



موضوع البكالوريا التجريبي رقم 05

التمرين الأول:

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

(1) القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;0]$ حيث $f(x) = (-2x+4)e^{x+1}$ هي:

(أ) $m = 6 - 8e$ (ب) $m = \frac{6-e}{4}$ (ج) $m = 6e - 8$

(2) المتتالية العددية (w_n) معرفة على N بـ: $w_n = \ln(n!) - \ln[(n+1)!]$

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا:

(أ) $w_n = -\ln(n+1)$ (ب) $w_n = 0$ (ج) $w_n = \ln(n+1)$

(3) الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

(أ) $g'(x) = 3^2 \ln x$ (ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \times \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (ج) $g'(x) = 2 \times 3^{x-1}$

(4) حل المعادلة التفاضلية $y' - (\ln 2)y = \ln 4$ والذي يحقق $f(0) = 0$ هو الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

(أ) $f(x) = (\ln 2)e^{(\ln 2)x} - \ln 2$ (ب) $f(x) = 2e^{(\ln 2)x} - 2$ (ج) $f(x) = 2^x - 1$

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2، -1، 0، 1، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1، 0، 1 وكريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1، 0 (لا نفرق بين الكريات باللمس).

(1) نسحب عشوائيا على التوالي دون إرجاع كريتين من الكيس، ونعتبر الحدثين A و B التاليين:

A : "الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون" و B : "الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما رقما موجبا تماما"

أ- احسب $p(A)$ و $p(B)$

ب- احسب $p(A \cap B)$ ثم استنتج أن $p(A \cup B) = \frac{32}{45}$

(2) نسحب الآن عشوائيا كريتين في آن واحد من الكيس.

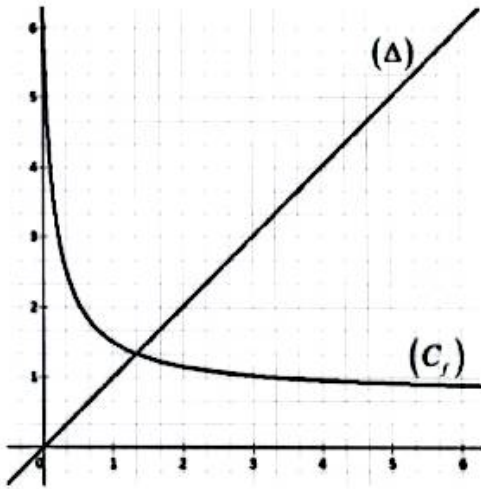
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد الحقيقي $|x-y|$ حيث x و y الرقمان الظاهران على الكريتين المسحوبتين.

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0;1;2;3;4\}$ ثم عرف قانون احتماله.

ب- احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

ج- استنتج قيمة α حتى يكون $E(415X + \alpha) - 2 = 2025$

التمرين الثالث:



(1) الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{9x+12}{12x+2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$ كما هو موضح في الشكل المقابل.

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \text{ طبيعي}$$

(1) أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل.

ب- ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها.

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}}$ (نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n \neq 1$)

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{7}{18}$ واحسب حدها الأول v_0

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث: $\begin{cases} S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ T_n = u_0(1-v_0) + u_1(1-v_1) + \dots + u_n(1-v_n) \end{cases}$

التمرين الرابع:

الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة هندسياً.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$, $f'(x) = (-1 + \ln x)(1 + \ln x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

ب- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A

(5) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0; 7]$

(6) n عدد طبيعي غير معدوم و f_n الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$ و (C_n) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{e^2 - 1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $f_n(x) > 0$

ب- فسر هندسيا العدد u_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n \geq 0$

ج- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(7) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \frac{n+1}{2} u_n - \frac{1}{2}$

ب- علما أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(8) ادرس إشارة $f_1(x) - f_2(x)$ في المجال $[1; e]$ ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

التمرين الخامس: (خاص بشعبي رياضي / تقني رياضي)

(1) أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $5^{2025} + 1446$ على 7

(2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها العدد $222^n + 4 \times 5^n + 337$ يقبل القسمة على 7

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023$ مضاعف للعدد 7

(4) العدد الطبيعي N غير المعدوم يكتب $20mm$ في النظام العشري.

عين قيم العدد الطبيعي m الذي يحقق $6[7] \equiv N$ ثم عين قيم N

انتهى الموضوع

(4) لاقتراح المصحح: $f(x) = 2e^{(\ln 2)x} - 2$ التبرير:

$y' - (\ln 2)y = \ln 4$ تكافئ $y' = (\ln 2)y + \ln 4$
 الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية هي الدوال
 f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \lambda e^{(\ln 2)x} - \frac{\ln 4}{\ln 2}$
 نجد: $f(x) = \lambda e^{(\ln 2)x} - 2$
 الحل الخاص تحقق: $f(0) = 2$
 نجد: $\lambda = 2$

ومن هنا: $f(x) = 2e^{(\ln 2)x} - 2$

التمرين الثاني

- (1) نسحب عشوائياً على التوالي دون ارجاع كرتين من الكيس.
 فيكون عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$A_{10}^2 = 90$

حساب $P(A)$ و $P(B)$:

A : "الكرتان المسحوبتان مختلفتان في اللون"

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_5^2 + A_3^2 + A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{31}{45}$

نجد: $P(A) = \frac{31}{45}$

B : "الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما رقماً موجباً تماماً"

معطاه: نسحب من (1) (2) (1) ومنه: $P(B) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2}$

نجد: $P(B) = \frac{1}{15}$

حساب $P(A \cap B)$ ثم استنتاج أن $P(A \cup B) = \frac{32}{45}$

$A \cap B$: "الكرتان المسحوبتان مختلفتان في اللون وتحمل كل منها رقماً موجباً تماماً"

$P(A \cap B) = \frac{2A_2^1 \times A_1^1}{A_{10}^2}$

نجد: $P(A \cap B) = \frac{2}{45}$

المصحح الموصى به رقم 05

التمرين الأول:

(1) لاقتراح المصحح: $m = 6e - 8$

التبرير:

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1; 0]$ هي:

$m = \frac{1}{0 - (-1)} \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-2x + 4) e^{x+1} dx$

باستعمال التكامل بالتجزئة نضع:

$v' = x+1$ و $u = -2x + 4$
 ومنه:

$v = e^{x+1}$ و $u' = -2$

وعليه:

$m = \left[(-2x + 4) e^{x+1} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -2 e^{x+1} dx$

$m = 4e - 6 + 2 \int_{-1}^0 e^{x+1} dx$

$m = 4e - 6 + 2 \left[e^{x+1} \right]_{-1}^0 = 4e - 6 + 2(e - 1)$

نجد: $m = 6e - 8$

(2) لاقتراح المصحح: $\omega_n = -\ln(n+1)(P)$

التبرير:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$\omega_n = \ln(n!) - \ln((n+1)!)$

$\omega_n = \ln \frac{n!}{(n+1)!} = \ln \frac{n!}{(n+1)n!} = \ln \frac{1}{n+1}$

$\omega_n = \ln 1 - \ln(n+1)$

نجد: $\omega_n = -\ln(n+1)$

(3) لاقتراح المصحح: $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

التبرير:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} = e^{(x-1) \ln \frac{3}{2}} = e^{(x-1) \times \ln \frac{3}{2}}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$g'(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \times e^{(x-1) \times \ln \frac{3}{2}}$

نجد: $g'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{1}{45}$

ب. حساب $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \times P(X=x_i)$$

$$E(X) = \frac{0 \times 7 + 1 \times 20 + 2 \times 12 + 3 \times 5 + 4 \times 1}{45}$$

$$E(X) = \frac{7}{5} \quad \text{نجد:}$$

ج. استنتاج قيمة α :

$$E(415X + \alpha) - 2 = 2025 \quad \text{لدينا:}$$

$$415 \times E(X) + \alpha = 2027 \quad \text{أي:}$$

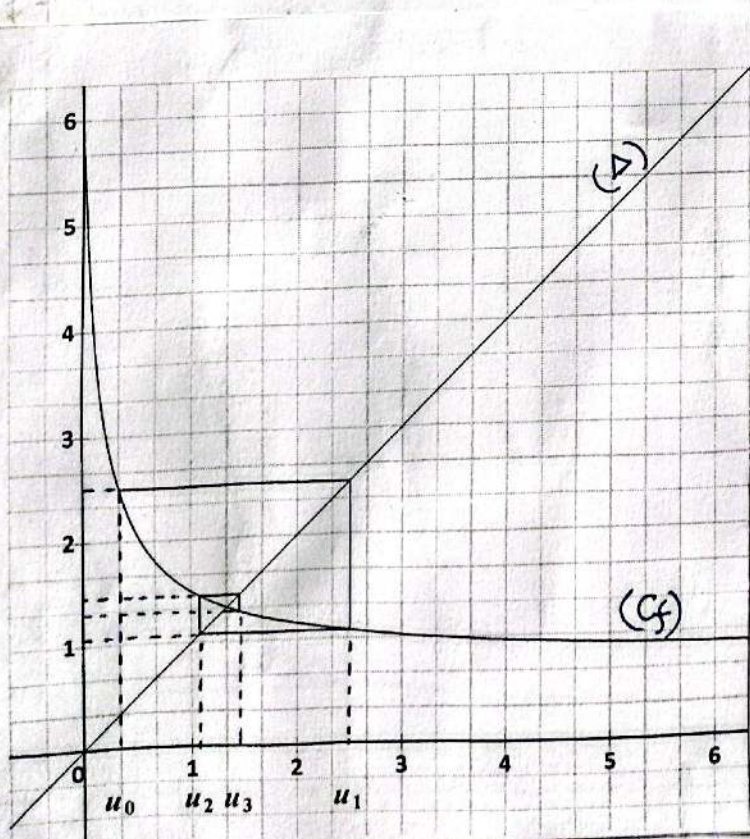
$$\alpha = 1446 \quad \text{نجد:}$$

التمرين الثالث:

$$f(x) = \frac{9x+12}{12x+2} ; D_f = [0; +\infty[\quad (1)$$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{m+1} = f(u_m) = \frac{9u_m+12}{12u_m+2} ; x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ج. تحليل الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة (u_n) على حامل محور التوافيق دون حسابها:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{31}{45} + \frac{1}{15} - \frac{2}{45}$$

$$P(A \cup B) = \frac{32}{45} \quad \text{نجد:}$$

د. سحب الآلة عشوائياً كرّتين في آن واحد من الكيس.

فيكون عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_{10}^2 = 45$$

ولدينا: $X = |x - y|$

حيث: x و y الرقمان الظاهران على الكرتين المسعوبتين.

ز. ترميز قيم X ثم تعريف قانون الاحتمال

-2	-1	-1
-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1
2		

x	y	$X = x - y $
-2	-1	1
-2	0	2
-2	1	3
-2	2	4
-1	-1	0
-1	0	1
-1	1	2
-1	2	3
0	0	0
0	1	1
0	2	2
1	1	0
1	2	1

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4\} \quad \text{ومنه:}$$

نعرف قانون الاحتمال كما يلي:

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} = \frac{7}{45}$$

$$P(X=1) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1}{45} = \frac{20}{45}$$

$$P(X=2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1}{45} = \frac{12}{45}$$

$$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1}{45} = \frac{5}{45}$$

$$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{45} = \frac{1}{45}$$

• ولدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}} = \frac{u_n + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

$$v_n = \frac{u_n + \frac{3}{4} - \frac{25}{12}}{u_n + \frac{3}{4}} = 1 - \frac{\frac{25}{12}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

$$1 - v_n = \frac{25}{12(u_n + \frac{3}{4})} \quad \text{ومن هنا :}$$

$$u_n + \frac{3}{4} = \frac{25}{12(1 - v_n)} \quad \text{وعليه :}$$

$$u_n = \frac{25}{12(1 - v_n)} - \frac{3}{4} \quad \text{نجد :}$$

$$u_n = \frac{25 - 9(1 - v_n)}{12(1 - v_n)} = \frac{16 + 9v_n}{12 - 12v_n}$$

$$u_n = \frac{16 + 9 \left[-\frac{12}{13} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n \right]}{12 - 12 \left[-\frac{12}{13} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n \right]} \times \frac{13}{13}$$

$$u_n = \frac{208 - 108 \left(-\frac{7}{18}\right)^n}{156 + 144 \left(-\frac{7}{18}\right)^n} = \frac{4}{3} \times \frac{52 - 27 \left(-\frac{7}{18}\right)^n}{52 + 48 \left(-\frac{7}{18}\right)^n}$$

$$u_n = \frac{4}{3} \times \frac{1 - \frac{27}{52} \left(-\frac{7}{18}\right)^n}{1 + \frac{12}{13} \left(-\frac{7}{18}\right)^n} \quad \text{نجد :}$$

$$\cdot \text{ لدينا : } -1 \leq -\frac{7}{18} < 1$$

$$\text{ومن هنا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{7}{18}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{3} \times \frac{1 - 0}{1 - 0} \quad \text{وعليه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{3} \quad \text{نجد :}$$

• حساب بدلالة n المجموع S_n و T_n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

S_n هو مجموع $n+1$ حدا من حدود متباينة
متتالية هندسية أساسها $-\frac{7}{18}$ وحدها الأول $-\frac{12}{13}$

• با وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

وتتأرجحها :

• المتتالية (u_n) ليست رتيبة

لأن :

$$u_0 < u_1 > u_2 < u_3$$

• المتتالية (u_n) متتالية لأن حدودها تتقارب، بسمها نحونا فصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

$$v_n = \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad (v_n \neq 1) \quad (2)$$

• بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{7}{18}$

وحدها الأول v_0 :

• من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \frac{4}{3}}{u_{n+1} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9u_n + 12}{12u_n + 2} - \frac{4}{3}}{\frac{9u_n + 12}{12u_n + 2} + \frac{3}{4}}$$

$$v_{n+1} = \frac{4}{3} \times \frac{-21u_n + 28}{72u_n + 54}$$

$$v_{n+1} = \frac{4}{3} \times \frac{-7}{18} \times \frac{3u_n - 4}{4u_n + 3}$$

$$v_{n+1} = \frac{4}{3} \times \frac{-7}{18} \times \frac{8}{4} \times \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

$$v_{n+1} = -\frac{7}{18} v_n \quad \text{فنجد :}$$

ومن هنا : (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{7}{18}$

وحدها الأول :

$$v_0 = \frac{u_0 - \frac{4}{3}}{u_0 + \frac{3}{4}}$$

$$v_0 = -\frac{12}{13} \quad \text{نجد :}$$

• كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

ثم حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

• من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$

نجد :

$$v_n = -\frac{12}{13} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n$$

$$T_n = \frac{1}{975} \left[975 \times \frac{4}{3} n - 814 - 975 \times \frac{63}{325} \left(-\frac{7}{18}\right)^n \right]$$

$$T_n = \frac{1}{975} \left[1300 n - 814 - 189 \left(-\frac{7}{18}\right)^n \right]$$

التمرين الرابع :

$$\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x)^2 ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad D_f = [0; +\infty[$$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \ln x)^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln x)^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

الاستنتاج :

الدالة f غير قابلة للاستغناء على يمين 0

التفسير الهندسي :

المنحنى (م) الممثل للدالة f يقبل على يمين 0 نصف

مماسا عموديا (يوأزي حامل محور الترتيب)

موجه نحو الأعلى.

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(3) 12 بنيت أن $f(x) = (-1 + \ln x)(1 + \ln x)$
الدالة f قابلة للاستغناء على $[0; +\infty[$
ودالتها المشتقة ،

$$f'(x) = 1 \times (1 - \ln x)^2 + x \times \frac{-2}{x} (1 - \ln x)$$

$$f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x)$$

$$f'(x) = (1 - \ln x) [1 - \ln x - 2]$$

$$f'(x) = (1 - \ln x)(-1 - \ln x)$$

$$f'(x) = -(1 - \ln x)(1 + \ln x)$$

$$f'(x) = (-1 + \ln x)(1 + \ln x)$$

نجد :

$$S_n = -\frac{12}{13} \times \frac{\left(-\frac{7}{18}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{7}{18} - 1}$$

$$S_n = \frac{216}{325} \left[\left(-\frac{7}{18}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$S_n = \frac{216}{325} \left[-\frac{7}{18} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n - 1 \right]$$

$$S_n = -\frac{84}{325} \times \left(-\frac{7}{18}\right)^n - \frac{216}{325}$$

$$S_n = -\frac{84}{325} \left[\left(-\frac{7}{18}\right)^n + \frac{216}{325} \times \frac{325}{84} \right]$$

$$S_n = -\frac{12}{325} \left[18 + 7 \left(-\frac{7}{18}\right)^n \right] \quad \text{نجد :}$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$T_n = u_0(1 - v_0) + u_1(1 - v_1) + \dots + u_n(1 - v_n)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{u_n - \frac{4}{3}}{u_n + \frac{3}{4}}$$

ومنه :

$$v_n \left(u_n + \frac{3}{4} \right) = u_n - \frac{4}{3}$$

$$v_n u_n + \frac{3}{4} v_n = u_n - \frac{4}{3}$$

$$u_n - v_n u_n = \frac{3}{4} v_n + \frac{4}{3}$$

$$u_n (1 - v_n) = \frac{3}{4} v_n + \frac{4}{3} \quad \text{نجد :}$$

وعليه :

$$T_n = \left(\frac{3}{4} v_0 + \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} v_1 + \frac{4}{3} \right) + \dots + \left(\frac{3}{4} v_n + \frac{4}{3} \right)$$

$$T_n = \frac{3}{4} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4}{3} \right)$$

$$T_n = \frac{3}{4} S_n + \frac{4}{3} (n+1)$$

$$T_n = \frac{3}{4} \left[-\frac{12}{325} \left(18 + 7 \left(-\frac{7}{18}\right)^n \right) \right] + \frac{4}{3} n + \frac{4}{3}$$

$$T_n = -\frac{162}{325} - \frac{63}{325} \left(-\frac{7}{18}\right)^n + \frac{4}{3} n + \frac{4}{3}$$

$$T_n = \frac{4}{3} n - \frac{814}{975} - \frac{63}{325} \left(-\frac{7}{18}\right)^n$$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

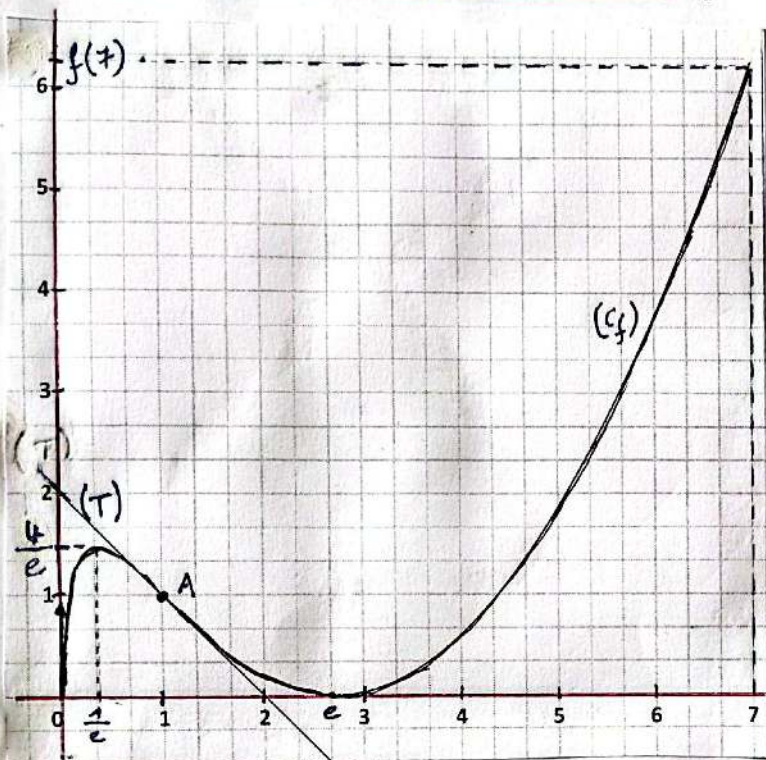
وبما أن الدالة المشتقة الثانية انعدمت عند 1 مغيرة اشارتها عند 1 فإن (cp) يقبل نقطة انعطاف عند النقطة $A(1; f(1))$ أي عند النقطة $A(1; 1)$.

ب) كتابة معادلة العاس (T) لـ (cp) عند $A(1; 1)$:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = -x + 2 \quad \text{نجد:}$$

(5) إنشاء (T) و (cp) على المجال $[0; 7]$:



$$f_n(x) = x(1 - \ln x)^n; \quad D_{f_n} =]0; +\infty[$$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{e^2 - 1}{e} \\ u_n = \int_1^e f_n(x) dx \end{cases}$$

١٩ نثبت أن $f_n(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; e]$ ومن أجل كل عدد طبيعي n .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; e]$ لدينا،

$$1 \leq x \leq e \dots (1)$$

$$0 \leq \ln x \leq 1 \quad \text{ومن هنا:}$$

$$-1 \leq -\ln x \leq 0$$

$$0 \leq 1 - \ln x \leq 1$$

فيكون من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$0 \leq (1 - \ln x)^n \leq 1 \dots (2)$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة في ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$f'(x) = 0$ تكافئ $x = \frac{1}{e}$ أو $x = e$ وإشارة $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ من إشارة الجداء $(1 + \ln x)(-1 + \ln x)$ حيث:

$$1 + \ln x < 0 \quad \text{تكافئ} \quad 0 < x < \frac{1}{e}$$

$$-1 + \ln x < 0 \quad \text{تكافئ} \quad 0 < x < e$$

ومن هنا:

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$1 + \ln x$	-	0	+	+
$-1 + \ln x$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+

وعليه:

• f متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{e}; e]$

• f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0; \frac{1}{e}]$ و $[e; +\infty[$

جدول تغيراتها كالآتي:

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

$f(x)$

$\nearrow \frac{1}{e} \searrow 0 \nearrow +\infty$

(4) ١٩ نثبت أن المنحنى (cp) يقبل نقطة انعطاف A: الدالة f قابلة للاستقاق مرتين على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة الثانية:

$$f''(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x) + \frac{1}{x}(-1 + \ln x)$$

$$f''(x) = \frac{1 + \ln x - 1 + \ln x}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} \quad \text{نجد:}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x = 1$$

و إشارة $f''(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ من إشارة $\ln x$ (لأن $\frac{2}{x} > 0$ على $]0; +\infty[$).

$$\ln x < 0 \quad \text{تكافئ} \quad 0 < x < 1$$

ومنه : (u_n) متناقصة

وبما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية لـ

(u_n) متقاربة

(7) |2| بين أن $u_{n+1} = \frac{n+1}{2} u_n - \frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

لدينا : $u_{n+1} = \int_1^e f_n(x) dx$

$$u_{n+1} = \int_1^e x(1 - \ln x)^{n+1} dx$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نضع :

$$v = (1 - \ln x)^{n+1} \text{ و } u = x$$

ومنه : $u = \frac{1}{2} x^2$ و $v' = -\frac{n+1}{x} (1 - \ln x)^n$

وعليه :

$$u_{n+1} = \left[\frac{1}{2} x^2 (1 - \ln x)^{n+1} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2} x \cdot \frac{n+1}{x} (1 - \ln x)^n dx$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2} u_n - \frac{1}{2}$$

بـ استنتاج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

ومنه وحسب النهايات بالحصص فإن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

(8) دراسة إشارة $f_1(x) - f_2(x)$ ثم حساب

مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنيين

(c1) و (c2) والمستقيمتين $x=1$ و $x=e$:

$$f_1(x) - f_2(x) = x(1 - \ln x) - x(1 - \ln x)^2$$

بضرب (1) و (2) طرف طرف لجذ :

$$0 \leq x(1 - \ln x)^n \leq e$$

أي : $0 \leq f_n(x) \leq e$

ومنه : $f_n(x) \geq 0$

بـ التفسير الهندسي للعدد u_n ثم استنتاج أن $u_n \geq 0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

العدد u_n هو مساحة الحيز المستوي المحدود

بالمنحنى (f_n) الممثل للدالة f_n وحامل محور

الغواصيل والمستقيمتين اللذين معادلتيهما

$$x=1 \text{ و } x=e$$

لدينا مما سبق ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$f_n(x) \geq 0$$

ومنه : $\int_1^e f_n(x) dx \geq 0$ (حسب خواص التكامل)

أي :

$$u_n \geq 0$$

جـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة :

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^e x(1 - \ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx$$

$$= \int_1^e [x(1 - \ln x)^{n+1} - x(1 - \ln x)^n] dx$$

$$= \int_1^e [x(1 - \ln x)(1 - \ln x)^n - x(1 - \ln x)^n] dx$$

$$= \int_1^e x(1 - \ln x)^n [1 - \ln x - 1] dx$$

$$= \int_1^e x(1 - \ln x)^n (-\ln x) dx$$

ومنه :

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^e (-\ln x) f_n(x) dx$$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[1; e]$:

$$-\ln x \leq 0 \text{ و } f_n(x) \geq 0$$

ومنه : $(-\ln x) f_n(x) \leq 0$

$$\int_1^e (-\ln x) f_n(x) dx \leq 0$$

نجد :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$5^{2025} + 1446 \equiv 6 + 4 \pmod{7} \quad \text{ومنه :}$$

$$5^{2025} + 1446 \equiv 3 \pmod{7} \quad \text{أي :}$$

فيكون :

بأقية قسمته $5^{2025} + 1446$ على 7 هو : **3**

(2) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يقبل العدد $222^n + 4 \times 5^n + 337$ القسمة على 7 :

$$\text{لدينا : } 222 \equiv 5 \pmod{7} \text{ و } 337 \equiv 1 \pmod{7}$$

ومنه :

$$222^n + 4 \times 5^n + 337 \equiv 5^n + 4 \times 5^n + 1 \pmod{7}$$

$$222^n + 4 \times 5^n + 337 \equiv 5 \times 5^n + 1 \pmod{7}$$

العدد $222^n + 4 \times 5^n + 337$ يقبل القسمة على 7

$$\text{معناه : } 5 \times 5^n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$5 \times 5^n \equiv 6 \pmod{7} \quad \text{أي :}$$

$$5 \times 5^n \equiv 20 \pmod{7} \quad \text{وأيضا :}$$

ولدينا 5 أولي مع 7

$$\text{ومنه : } 5^n \equiv 4 \pmod{7}$$

حسب الجدول فانه :

$$n = 6k + 2; k \in \mathbb{N}$$

(3) بين أن $2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023$ مضاعف لـ 7 من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\text{لدينا : } 2021 \equiv 5 \pmod{7} \text{ و } 2022 \equiv 6 \pmod{7} \text{ و } 2023 \equiv 0 \pmod{7}$$

ومنه :

$$2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023 \equiv 5^{6n+3} - 6 \times 2^{6n} \pmod{7}$$

$$2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023 \equiv 6 - 6 \times (2^6)^n \pmod{7}$$

$$2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023 \equiv 6 - 6 \times 1^n \pmod{7}$$

$$2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023 \equiv 6 - 6 \pmod{7}$$

ومنه :

$$2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\text{العدد : } 2021^{6n+3} - 2022 \times 2^{6n} + 2023 \text{ مضاعف لـ } 7$$

$$N = 20mm^{10} \quad N \in \mathbb{N} \quad (4)$$

حيث : $0 \leq m \leq 9$

تعيين قيم العدد الطبيعي m الذي يحقق

$$N \equiv 6 \pmod{7} \text{ ثم تعيين قيم } N :$$

$$f_1(x) - f_2(x) = x(1 - \ln x)[1 - 1 + \ln x]$$

$$f_1(x) - f_2(x) = x \ln x (1 - \ln x)$$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $[1; e]$:

$$x > 0 \quad \text{و} \quad \ln x \geq 0 \quad \text{و} \quad 1 - \ln x \geq 0$$

ومنه :

$$x \ln x (1 - \ln x) \geq 0$$

أي :

$$f_1(x) - f_2(x) \geq 0$$

ملاحظة : (c_1) يقع فوق (c_2) على $[1; e]$

ومنه :

$$A = \int_1^e (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

$$A = \int_1^e f_1(x) dx - \int_1^e f_2(x) dx$$

$$A = u_1 - u_2$$

حيث :

$$u_1 = \frac{0+1}{2} u_0 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 3}{4}$$

$$u_2 = \frac{1+1}{2} u_1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 5}{4}$$

ومنه :

$$A = \frac{e^2 - 3}{4} - \frac{e^2 - 5}{4}$$

نجد :

$$A = \frac{1}{2} (u_1 - u_2)$$

التمرين الخامس : (خاص بشعبي رياضي/تقني رياضي)

(1) دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n

على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n :

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

بـ استنتاج باقي القسمة الأقليدية على 7

$$\text{للعدد } 5^{2025} + 1446 :$$

$$\text{لدينا : } 2025 = 6k + 3 \text{ مع } k = 337$$

$$\text{ومنه : } 5^{2025} \equiv 5^{6k+3} \pmod{7}$$

$$\text{أي : } 5^{2025} \equiv 6 \pmod{7}$$

$$\text{ولدينا : } 1446 \equiv 4 \pmod{7}$$

تم بحمد الله وترجمة
كتابة الحل المفصل
للموضوع التجريبي
أحمد 05

نظام الأستاذ:

عبد الصمد بودظوف

بتاريخ:

لأحد 13 ذو القعدة 1446 هـ
11 ماي 2025 م

BAC
2025

Bahja Plus Academy

بمدينة برج البحري.

معلم
أحمد

لدينا:

$$N = \overline{20}m$$

$$N = m \times 10^0 + m \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$$

$$N = m + 10m + 0 + 2000$$

$$N = 11m + 2000$$

ومنه:

$$N \equiv 6 [7] \quad \text{ولدينا:}$$

تكافئ:

$$11m + 2000 \equiv 6 [7]$$

$$4m + 5 \equiv 6 [7]$$

$$4m \equiv 1 [7]$$

$$4m \equiv 8 [7] \quad \text{وأيضا:}$$

$$4 \text{ أولي مع } 7$$

$$m \equiv 2 [7] \quad \text{ومنه:}$$

$$m = 7k + 2 \quad \text{نجد:}$$

$$0 \leq m \leq 9 \quad \text{وبما أن}$$

$$K = \{0; 1\} \quad \text{فإن:}$$

$$m \in \{2; 9\} \quad \text{فنجد:}$$

$$N = 2022 \quad \text{ولدينا من أجل } m = 2 \text{ نجد:}$$

$$N = 2022$$

$$N = 2099 \quad \text{ومن أجل } m = 9 \text{ نجد:}$$

$$N = 2099$$

ومنه:

$$N \in \{2022; 2099\}$$