبالتالي : $y = \frac{5 \times 3 - 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$ أي الثنائية $(3; 2)$ حل للمعادلة (E)

• حل المعادلة : (E) لدينا : $5x - 6y = 5 \times 3 - 6 \times 2$ يكافئ $5x - 5 \times 3 = 6y - 6 \times 2$ أي $5(x - 3) = 6(y - 2)$ (*)

• لدينا : $6 \nmid 5(x - 3)$ و $6 \wedge 5 = 1$ فإن $6 \mid (x - 3)$ حسب مبرهنة غوص .
أي $x - 3 = 6k$ ($k \in \mathbb{Z}$) وبالتالي $x = 6k + 3$

• من أجل $x = 6k + 3$ نعوض في المعادلة (*) نجد : $5(6k + 3 - 3) = 6(y - 2)$ ومنه $y - 2 = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}$) أي $y = 5k + 2$

- مجموعة حلول المعادلة : $S = \{(6k + 3; 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}$

(ج) استنتاج حلول الجملة : $(S) : \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

• $\begin{cases} x = 6m - 1 \\ x = 5n - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ
أي $6m - 1 = 5n - 4$ ومنه $5n - 6m = 3$

ومنه : $n = 6k + 3$ وبالتالي $x = 5(6k + 3) - 4 = 30k + 11$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2- لدينا : $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}^5$, $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}^3$

• تعيين $(\alpha; \beta)$ بحيث تكون $(a; b)$ حل للمعادلة : (E)

- لدينا : $a = 1 \times 3^5 + \alpha \times 3^4 + \alpha \times 3^2 = 243 + 81\alpha + 9\alpha = 243 + 90\alpha$

ولدينا : $b = \alpha \times 5^3 + \beta \times 5^2 + \alpha \times 5^0 = 125\alpha + 25\beta + \alpha = 126\alpha + 25\beta$

مع $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$

• الثنائية $(a; b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a - 6b = 3$

ومنه $5(243 + 90\alpha) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$

اي $1215 + 450\alpha - 756\alpha - 150\beta = 3$ ومنه $-306\alpha - 150\beta = -1212$

بعد تقسيم الطرفين على العدد 3- نجد :

$102\alpha + 50\beta = 404$ وبالتالي $(\alpha; \beta) = (2; 4)$ حل للمعادلة

التمرين الرابع:

1. لدينا : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$

(1) حساب النهايات :

• حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right) = 0$$

- التفسير الهندسي $y = 0$: مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_g) بجوار $-\infty$

• حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \quad \text{(2) تبيان أن}$$

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \bullet \text{ لدينا :}$$

$$g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \quad \text{أي}$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة : g

x	$-\infty$	$+\infty$
$-e^{2x}$		—
$g'(x)$		—

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		—
$g(x)$	0	$-\infty$

$$x: \quad g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} + \ln(1 + e^{-x}) - x \quad \text{(3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي}$$

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} - \ln \left[e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) \right] \quad \bullet \text{ لدينا :}$$

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} - \ln(e^x) - \ln(1 + e^{-x}) \quad \text{ومنه :}$$

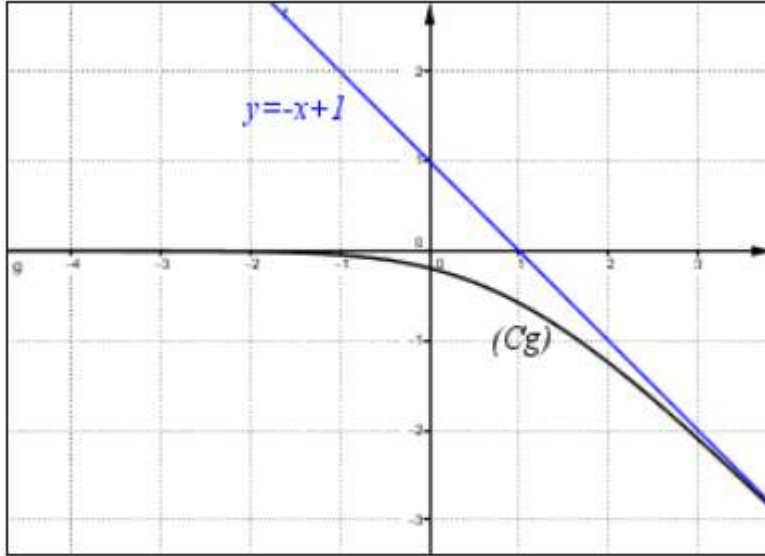
$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} + \ln(1 + e^{-x}) - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 1)] \quad \text{(4) أ) حساب :}$$

● لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1 + e^{-x}} - \ln(1 + e^{-x}) - x + x - 1 \right]$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 1)] = 0 \quad \text{ومنه}$$

● تفسير النتيجة : المستقيم ذي المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_g) عند $-\infty$.
(5) الرسم :



استنتاج اشارة : $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	-	

II. لدينا : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

(1) البرهان أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

● نضع $e^x = t$ وبالتالي عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $t \rightarrow 0$

إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \ln(1 + e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + 1)}{t} = 1$

أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

● حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1+e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{e^x} = 0$

(2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

● لدينا : $f'(x) = -e^{-x} \times \ln(e^x+1) + e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x+1} = e^{-x} \left(\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1) \right)$

أي $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

● استنتاج اتجاه تغير الدالة : f

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	—
$f'(x)$	—

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

● جدول تغيرات الدالة : f

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	—
$f(x)$	1 → 0

(3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

● من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

● حساب : $\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x+1} dx$

$$\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\ln 3}^0 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \left[-\ln(1 + e^{-x}) \right]_{-\ln 3}^0 = -\ln 2 + \ln(1 + e^{\ln 3})$$

$$\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx = -\ln 2 + \ln 4 = -\ln 2 + 2\ln 2 = \ln 2 \quad \text{أي}$$

(4) حساب $\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx$: بالمكاملة بالتجزئة

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = \int_{-\ln 3}^0 e^{-x} \ln(e^x + 1) dx$$

نضع : $u(x) = -e^{-x}$ ومنه $u'(x) = e^{-x}$

و $v(x) = \ln(e^x + 1)$ ومنه $v'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

إذن :

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = \int_{-\ln 3}^0 e^{-x} \ln(e^x + 1) dx = \left[-e^{-x} \ln(e^x + 1) \right]_{-\ln 3}^0 - \int_{-\ln 3}^0 -e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = -\ln 2 + e^{\ln 3} \ln(e^{-\ln 3} + 1) + \int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = 3\ln \frac{4}{3} \quad \text{إذن} \quad \int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = -\ln 2 + 3\ln\left(\frac{1}{3} + 1\right) + \ln 2 = 3\ln \frac{4}{3}$$