

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانويات المقاطعة الأولى - جيجل
ثانوية بن زايد السعيد - العوانة
ثانوية صالحى عثمان - بئر بوحوش



إمتحان البكالوريا التجريبي
دورة ماي 2024
الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

إختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

تضم جمعية سبع نساء وتسعة رجال، من بينهم امرأة واحدة إسمها فاطمة، ورجل واحد إسمه عبد الله. أرادت الجمعية تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا وكاتبا من أجل تمثيلها في إحدى المناسبات الوطنية.

- 1/ أحسب احتمال الأحداث التالية: A «اللجنة تضم عبد الله» B «فاطمة كاتبة للجنة»
C «اللجنة تضم إما فاطمة وإما عبد الله» D «اللجنة تتكون من رجال ونساء معا»

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.

ا/ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب/ استنتج $E(2024X + 1445)$.

ج/ أحسب الإحتمال $P\left(\int_1^X \ln t \, dt < 1\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب: $Z_A = 1 - 2i$ و $Z_B = -i$.

في كل حالة من الحالات التالية، عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة مع التبرير:

1/ حل المعادلة: $(1 + 2i)\bar{Z} + 2 - i = 0$ ذات المجهول Z من $\mathbb{C}$ هو:

(أ) $Z = -i$	(ب) $Z = i$	(ج) $Z = 1 - 2i$
--------------	-------------	------------------

2/ عمدة للعدد المركب Z حيث: $Z = -3\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)$ هي:

(أ) $\frac{\pi}{7}$	(ب) $-\frac{\pi}{7}$	(ج) $\pi - \frac{\pi}{7}$
---------------------	----------------------	---------------------------

3/ العدد المركب $L = \left(\frac{Z_A - Z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1445}$ يساوي:

(أ) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(ب) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
---	--	---

4/ إذا كانت θ عمدة لعدد مركب Z و r طويلته، فإن العدد المركب $\frac{Z_B}{Z}$ يُكتب على الشكل الأسّي:

(أ) $r \cdot e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})}$	(ب) $\frac{1}{r} \cdot e^{i(-\theta + \frac{\pi}{2})}$	(ج) $\frac{1}{r} \cdot e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})}$
--	--	--

5/ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق $\arg(iZ - 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و A نقطة منها هي:

(أ) نصف المستقيم $[BA)$ ماعدا النقطة B.	(ب) المستقيم (BA) ماعدا النقطة B.	(ج) الدائرة التي $[BA]$ قطر لها ماعدا النقطة B.
---	-------------------------------------	---



التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

1/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 > 0$.

2/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$.

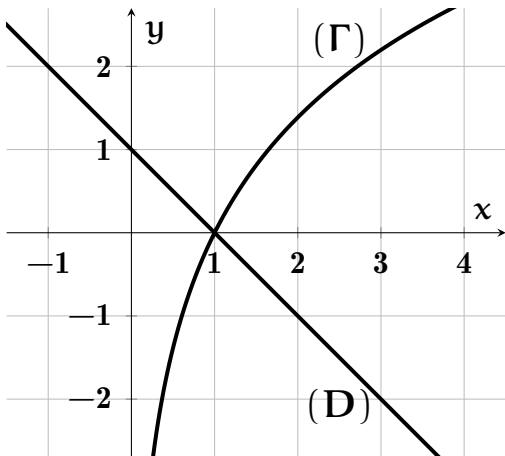
ا/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم أحسب حدها الأول v_0 .

ب/ أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4/ أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = \left(1 - \frac{1}{u_0} \right) \times \left(1 - \frac{1}{u_1} \right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



I/ الشكل المقابل يوضح (Γ) التمثيل البياني للدالة u المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = 2 \ln x$ و (D) المستقيم ذو معادلة: $y = -x + 1$.

1/ بقراءة بيانية حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $]0; +\infty[$ إشارة: $g(x) = x - 1 + 2 \ln x$.

II/ نعرّف الدالة f على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيث: $0.4 < \alpha < 0.5$ و $2.1 < \beta < 2.2$.

4/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلة له هي: $y = x$.

5/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، ثم أكتب معادلة المماس (T) .

6/ ا/ أنشئ (Δ) و (T) و (C_f) .

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = x - m$.

7/ الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = -x(\ln x)^2 + ax \ln x + bx$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

ا/ عين العددين a و b حتى تكون الدالة h أصلية للدالة $2 - (\ln x)^2 + \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ و $x = \frac{1}{e}$.

و $x = e^2$.

انتهى الموضوع الأول.



الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

صندوقان U_1 و U_2 متماثلان غير شفافين يحتويان على كريات متماثلة لا يمكن التفريق بينها باللمس، حيث:
 يحتوي U_1 على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 1، 1، 1، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0، 1، 1.
 يحتوي U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 1، 1 وكريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0، 1.
 I/ نختار عشوائيا أحد الصندوقين: فإذا كان U_1 نسحب منه كريتين على التوالي دون إرجاع،
 وإذا كان U_2 نسحب منه كريتين على التوالي مع الإرجاع.

1/ أحسب احتمال الحدثين: A «الكريتين المسحوبتين من نفس اللون»
 B «الكريتين المسحوبتين تحملا من نفس الرقم»

2/ هل الحدثان A و B مستقلان؟ علّل.

3/ إذا علمت أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون، ما احتمال أن تكونا من الصندوق U_1 ؟

II/ نضع كريات كل من الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق آخر U_3 ، ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا كريتين في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المحصل عليهما.

1/ عين قيم المتغير العشوائي X .

2/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضيائي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب Z التالية: $(\bar{Z} + 3 + 2i)(Z^2 - 2Z + 5) = 0$

II/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقتها على الترتيب: $Z_A = 1 - 2i$ ، $Z_B = \bar{Z}_A$ ، $Z_C = -3 + 2i$ و $Z_D = -1$.

1/ أ/ أحسب $|Z_C - Z_D|$ ، $|Z_B - Z_D|$ ، $|Z_A - Z_D|$.

ب/ استنتج أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2/ أ/ أكتب العدد المركب: $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب/ استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة C بتحويل نقطي R يُطلب تعيين عناصره المميزة.

3/ أ/ عين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$.

ب/ بيّن أن الرباعي ABCG مربع.

4/ عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $|\bar{Z} + 1| = |iZ + 2 + 3i|$.

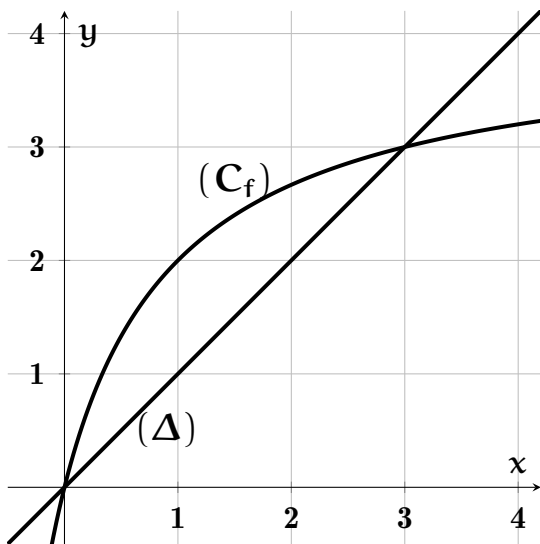
التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل أدناه؛ حيث (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.

ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.



2/ أ/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل موضحا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 3$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

4/ نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$.

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم أحسب v_0 .

ب/ أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_n}{u_n - 3} + \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 3} + \dots + \frac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ يمثل الجدول المقابل تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x - 2$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	—	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

1/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$.

2/ حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج حسب قيم

العدد الحقيقي x إشارة $g(-x)$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول: 2cm).

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب/ بيّن أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

2/ أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{g(-x)}{e^x}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بيّن أن: $f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha + 2}$ ثم استنتج حصراً لـ $f(-\alpha)$.

4/ أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (1-x)(1-e^{-x})$.

ب/ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (D) و (C_f) بدقة.

5/ ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x - 1 = (-1 + 2m + x)e^x$.

6/ أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن: $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

ب/ أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (D) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني.

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$= \frac{27}{80} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{3}{20}$$

$$= 1,6375 = \frac{27}{16}$$

$$E(2024X + 1447) \text{ استنتاج}$$

$$E(2024X + 1447)$$

$$= 2024E(X) + 1447$$

$$= 4860,5$$

$$P\left(\int_1^x \ln t dt\right) \text{ حساب احتمال}$$

$$\int_1^x \ln t dt = [t \ln t - t]_1^x$$

$$= x \ln x - x + 1$$

$$x \ln x - x + 1 < 1$$

$$x \ln x - x < 0$$

$$x > 0; x(\ln x - 1) < 0 \text{ يكافئ}$$

$$\ln x - 1 < 0$$

$$\ln x < 1$$

$$x < e$$

$$x \in \{1, 2\}$$

$$P\left(\int_1^x \ln t dt < 2\right) = P(x=1) + P(x=2) \text{ دحلته}$$

$$= \frac{63}{80}$$

الجواب الثاني

$$1 - \text{حل المعادلة } (1+2i)\bar{z} + 2-i = 0$$

$$(1+2i)\bar{z} = -2+i$$

$$\bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-2+4i+i+2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

$$z = -i \text{ 5 دهنه}$$

$$\text{الاختيار - ف}$$

مناقشة الكال، يا التجربة

الموضوع الاول

الجواب الاول

$$\text{لجنة لهما} \\ A_{16}^3 = 3360 \quad \begin{cases} 9H \\ 8+ \text{عبدالله} \end{cases} \quad \begin{cases} FF \\ 6+ \text{مطلوب} \end{cases}$$

أ. حساب الاحتمالات

"اللجنة تضم عبدالله"

$$P(A) = \frac{3 \times A_{16}^1 A_{15}^2}{A_{16}^3} = \frac{630}{3360} = \frac{3}{16}$$

"مناظرة كاتبة اللجنة"

$$P(B) = \frac{A_{16}^1 A_{15}^2}{3360} = \frac{210}{3360} = \frac{1}{16}$$

"اللجنة تضم إما فاضلة وإما عبدالله"

$$P(C) = \frac{3 \times (A_{16}^1 A_{15}^2 + A_{16}^1 A_{15}^2)}{3360} = \frac{13}{40}$$

"اللجنة تتكون من النساء والرجال"

$$P(D) = \frac{3 \times (A_9^2 A_7^1 + A_9^1 A_7^2)}{3360} = \frac{63}{80}$$

$$= 1 - P(D) = 1 - \frac{63}{80} = \frac{17}{80}$$

ب. المتغير العشوائي

$$FFF \rightarrow 0 \quad FHH \rightarrow 2$$

$$FFH \rightarrow 1 \quad HHH \rightarrow 3$$

$$X(2) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{A_7^3}{3360} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = 3 \times \frac{A_7^2 A_5^1}{3360} = \frac{27}{80}$$

$$P(X=2) = 3 \times \frac{A_7^1 A_5^2}{3360} = \frac{9}{20}$$

$$P(X=3) = \frac{A_5^3}{3360} = \frac{3}{80}$$

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{80}$

حساب التمام:

الجواب الثالث

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} \quad \text{1- يبين أنه :}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$$

2) البرهان بالتراجع أنه : $u_n - 1 > 0$
التحقق من صحة الخاصية الابتدائية :

$$u_0 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

ومنه الخاصية الابتدائية محققة

نفرض أن $u_n - 1 > 0$ من أجل n عدد صحيح
ونبرهن أن $u_{n+1} - 1 > 0$

$$\text{لدينا } u_n - 1 > 0 \text{ ، عليه } (u_n - 1)^2 > 0 \dots \text{ ①}$$

$$\text{لدينا } u_n > 1 \text{ ، منه } 2u_n - 1 > 0 \dots \text{ ②}$$

$$\text{من ① و ② نجد } \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} > 0 \text{ ، منه } u_{n+1} - 1 > 0$$

وعليه من أجل كل n من N فإن $u_n - 1 > 0$

3- المحاولة تغيير المتتالية :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} \end{aligned}$$

$$\text{لدينا } u_n - 1 > 0 \text{ ، منه } u_{n+1} - u_n < 0 \dots \text{ ①}$$

$$\text{②} \dots u_n > 0 \text{ ، منه } u_n - 1 > 0$$

$$\text{③} \dots 2u_n - 1 > 0$$

$$\text{وعليه } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ ، منه}$$

(u_n) متنازعة

(u_n) متنازعة ومحدودة من الأسفل فهي

متقاربة

2) تمثله للعدد المركب z

$$z = -3 \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

د مس $-\frac{\pi}{4}$ عمدة لـ

الختيار - ب -

$$L = \left(\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} \right)^{144\pi}$$

3

$$\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 2i - i}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 3i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$L = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^{144\pi} = e^{-i\frac{144\pi}{4}\pi}$$

$$= e^{-i(360\pi + \frac{5\pi}{4})}$$

$$= e^{-i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

الختيار - ج -

$$\frac{z_B}{z} = \frac{-i}{z} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i(\frac{\pi}{2} + \theta)} \quad (4)$$

الختيار - ج -

5) مجموعة النقط :

$$\arg(i2 - 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(i2 + i^2) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(i(2 - (-i))) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(i) + \arg(2 - z_B) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(2 - z_B) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(\vec{u}, \vec{BM}) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

ومنه المستقيم (BA) مارة بالنقطة B

الختيار - ب -

$$P_n = e^{\frac{\ln 3}{4}} \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right)$$

$$P_n = e^{\frac{\ln(3/4)}{4}} (2^{n+1} - 1)$$

الحل الرابع

I-1- لقراءة بيانيت: تحديد وضعية (3) بالسيئة (D)

x	0	1	+∞
الرمح السي	(3) (A)	(3) (P)	(3) (D)

2- استاج إشارة g(x)

$$g(x) = x - 1 + 2 \ln x = 2 \ln x - (-x + 1)$$

اعتقادا على الرمح البني (3), (D) فان:

x	0	1	+∞
g(x)	-	0	+

$$f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x \quad \text{II}$$

أ- حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln x} + \ln x - 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

و من 0 حادثة لستقيم مقارب عرود

2- بيان ان: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

$$f'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} = \frac{x + 2 \ln x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

استاج اشارة f(x) من اشارة g(x)

و عليه f مناقصة على [0, 1] و متزايدة على [1, +∞] من اجل تغييراتها

x	0	1	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)	+∞	-1	+∞

3- بيان ان f(x) = 0 قبل حلين α, β

على المجال [0, 1] f متصو و مناقصة فاما على [1, +∞] فهي كذلك على [0, 1] و [1, +∞] لدينا

$$f(0.4) = 0.16 \quad f(0.5) = -0.33 \quad f(0.6) = 0.16$$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة الفاصل (0.4, 0.5) و (0.5, 0.6) فيها

نقبل حلين α حيث 0.4 < α < 0.5 و β حيث 0.5 < β < 0.6

$$v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

1- اثبات ان (v_n) هندسية أساسها q=2

$$v_{n+1} = 2v_n$$

$$v_{n+1} = \ln \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \ln \left(1 - \frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}} \right)$$

$$= \ln \left(1 - \frac{2u_n - 1}{u_n^2} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2} \right)$$

$$= \ln \left(\left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right)^2 \right) = 2 \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

$$= 2v_n$$

و من (v_n) هندسية أساسها q=2

$$v_0 = \ln \left(1 - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{3}{4} \right)$$

استاج v_n > v_{n+1}

$$v_n = v_0 \times q^n = \ln \left(\frac{3}{4} \right) \times 2^n = \ln \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}$$

$$v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

$$1 - \frac{1}{u_n} = e^{v_n}$$

$$\frac{1}{u_n} = 1 - e^{v_n} = 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}$$

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}}$$

النهايات

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}} = 1$$

الحل الخامس

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{u_0} \right) \left(1 - \frac{1}{u_1} \right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

$$1 - \frac{1}{u_n} = e^{v_n}$$

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

الإشارة

على المجال $[1, +\infty[$ ، f معرفة ومتزايدة على $[1, +\infty[$ ،
 فنيًا ذلك على $(2, 1, 1, 2)$ ، $f(2, 1) = 0, 03$ ، $f(2, 2) = -0, 09$ ،
 ومنه $f(2, 1) f(2, 2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيمة
 المتوسطة $f(x) = 0$ قبل $x = 2$ ، وبما $2, 1 < 2, 2$ ،
 4- دراسة ودرجات (f) سالبة لـ (b)

$$f(x) = y = x - 2 + (\ln x)^2 \cdot \ln(x) - x$$

$$= (\ln x)^2 \cdot \ln x - 2$$

بوضع $\ln x = y$ نجد $y^2 - y - 2 = 0$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

ومنه $y = -1$ أو $y = 2$ ، وعليه

$x = e^{-1}$ أو $x = e^2$ ، ومنه

x	0	e^{-1}	e^2	$+\infty$
$f(x, y)$	+	-	-	+
(f)	(f)	(f)	(f)	(f)
(f')	(f')	(f')	(f')	(f')

5- بيان أن (f) قبل تكافؤا متزايدا (D).

$f'(x) = 1$ ، ومنه $g(x) = x$ أو

$2 \ln x = 1$ ، ومنه $2 \ln x + x - 1 = x$

$x = e^{1/2}$

$f'(e^{1/2}) = 1$

$f(e^{1/2}) = e^{1/2} - 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} + e^{1/2}$

(1) $y = (x - e^{1/2}) + e^{1/2} - \frac{9}{4}$

$= x - \frac{9}{4}$

البيان

$f(x) = x - m$ ، فنيًا فواصل نفي تقاطع (f) مع المستقيم

ذو المعادلة $y = x - m$

$-m < -\frac{9}{4}$ أو $m > \frac{9}{4}$ لا توجد حلول.

$-m = -\frac{9}{4}$ أو $m = \frac{9}{4}$ يوجد حل.

$-m > -\frac{9}{4}$ أو $m < \frac{9}{4}$ يوجد حلان متباينان.

(7) $h(x) = -x(\ln x)^2 + a \ln x + b x$

إيجاد a, b بحيث h دالة أصلية لـ (a)

$x \rightarrow e(\ln x)^2 + \ln x$

$h'(x) = -(\ln x)^2 \cdot 2 \ln x + a \ln x + a + b$

$= -(\ln x)^2 + (a - 2) \ln x + a + b$

$\begin{cases} a - 2 = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$ ، ومنه

$$P(X=4) = \frac{C_2^4}{C_{13}^4} = \frac{1}{78}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

حساب التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = \frac{24}{13} = 1,846 = \frac{144}{78}$$

التحليل الثاني

$$(\bar{z} + 3 + 2i)(z^2 - 2z + 5) = 0 \quad I$$

ومن $z^2 - 2z + 5 = 0$ أو $\bar{z} + 3 + 2i = 0$

$\bar{z} = -3 - 2i$ ومنه $z = -3 + 2i$

حساب التميز $\Delta = 4 - 20 = -16$

$$z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 1 + 2i$$

$z_c = -3 + 2i$ ، $z_b = 1 + 2i$ ، $z_a = 1 - 2i$ (II)

$z_0 = -1$

1. حساب $|z_c - z_0|$ ، $|z_b - z_0|$ ، $|z_a - z_0|$

$$|z_a - z_0| = |1 - 2i + 1| = |2 - 2i| = \sqrt{8}$$

$$|z_b - z_0| = |1 + 2i + 1| = |2 + 2i| = \sqrt{8}$$

$$|z_c - z_0| = |-3 + 2i + 1| = |-2 + 2i| = \sqrt{8}$$

ب) لدينا $AD = BD = CD$ وعليه A ، B ، C

تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D ، نصف قطرها $r = \sqrt{3}$

ج. كتابة $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_0}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_0} = \frac{1 - 2i - 1 - 2i}{-3 + 2i - 1 - 2i} = \frac{-4i}{-4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_0} \right| = 1$ وعليه المثلث ABC

مقام في B ، ومساوي الساقين $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_0}\right) = \frac{\pi}{2}$

د) استنتاج أن A صورة C بتحويل R

$$\frac{z_A - z_0}{z_C - z_0} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومن $z_A - z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_0)$

الموضوع الثاني
البيان الأول

$$\begin{array}{c|c} R_1 R_2 & R_2 \\ \hline V_0 & V_2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} R_0 R_1 R_2 & R_2 \\ \hline V_0 & V_1 V_2 \end{array}$$

$U_2 \qquad U_3$

1- حساب احتمال الحادتين A و B

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2} + \frac{3^2 + 2^2}{5^2} \right) = \frac{689}{1400}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_5^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} \right) = \frac{583}{1400}$$

2- البحث في استقلال الحادتين

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} \right) = \frac{37}{175}$$

ولدينا : $P(A) \times P(B) = \frac{401689}{1960000} \neq P(A \cap B)$

ومنه الحادتين A و B غير مستقلتين

3- الحادتين المسحوقتين من لونين مختلفين حساب $P_A(U_2)$

$$P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times 2A_3^1 A_5^1}{1 - P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{711}{1400}}$$

II المتغير العشوائي

قيم المتغير العشوائي

الحالات هي : 4, 3, 2, 1, 0	$0+0 \rightarrow 0$
	$0+1 \rightarrow 1$
	$0+2 \rightarrow 2$
	$1+1 \rightarrow 2$
	$1+2 \rightarrow 3$

قانون المتغير العشوائي

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{3}{78}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_{13}^2} = \frac{24}{78}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^1 + C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{34}{78}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^0 C_2^2}{C_{13}^2} = \frac{16}{78}$$

د منه A هورة c بالدران الذي مركزه B و زاوية $\frac{\pi}{2}$.

3/ تعيين z_c

$$z_c = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = 1 - 2i - 1 - 2i - 3 + 2i = -3 - 2i = \bar{z}_c$$

بيان ان الرباعي ABCG مربع.

لدينا $z_G = \bar{z}_c$ وعليه $BC = AG$

و $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$ د منه الرباعي ABCG مربع

4/ مجموعة النقط

$$|\bar{z} + 1| = |iz + 2 + 3i|$$

$$|\bar{z} + 1| = |iz^2 - 2iz^2 + 3i|$$

$$|\bar{z} + 1| = |iz(2 + 3 - 2i)|$$

$$|2 - (-1)| = |iz||2 - (-3 + 2i)|$$

$$|2 - 2i| = |z \cdot 2i|$$

$$DM = CM$$

د منه مجموعة النقط هي المستقيم المحوري

للقطعة [DC]

التمرين الثالث

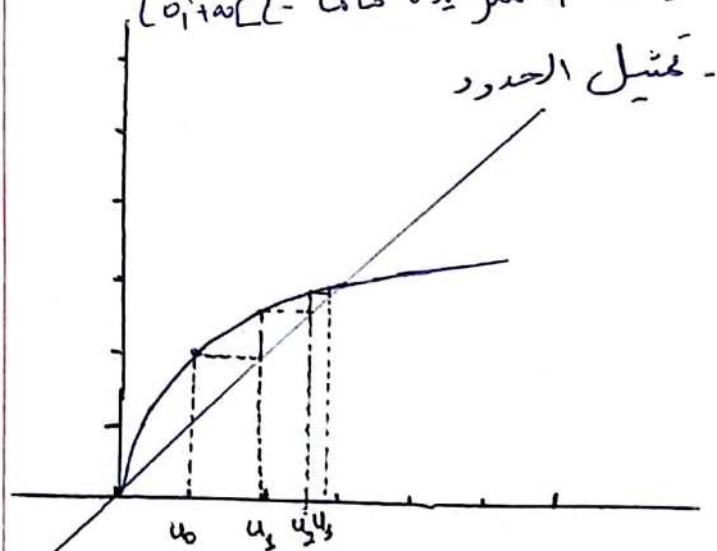
$$f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$$

1. بيان ان f متزايدة تما

$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

د منه f متزايدة تما $[0; +\infty[$

2. تمثيل الحدود



ب) التخصيص

$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ و منه (u_n) متزايدة والمسافة بين الحدود تتناقص فهي متقاربة.

3. البرهان بالتراجع ان $0 < u_n < 3$

نسمى $P(n)$ الخاصية "من اجل كل n من N : $0 < u_n < 3$ "
التحقق من صحة الخاصية $P(0)$

من اجل $n=0$: $u_0 = 1 < 3$ و $0 < u_0$ صحيحة.

نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن $P(n+1)$

نفرض ان $0 < u_n < 3$

ولدينا f متزايدة ومنت $f(0) < f(u_n) < f(3)$

$$0 < u_{n+1} < 3$$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة

ن - دراسة اتجاه تغير المتسلسلة (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - u_n}{u_n + 1}$$

$$= \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 1}$$

$$0 < u_n < 3 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < u_n$$

$$u_n < u_{n+1} < 1 \dots \dots \dots$$

$$0 < u_n < 3 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 3 - u_n < 3 \dots \dots \dots$$

من ① و ② و ③ فان $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه (u_n) متزايدة.

التقارب

(u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى فهي متقاربة

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n} \quad (4)$$

بيان ان (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{4}$.

$$v_{n+1} = 9 \cdot v_n$$

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{4u_n}{u_n + 1}}$$

$$= 1 - \frac{(u_n + 1)3}{4u_n}$$

$$= \frac{u_n - 3}{4u_n} = \frac{1}{4} v_n$$

و منه (v_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{4}$ حد ص

$$v_0 = -2 \quad v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$$

$$v_n = v_0 q^n = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{عبارة } v_n :$$

إشارة $g(x)$ $g(x) > 0$ يكافئ $-x < \alpha$ و $-x > -\alpha$ و $x > -\alpha$ و $x < \alpha$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$$f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x} \quad \text{II}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x e^x + x - 1}{e^x} = -\infty$$

(ف) نبيان أن $y = -x + 1$ مقارب لـ $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x} = 0$$

و منه (D) مقارب لـ $f(x)$ عند $+\infty$ دراسة الوضعية

$$e^x > 0 \text{ لدينا } f(x) - y = \frac{x-1}{e^x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(ف) تحت (D)	(ف) فوق (D)	(ف) فوق (D)

2- حساب $f'(x)$

$$f'(x) = -1 + e^{-x} - e^x(x-1)$$

$$= -e^{-x}(e^x + x - 2)$$

$$= -\frac{g(-x)}{e^x}$$

(ب) دراسة اتجاه التغير

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$		-	+
$f'(x)$	+	0	-

and, $e^{\pi} > 0$

و عليه f متزايدة تمامًا مع $[-\alpha; +\infty[$ و متزايدة تمامًا مع $] -\infty; -\alpha]$ جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{matrix} + & 0 & - \end{matrix}$	
$f(x)$		$f(-\alpha)$	

Diagram illustrating the behavior of the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ near the critical point $x = -\alpha$:

- As $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.
- At $x = -\alpha$, $f'(x) = 0$ (critical point).
- As $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.

عبارة u_n لدينا $u_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

$$\frac{3}{u_n} = 1 - u_n$$

$$u_n = \frac{3}{1 - u_n} = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n}$$

لها نهاية u_n $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{u}\right)^n} = \frac{3}{1} = 3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u}\right)^n = 0 \text{ لأن}$$

3- حساب المجموع $S_n = \frac{u_n}{u_n - 3} + \dots + \frac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}$

لدينا

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

$$\frac{1}{v_n} = \frac{u_n}{u_n - 3}$$

و منه $S_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_{n+1}} + \dots + \frac{1}{v_{n+2024}}$

$$S_n = \frac{1}{v_n} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{2025}}{1 - \frac{1}{9}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times 4^n \left(\frac{1 - 4^{2025}}{-3} \right)$$

$$= \frac{4^n}{6} (1 - 4^{2025})$$

الحولان الرابع

$$g(x) = e^{-x} - x - 2$$

1- ببيان أن $g(x) = 0$ قابل حلاً وسيماً α $0.4 < \alpha < 0.5$

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها متزايدة و متناقصة مع R فهي متزايدة و متناقصة مع $[-0.5; -0.4]$ و لدينا $g(-0.5) =$ ، $g(-0.4) =$

$$g(-0.5) = 0.0821 \text{ ، } g(-0.4) = 0.0018$$

$$\text{و منه } g(-0.5) \times g(-0.4) < 0$$

مبرهنة القيمة المتوسطة $g(\alpha) = 0$ قابل حلاً وسيماً

$$\alpha \text{ حيث } -0.5 < \alpha < -0.4$$

إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$\begin{matrix} + & 0 & - \end{matrix}$	

(5) المساحة المستوية

$$x-1 = (-1+2m+x)e^x \text{ و منه}$$

$$\frac{x-1}{e^x} = -1+x+2m \text{ و منه}$$

$$F(m) = 2m \text{ و عليه } 1-x+\frac{x-1}{e^x} = 2m$$

هنا خواص نقط تقاطع (f) مع المستقيم $y=2m$

$$2m = f(-\alpha) \text{ و منه } m = \frac{f(-\alpha)}{2} \text{ يوجد حل موجب}$$

$$2m > f(-\alpha) \text{ و منه } m > \frac{f(-\alpha)}{2} \text{ لا يوجد حلول}$$

$$2m = 0 \text{ و منه } m = 0 \text{ يوجد حلان}$$

أما فيما موجب، الآخر سالب

$$0 < m < \frac{f(-\alpha)}{2} \text{ يوجد حلان موجبان}$$

$$m < 0 \text{ يوجد حلان مختلفان في}$$

الاتجاه

$$I = \int_0^1 m e^x dx \text{ 6. التكامل بالتجزئة}$$

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$I = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx$$

$$= [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^1$$

$$= (-1 e^{-1} - e^{-1}) - (-1)$$

$$= 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

(ب) حساب المساحة (D)، (f)، $x=1$ ، $x=0$

(f) تحت (D)، عليه:

$$S = -2 \times 2 \int_0^1 (f(x) - y) dx$$

$$= -4 \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx \text{ cm}^2$$

$$= -4 \left[\int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 -e^{-x} dx \right] \text{ cm}^2$$

$$= -4 \left[\left(1 - \frac{2}{e} \right) + [e^{-x}]_0^1 \right] \text{ cm}^2$$

$$= -4 \left(1 - \frac{2}{e} + e^{-1} - 1 \right) \text{ cm}^2$$

$$= \frac{4}{e} \text{ cm}^2$$

1

$$3. \text{ بيان أن: } f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha+2}$$

$$f(-\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha+1}{e^{-\alpha}}$$

$$\text{ولنا } f(\alpha) = 0 \text{ و منه } e^{-\alpha} - \alpha - 2 = 0$$

$$f(-\alpha) = 1 + \alpha + \frac{-\alpha+1}{\alpha+2} \text{ و منه } e^{-\alpha} = \alpha + 2$$

$$= \alpha + \frac{\alpha+1-\alpha+1}{\alpha+2} = \alpha + \frac{1}{\alpha+2}$$

استنتاج صيغة f(-\alpha)

$$1.5 < \alpha + 2 < 4.6 \text{ و منه } -0.5 < \alpha < -0.4$$

$$\text{و منه } \frac{1}{1.6} < \frac{1}{\alpha+2} < \frac{1}{1.5}$$

$$0.625 < \frac{1}{\alpha+2} < 0.67 \text{ (2) ...}$$

بجمع (1) و (2)

$$0.125 < f(\alpha) < 0.47$$

$$4. \text{ بيان أن: } f(x) = (1-x)(1-e^{-x})$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$$

$$= 1 - x + (x-1)e^{-x}$$

$$= (1-x)(1-e^{-x})$$

(ب) تعيين نقط تقاطع (f) مع المحاور

$$f(x) = 0 \text{ و منه } (1-x)(1-e^{-x}) = 0$$

$$1-x=0 \text{ او } 1-e^{-x}=0 \text{ و عليه}$$

$$x=1 \text{ او } x=0 \text{ و منه (f) يتقاطع}$$

مع المحاور في النقطتين (0,0) و (1,0)

انشاء (D) و (f)

$$f(-1) = -3.4$$

