

وزارة التربية الوطنية.	إختبار	مديرية التربية لولاية قسنطينة.
ثانوية الصادق مخلوف عين اسمارة.	الفصل الثاني	المستوى : 3 علوم تجريبية.
الاثنين 04 مارس 2024.	في مادة الرياضيات.	المدة : ساعتان.

تمرين 01 (5 نقاط)

تكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 3 + (x + 1)^2 e^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. نعتبر G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

• تحقق أن الدالة G دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

2. نضع : $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$ و $J = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $J = 2I - e^{-1}$.

(ب) أحسب قيمة I ، ثم إستنتج قيمة J .

3. (أ) بالاستعانة بنتائج السؤال (2-ب)، أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A = \int_0^1 (x + 1)^2 e^{-x} dx$.

(ب) فسر النتيجة هندسيا.

تمرين 02 (7 نقاط)

تكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = -\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 1$.

1. (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq -\frac{3}{2}$.

(ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم إستنتج أنها متقاربة.

(ج) أحسب نهاية المتتالية (U_n) .

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$.

تكن (V_n) المتتالية المعرفة بـ : $V_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $V_{n+1} = V_n + U_n + \frac{3}{2}$.

1. بين أن المتتالية (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$.

(ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = -\frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ، ثم إستنتج أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\ln\left(\frac{2}{3}V_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}V_1 + 1\right) + \dots + \ln\left(\frac{2}{3}V_n + 1\right) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

إقلب الصفحة .

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 (أ) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

(ب) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{(x-1) \ln x}{x}$.

(ب) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$ فإن $(x-1) \ln x \geq 0$ ، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4 نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = f(x) - x + 1$ ، و جدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(أ) أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x > 0$.

(ب) إستنتج أن النقطة $A(1; 0)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

(ج) بين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$

حلاً وحيداً α حيث : $3,3 < \alpha < 3,4$.

5 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ يقطع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α .

6 أنشئ كلا من (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .

7 نسمي A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما :

$$x = e \text{ و } x = 1$$

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بين أن : $\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

(ب) بين أن الدالة : $x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ هي دالة أصلية للدالة : $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0; +\infty[$.

(ج) إستنتج أن : $A = \frac{e^2 - 2e + 5}{4} \text{ u.a}$.

😊 بالتوفيق للجميع .