الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سعيدة — العام الدراسي 2024/2023

ثانوية الشهيد توهامي مصطفى — المستوى: 3ع ت

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات — المدة: 3 ساعات

التمرين الأول (6 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح فقط بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ؛ عينه مع التعليل :

1 -) من أجل كل عدد طبيع غير معدوم n قسمة A حيث: $A=1+\ln(2e)+\ln(3e)+...+\ln(n.e)$ هي :

(أ) $n+\ln(n!)$ (ب) $n-\ln(n!)$ (جـ) $n!+\ln(n)$

2 -) β عدد حقيقي . تكون الأعداد $2e^{\beta}$ ؛ $2+e^{\beta}$ و $e^{\beta}+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة من متتالية هندسية من أجل :

(أ) $\beta=\ln(\sqrt{5}-1)$ (ب) $\beta=0$ (جـ) $\beta=\ln(\sqrt{5}+1)$

3 -)نعتبر المعادلة التفاضلية $(-y'+2y-2=0)$ الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $y(0)=2023$ هو

(أ) $y=2022e^{-2x}+1$ (ب) $y=-2022e^{2x}+1$ (جـ) $y=2022e^{2x}+1$

4 -) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}\ln x.dx$.

نضع : $S=u_1+u_2+...+u_{44}$. قيمة S هي :

(أ) 2023 (ب) 1445 (جـ) 2024

5 -) α و β عددان حقيقيان. X متغير عشوائي قانون احتماله موزع كما يلي :

قيمتي α و β التي من اجلهما يكون الأمل الرياضياتي $E(X)=\frac{23}{10}$ هي :

(أ) $\alpha=\frac{2}{10}$ و $\beta=\frac{3}{10}$ (ب) $\alpha=\beta=\frac{1}{4}$ (جـ) $\alpha=\frac{3}{10}$ و $\beta=\frac{2}{10}$

التمرين الثاني (6 نقاط)

I – نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=3u_n-2n+3$$

1 -) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq n$.ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

2-)بين أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

II – لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_n-n+1$

1 -) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2 -)أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n .

3 -) احسب المجموعين S_n و T_n بدلالة n حيث :

$$S_n=v_0^2+v_1^2+...v_{n-1}^2 \quad \text{و} \quad T_n=(u_0)^2+(u_1-1)^2+(u_2-2)^2+...+(u_n-n)^2$$

إعداد الأستاذ: ع - شيخ

التمرين الثالث (8 نقاط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+(x-1)\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1 -) – أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة كل من $\ln(x)$ و $\frac{x-1}{x}$

- ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $\frac{x-1}{x}+\ln(x)$.

2 -) – أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 -) لتكن h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x-2+\ln(x)$

- أ) بين أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

- ب) بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<1,6$ ثم بين أنّ $\ln(\alpha)=2-\alpha$

- جـ) بين أنّ $y=\left(\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}\right)x$ معادلة لـ (T) مماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α

4 -) أنشئ (T) و (C_f) على المجال $]0.4[$ نأخذ $\left(\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}\right)\approx 0,8$

5 -) – أ) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $f(x)-x=(x-1)(-1+\ln x)$

- ب) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة الفرق $f(x)-x$.

6 -) k الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $k(x)=-\frac{3}{4}x^2+2x+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x$

- أ) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $k'(x)=f(x)-x$

- ب) أحسب μ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=x$ ؛ $x=1$ و $x=e$

7 -) g الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x+1)\ln(x+2)$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$: $g(x)=f(x+2)-1$.

- ب) استنتج أن (C_g) صورة (C_f) بتحويل نقطي يطلب تحديده (لا يطلب إنشاء (C_g))

إعداد الأستاذ : ع – شيخ

إنتهى الموضوع

الحل المفصّل

التمرين الأوّل "

تعيين الجواب الصحيح في كل حالة:

1 -) لدينا :

$$A=1+\ln(2e)+\ln(3e)+...+\ln(ne)$$
$$=\ln(e)+\ln(2e)+\ln(3e)+...+\ln(ne)$$
$$=\ln(e\times 2e\times 3e\times...\times ne)$$

أي $A=\ln\left[\underbrace{(e\times e\times...\times e)}_{n\text{ عاملا}}(1\times 2\times 3\times...\times n)\right]$

ومنه $A=\ln(e^n)+\ln(1\times 2\times 3\times...\times n)$

اي $A=n+\ln(n!)$

الجواب الصحيح هو الجواب (أ)

2 -) تكون الأعداد $2e^{\beta}$ ؛ $2+e^{\beta}$ و $e^{\beta}+1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة من متتالية هندسية معناه $2+e^{\beta}$ وسط هندسي للعددين $2e^{\beta}$ و $e^{\beta}+1$

وبالتالي : $\left(2+e^{\beta}\right)^2=\left(2e^{\beta}\right)\left(e^{\beta}+1\right)$ ... (1)

(1) تكافئ : $e^{2\beta}-2e^{\beta}-4=0$

أي $\left(e^{\beta}\right)^2-2e^{\beta}-4=0$

بوضع $e^{\beta}=x$ حيث $x>0$ نحصل على المعادلة المساعدة : $x^2-2x-4=0$

مميزها $\Delta=20$

لهذه المعادلة حلان في $\mathbb{R}$ هما :

$$x_1=\frac{2+2\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}>0$$
$$x_2=\frac{2-2\sqrt{5}}{2}=1-\sqrt{5}<0$$

ما سبق ينتج : $e^{\beta}=1+\sqrt{5}$ معناه $\beta=\ln\left(1+\sqrt{5}\right)$

الجواب الصحيح هو الجواب (جـ)

3 -) $-y'+2y-2=0$ يكافئ $y'=2y-2$

المعادلة التفاضلية المعطاة هي إذا من الشكل $y'=ay+b$

مجموعة الحلول هي إذا الدوال y حيث :

$$y=ce^{ax}-\frac{b}{a};c\in\mathbb{R}$$ أي $y=ce^{2x}+1$

ثمّ : $y(0)=2023$ معناه $ce^0+1=2023$

معناه $c=2002$

الحل الخاص هو إذا : $y=$ $y=2022e^{2x}+1$

الجواب الصحيح هو الجواب (جـ)

4-) $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}\ln x.dx$

الدالة $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$ هي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x}\ln x$ وبالتالي :

نجد $u_n=\left[\ln^2 x\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$

$$=\left[\ln(e^{n+1})\right]^2-\left[\ln(e^n)\right]^2$$

$u_n=2n+1$ حيث $n\in\mathbb{N}$

المتتالية (u_n) هي إذا متتالية الأعداد الفردية أي متتالية حسابة أساسها2

المجموع S هو مجموع 44 حدا الأولى . ومنه :

$$S=\frac{44}{2}(u_1+u_{44})=22(3+89)$$

أي $S=2024$

الجواب الصحيح هو الجواب (جـ).

5 -) لدينا الجملة

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{1}{2}...(1)\\ \alpha+2\beta=\frac{8}{10}...(2)\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\alpha+\beta+\frac{1}{2}=1\\ 1(\alpha)+2\beta+\frac{3}{2}=\frac{23}{10}\end{cases}$$

بطرح (1) من (2) : $\beta=\frac{8}{10}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

من (1) وبتعويض β $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{2}{10}$

الجواب الصحيح هو الجواب (أ)

التمرين الثاني :

$I-$) 1 -) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq n$. ثم نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

◄ نستعمل مبدأ الاستدلال بالتراجع

نضع $P(n):u_n\geq n$; $n\in\mathbb{N}$

* نتحقق منصحة $P(0)$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ اي $u_0\geq 0$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

**نفرض أنه عند رتبة n ؛ $P(n)$ صحيحة(أي نفرض أن $u_n \geq n$) ونبين أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبين أنّ $u_{n+1} \geq n+1$

لدينا :
$$u_{n+1}-(n+1)=3u_n-2n+3-n-1$$
$$=3u_n-3n+2$$
$$=3(u_n-n)+2$$

حسب فرضية التراجع $u_n \geq n$ ومنه $u_n-n \geq 0$

ينتج عن هذا $3(u_n-n)+2 \geq 0$

اي $u_{n+1} \geq (n+1)$: $P(n+1)$ صحيحة

** مما سبق وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq n$

◄ لدينا $\begin{cases} u_n \geq n \\ \lim\limits_{x\to\infty} n=+\infty \end{cases}$ حسب مبرهنة الحد من الأسفل : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=+\infty$

2-)نبين أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

نبين ما يلي :من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n>0$

$$u_{n+1}-u_n=2u_n-2n+3$$
$$=2(u_n-2)+3$$

ومنه $2(u_n-n) \geq 0$ $2(u_n-n)+3 \geq 3>0$

إذا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متتالية متزايدة تماما في $\mathbb{N}$ 1

$II-$) 1 -) نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

من أجل كل عدد طبيعي n :
$$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)+1$$
$$=3u_n-2n+3-n-1+1$$
$$=3u_n-3n-3$$

اي $v_{n+1}=3(u_n-n+1)$
$$=3v_n$$

(v_n) هي إذا متتالية هندسية أساسها $q=3$

وحدها الأول $v_0=1$.

2 -)نكتب عبارة (v_n) بدلالة n ثم نستنتج عبارة (u_n).

◄عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (v_n) معطاة بالعلاقة : $v_n=v_0\times q^n$,$n\in\mathbb{N}$

بالتعويض يكون : $v_n=3^n, n\in\mathbb{N}$

◄من العلاقة : $v_n=u_n-n+1$ نجد $u_n=v_n+n-1$

وبتعويض v_n : $u_n=3^n+n-1$

3 -) حساب المجموعين S_n و T_n بدلالة n حيث :

$S_n=v_0^2+v_1^2+\ldots v_{n-1}^2$ و

$T_n=(u_0)^2+(u_1-1)^2+(u_2-2)^2+\ldots+(u_n-n)^2$

◄ S_n هو مجموع مربعات n حدا الأولى من المتتالية الهندسية (v_n)

نعلم ما يلي :

$v_{n-1}=v_0q^{n-1}$ ؛. . . ؛ $v_2=v_0q^2$ ؛ $v_1=v_0q$

وفي هذه الحالة :
$$S_n=(v_0)^2+(v_0q)^2+(v_0q^2)^2+\ldots+(v_0q^{n-1})^2$$
$$=v_0^2\left(1+q^2+q^4+q^6+\ldots+q^{2(n-1)}\right)$$

المجموع $\left(1+q^2+q^4+q^6+\ldots+q^{2(n-1)}\right)$ هو مجموع n حدا متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q^2 وحدها الأول 1. وبالتالي :

$$1+q^2+q^4+\ldots+q^{2(n-1)}=1\times\left[\frac{(q^2)^n-1}{(q)^2-1}\right]$$
$$=\frac{(3^2)^n-1}{3^2-1}$$

ويكون : $S_n=\frac{9^n-1}{8}$.

◄ T_n هو مجموع $(n+1)$ حدا

لدينا : $u_n=v_n+n-1$ وبالتالي :

$u_0=v_0-1$ ؛ $u_1-1=v_1-1$ ؛ $u_2-2=v_2-1$ ؛ ...

$u_n-n=v_n-n$ ؛ ... .

في هذه الحالة :
$$T_n=(v_0-1)^2+(v_1-1)^2+(v_2-1)^2+\ldots+(v_n-1)^2$$
$$T_n=\left[\left(v_0^2+v_1^2+\ldots+v_{n-1}^2\right)+v_n^2\right]+(1+1+1+\ldots+1)$$
$$-2(v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n)$$
$$T_n=S_n+v_n+(n+1)(1)-2(v_0+v_1+\ldots+v_n)$$

لدينا :

وعليه : $\begin{cases} S_n=\frac{9^n-1}{8} \\ v_n=3^n \\ v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n=\frac{3^{n+1}-1}{2} \end{cases}$

إعداد الأستاذ : ن ع – شيخ

$$T_n=\frac{9^n-1}{8}+3^{2n}+(n+1)-2\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

أي : $T_n=\frac{9^n-1}{8}+(n+2)+3^n\left(3^n-3\right)$

التمرين الثالث :

1 -) – أ)ندرس حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة كل من $\ln(x)$ و $\frac{x-1}{x}$

◄إشارة $\ln x$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

◄إشارة $\frac{x-1}{x}$ من إشارة $(x-1)$ وهي كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{x}$	‖	$-$	0	$+$	

- ب) نستنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $\frac{x-1}{x}+\ln(x)$.

لدينا ما يلي وحسب ما سبق :

◄من أجل كل x من المجال $]0;1[$:

$$\frac{x-1}{x}+\ln x<0 \text{ ومنه } \begin{cases}\ln x<0\\ \frac{x-1}{x}<0\end{cases}$$

◄من أجل $x=1$

$$\frac{x-1}{x}+\ln x=0 \text{ ومنه } \begin{cases}\frac{x-1}{x}=0\\ \ln x=0\end{cases}$$

◄من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$:

$$\frac{x-1}{x}+\ln x>0 \text{ : وعليه } \begin{cases}\frac{x-1}{x}>0\\ \ln x>0\end{cases}$$

يمكن تلخيص هذه الاشارة في الجدول الموالي :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{x-1}{x}+\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

2 -) – أ) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

◄ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$; $(x-1\to -1;\ln x\to-\infty)$

◄ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $(x-1\to+\infty;\ln x\to+\infty)$

3 -) - أ) نبين أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$$

وبالتالي h دالة متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

- ب) نبين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<1,6$ ثم نبين أنّ $\ln(\alpha)=2-\alpha$

◄الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]0;+\infty[h=]-\infty;+\infty[$. إذا :

المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

◄حصر α

لدينا : $h(1,5)\approx-0,09$ ؛ $h(\alpha)=0$ و $h(1,6)\approx 0,07$

نلاحظ أنّ: $h(1,5)<h(\alpha)<h(1,6)$

وبما أنّ h متزايدة تماما فهي تحفظ الترتيب وعليه :

$$1,5<\alpha<1,6$$

◄لدينا : $h(\alpha)=0$ معناه $\alpha-2+\ln\alpha=0$

معناه $\ln\alpha=2-\alpha$

- جـ) نبين أنّ $y=\left(\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}\right)x$ معادلة لـ (T) مماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α

معادلة (T) معطاة بالعلاقة :

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

◄ إذا : $f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x$

$$f'(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}+\ln\alpha \quad ;\ln\alpha=2-\alpha$$
$$=\frac{\alpha-1}{\alpha}+2-\alpha$$
$$=\frac{\alpha-1+2\alpha-\alpha^2}{\alpha}$$

أي : $f'(\alpha)=\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}$

ثمّ: $f(\alpha)=1+(\alpha-1)\ln\alpha$ أي $=1+(\alpha-1)(2-\alpha)$

$$f(\alpha)=-\alpha^2+3\alpha-1$$

في هذه الحالة يكون :

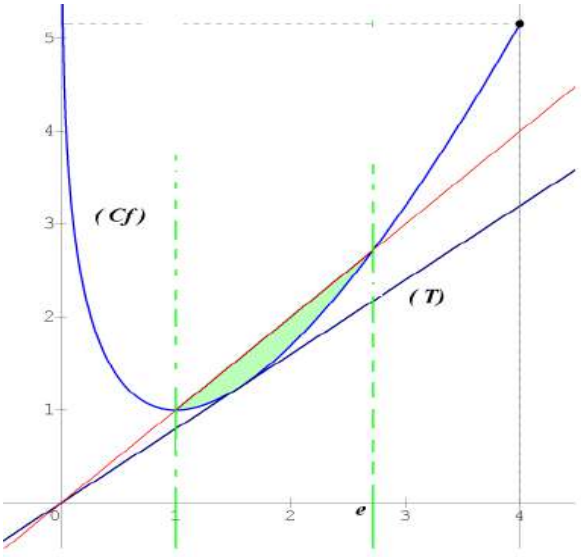
$$(T): y=\left(\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}\right)(x-\alpha)+\left(-\alpha^2+3\alpha-1\right)$$

$$=\left(\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}\right)x+\alpha^2-3\alpha+1-\alpha^2+3\alpha-1$$

أي : $(T): y=\left(\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}\right)x$

4 -) ننشئ (T) و (C_f) على المجال $[0.4]$

نأخذ $\left(\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}\right)\approx 0,8$



5 -) – أ) نبين أنه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $f(x)-x=(x-1)(-1+\ln x)$

$$f(x)-x=1+(x-1)\ln x-x$$
$$=(x-1)\ln x-(x-1)$$

اي : $f(x)-x=(x-1)(-1+\ln x)$

- ب) ندرس حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة الفرق $f(x)-x$.

إشارة $f(x)-x$ من إشارة الجداء $(x-1)(-1+\ln x)$

◄لتعيين إشارة $(-1+\ln x)$ نحل (مثلا) في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة $(-1+\ln x\geq 0)$

$-1+\ln x\geq 0$ معناه $\ln x\leq -1$

معناه $x\leq e^{-1}$

◄إشارة الفرق ملخصة في الجدول أسفله :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$-1+\ln x$	‖	+	0	−		−	
$x-1$	‖	−		−	0	+	
$f(x)-x$	‖	−	0	+	0	−	

6 -) - أ) نبين أنه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $k'(x)=f(x)-x$

$$k'(x)=-\frac{3}{2}x+2+(x-1)\ln x+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)$$
$$=-\frac{3}{2}x+2+(x-1)\ln x+\frac{1}{2}x-1$$
$$=(x-1)\ln x-(x-1)$$

اي $k'(x)=(x-1)(-1+\ln x)$
$=f(x)-x$

- ب) نحسب μ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=x$ ؛ $x=1$ و $x=e$

على المجال $[1;e]$ ؛ وحسب ما سبق (C_f) أسفل المستقيم الذي معادلته $y=x$ $(f(x)-x<0)$

وعليه : $\mu=\int_e^1\left(f(x)-x\right)dx.u.a$

الدالة k دالة أصلية للدالة $x\mapsto f(x)-x$.ومنه

$$\mu=\left[k(x)\right]_e^1 u.a=\left[k(1)-k(e)\right]u.a$$

$u.a=4cm^2$ و $\begin{cases}k(1)=\frac{5}{4}\\ k(e)=\frac{4e-e^2}{4}\end{cases}$

وعليه :

$$\mu=\left[\left(\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{4e-e^2}{4}\right)\right]\times 4cm^2=(5+e^2-e)cm^2$$

7 -) - أ) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;+\infty[$: $g(x)=f(x+2)-1$.

لدينا : $f(x+2)-1=1+\left[(x+2)-1\right]\ln(x+2)-1$
$=(x+1)\ln(x+2)$

اي $f(x+2)-1=g(x)$

- ب) استنتاج أن (C_g) صورة (C_f) بتحويل نقطي يطلب تحديده

الدالة g دالة مرفقة بالدالة f حيث لدينا :

$g(x)=f(x+2)-1$ وبالتالي :

(C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعة الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}=-2\vec{i}-\vec{j}$