

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
المؤسسة : ثانوية أحمد زبانة * زهانة *
الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات
الشعبة : آداب و فلسفة و لغات أجنبية
دورة : ماي 2024
المدة : ساعتين ونصف
امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

على الممتحن أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (06 نقاط)

نعتبر العددين a و b حيث : $a = 2024$ و $b = 1445$

1. أ عيّن باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 7.

ب) هل العددان a و b متوافقان بترديد 7

ج) عين باقي قسمة العدد $(a + 2b)$ على 7 و استنتج باقي قسمة العدد $(a + 2b)^{2024}$ على 7

2. أ) تحقق أن $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 6[7]$ ثم استنتج أن : $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$.

3. أوجد الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $n + 2024^3 \equiv 1445[7]$ ثم استنتج قيم n الأصغر من أو يساوي 16

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases} : (U_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي :}$$

1. احسب كلا من U_1 , U_2 .

2. (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب $V_n = U_n + \frac{1}{2}$.

أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و يطلب تعيين حدها الأول.

ب) عين عبارة الحد العام V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n .

3. احسب المجموع S_n بحيث : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ واستنتج المجموع $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

التمرين الثالث : (09 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ و (C_f) تمثيلها البياني في معزم

متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أثبت أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف I فاصلتها $\frac{3}{2}$

4. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة I .

5. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (x-1)^2(2x-5)$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور

الفواصل

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (06 نقاط)

1. عيّن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل العدد الطبيعي n حيث : $n \in \{1;2;3,4\}$
2. عيّن باقي قسمة كل من 2^{1445} و 2^{2024} على 5 .
3. تحقق أن : $2012 \equiv 2[5]$ ثم استنتج باقي قسمة 2012^{2023} على 5.
4. بين أن العدد $3 + 2^{1445} + 2^{2024} + 3 \times 2012^{2023}$ مضاعف للعدد 5
5. أ) بين أن $2024 \equiv -1[5]$ و استنتج أن $2024^{4^n} \equiv 1[5]$
ب) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث $2024^{4^n} + n - 1 \equiv 0[5]$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

I- (U_n) متتالية حسابية معرفة على IN بالحددين : $U_{10} = 31$ و $U_{15} = 46$

1. بين أن أساس المتتالية (U_n) هو 3 و عين حدها الأول U_0 .
2. اكتب عبارة U_n بدلالة n .
3. أثبت أن 6073 حد من حدود المتتالية (U_n) .
4. احسب المجموع S بحيث $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{2024}$.

II- نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على IN بـ: $V_n = 2 \times 8^n$

1. أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .
2. احسب المجموع S' بدلالة n بحيث $S' = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

التمرين الثالث: (08 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x+3}{2-2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب نهاية الدالة عند مجموعة تعريفها ثم استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) .
2. بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فان $f'(x) = \frac{10}{(2-2x)^2}$
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الإحداثيات.
5. أكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.
6. أرسم المماس (Δ) و المنحني (C_f)

بالتوفيق في البكالوريا

حل التمرين الاول

نعتبر العددين a و b حيث : $a = 2024$ و $b = 1445$

1. عَيِّن باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 7

لدينا $2024 = 289 \times 7 + 1$ و منه باقي القسمة الاقليدية

للعدد a على 7 هو 1

لدينا $1445 = 206 \times 7 + 3$ و منه باقي القسمة الاقليدية

للعدد b على 7 هو 3

2. هل العددين a و b متوافقان بترديد 7

بما ان باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 7

مختلفين فان العددين a و b ليسا متوافقان

3. تَعَيِّن باقي قسمة العدد $(a + 2b)$ على 7

$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv 1 \pmod{7} \\ b \equiv 3 \pmod{7} \end{array} \right. \text{ و منه } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 1 \pmod{7} \\ 2b \equiv 2 \times 3 \pmod{7} \end{array} \right. \text{ و منه } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 1 \pmod{7} \\ 2b \equiv 6 \pmod{7} \end{array} \right.$$

$$a + 2b \equiv 1 + 6 \pmod{7} \text{ و منه } a + 2b \equiv 7 \pmod{7}$$

$$a + 2b \equiv 0 \pmod{7}$$

استنتاج باقي قسمة العدد $(a + 2b)^{2024}$ على 7

$$(a + 2b)^{2024} \equiv 0^{2024} \pmod{7} \text{ فان } a + 2b \equiv 0 \pmod{7} \text{ و منه } (a + 2b)^{2024} \equiv 0 \pmod{7}$$

$$(a + 2b)^{2024} \equiv 0 \pmod{7}$$

4. تحقق أن $a^3 \equiv 1 \pmod{7}$ و $b^3 \equiv 6 \pmod{7}$

لدينا $a \equiv 1 \pmod{7}$ و منه $a^3 \equiv 1^3 \pmod{7}$ و منه $a^3 \equiv 1 \pmod{7}$

$b \equiv 3 \pmod{7}$ و منه $b^3 \equiv 3^3 \pmod{7}$ و منه $b^3 \equiv 27 \pmod{7}$

$$b^3 \equiv 27 \pmod{7} \text{ و منه } b^3 \equiv 6 \pmod{7} \text{ لان } 27 = 3 \times 7 + 6$$

استنتاج أن: $a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{7}$

لدينا $a^3 \equiv 1 \pmod{7}$ و $b^3 \equiv 6 \pmod{7}$ و منه $a^3 + b^3 \equiv 1 + 6 \pmod{7}$

$$a^3 + b^3 \equiv 7 \pmod{7} \text{ و منه } a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{7}$$

5. أ) إيجاد الأعداد الطبيعية n التي تحقق :

$$n + 2024^3 \equiv 1445 \pmod{7}$$

$$\text{لدينا } \left\{ \begin{array}{l} a = 2024 \equiv 1 \pmod{7} \\ b = 1445 \equiv 3 \pmod{7} \end{array} \right. \text{ و منه } n + 1^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$\text{و منه } n + 1 \equiv 6 \pmod{7} \text{ و منه } n \equiv 5 \pmod{7}$$

وبالتالي $n = 7k + 5$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ب) استنتاج قيم n الأصغر من أو يساوي 16

$$n \leq 16 \text{ و منه } 7k + 5 \leq 16 \text{ و منه } 7k \leq 11 \text{ و منه } k \leq \frac{11}{7}$$

$$k \leq \frac{11}{7} \leq 1,6 \text{ و منه } k = 0 \text{ او } k = 1$$

من اجل $k = 0$ نجد $n = 7(0) + 5$ و منه $n = 5$

من اجل $k = 1$ نجد $n = 7(1) + 5$ و منه $n = 12$

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 3U_n + 1 \end{cases} \text{ حل التمرين الثاني}$$

1. حساب الحدود U_1, U_2

$$U_1 = 3U_0 + 1 = 3(5) + 1 = 16 \text{ و منه } U_1 = 16$$

$$U_2 = 3U_1 + 1 = 3(16) + 1 = 49 \text{ و منه } U_2 = 49$$

2. اثبات أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = 3$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2}, \mathbb{N} \text{ من } n \text{ من أجل كل}$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 1 = U_n + \frac{1}{2} + 1$$

$$\text{و منه } V_{n+1} = U_n + \frac{3}{2} = 3 \left(U_n + \frac{1}{2} \right) = 3V_n \text{ و منه } V_{n+1} = 3V_n$$

نستنتج أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = 3$

و حدها الأول

$$V_0 = U_0 + \frac{1}{2} = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \text{ و منه } V_0 = \frac{11}{2}$$

3. كتابة عبارة V_n بدلالة n عبارة U_n بدلالة

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$V_n = \frac{11}{2} \times 3^{n-1}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{2}$$

$$U_n = V_n - \frac{1}{2}$$

$$U_n = \frac{11}{2} \times 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

4. حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$S_n = V_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{11}{2} \times \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right)$$

$$S_n = \frac{11}{2} \times \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2} \right) = \frac{11}{2} \times \left(\frac{-1}{2} \right) \times 1 - 3^{n+1}$$

$$S_n = \frac{-11}{2} \times 1 - 3^{n+1}$$

حساب بدلالة n المجموع S'_n

$$\text{لدينا } U_n = V_n - \frac{1}{2} \text{ و منه}$$

حل التمرين الثالث

1. حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. اتجاه تغير الدالة f

حساب $f'(x)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 12$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

إشارة $f'(x)$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0 \text{ معناه } f'(x) = 0$$

بعد حساب المميز Δ نجد $\Delta = (-18)^2 - 4(6)(12)$

$$\Delta = 36 > 0$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين متميزين هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 - 6}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 + 6}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

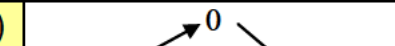
جدول الاشارات

x	1	2	$+\infty$	$-\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

و بالتالي الدالة f متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty; 1]$ و

$[2; +\infty[$ الدالة متناقصة f تماماً على المجال $[1; 2]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	1		2		$+\infty$	$-\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$						

$$\begin{cases} f(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 5 = 0 \\ f(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) - 5 = 1 \end{cases}$$

لدينا

$$\begin{cases} f(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 5 = 0 \\ f(2) = 2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) - 5 = 1 \end{cases}$$

إثبات أن للمنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف I فاصلتها $\frac{3}{2}$

$$f''(x) = 12x - 18 \text{ ولدينا } f''(x) = 6 \times 2x - 18$$

$$12x = 18 \text{ ولدينا } f''(x) = 0 \text{ ولدينا } 12x - 18 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ولدينا } x = \frac{18}{12}$$

$$S'_n = \left(V_0 - \frac{1}{2}\right) + \left(V_1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(V_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right)$$

$$S'_n = S_n - \frac{1}{2}(n+1)$$

$$S'_n = -\frac{11}{2} 1 - 3^{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)$$

بما أن الدالة " f " تتعدم و تغير إشارتها فإن الدالة تقبل

نقطة انعطاف فاصلتها $x = \frac{3}{2}$

اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة I .

$$: (\Delta) \quad y = f\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) \text{ لدينا}$$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18\left(\frac{3}{2}\right) + 12 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$y = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \text{ ومنه}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \text{ معادلة للمماس } (\Delta) \text{ هي}$$

$$f(x) = (x-1)^2(2x-5) \text{ التحقق أن}$$

نقوم بالنشر:

$$f(x) = (x-1)^2(2x-5) = (x^2 - 2x + 1)(2x-5)$$

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x^2 + 10x + 2x - 5$$

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

استنتاج نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$$\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (2x-5) = 0 \end{cases} \text{ معناه } f(x) = 0$$

وبالتالي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين

$$(1; 0) \text{ و } \left(\frac{5}{2}; 0\right) \text{ اللتين إحداثييهما}$$

7. ارسم المنحني (C_f) و المماس (Δ) .

1. باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k
من أجل القيم من 0 إلى 4 للعدد
الطبيعي k هو:

3	4
3	1

2. استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 5
للعدد 2^k من أجل كل عدد طبيعي k :

$4k + 3$
3

3. استنتاج باقي قسمة 17^{4k} على 5 :

$$17^{4k} \equiv 2^{4k} [5] = 1[5]$$

4. العدد $2^{4k+3} + 17^{4k+2} + 3$ يقبل القسمة على 5
لأن:

$$2^{4k+3} + 17^{4k+2} + 3 \equiv 3 + 4 + 3 [5] \equiv 0 [5]$$

5. استنتاج باقي قسمة

$$2007^{1999} - 61^{2008} + 87^{49} \text{ على } 5:$$

$$2007^{1999} - 21^{2008} + 87^{49} \equiv 2^{4k+3} - 1^{2008} + 2^{4k+1} [5] \\ \equiv 3 - 2 + 1 [5] \equiv 4 [5]$$

• النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2 \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

* يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل:

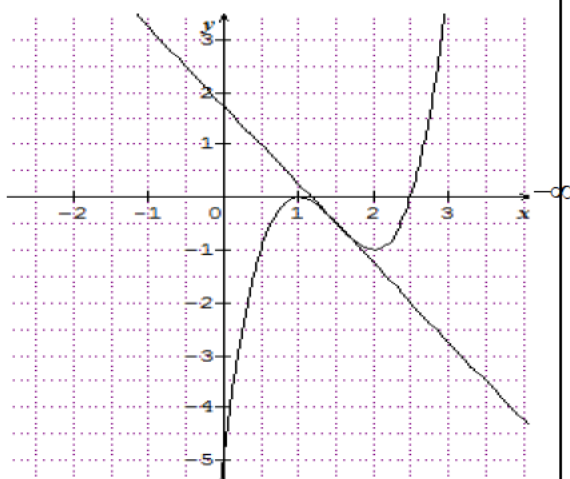
$$f(x) = (2x + 1) \left(\frac{1}{x + 2} \right)$$

-2	$+\infty$
0	+

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 1) = -3 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty \text{ منه و } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} \right) = -\infty$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 1) = -3 \text{ و}$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} \right) = +\infty$$

• **المستقيمات المقاربة:** يقبل المنحني (C_f) مستقيما

مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y = 2$ و

مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل

معادلته $x = -2$.

• **المشتقة:** من أجل كل

من $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ ،

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

• **إشارة المشتقة:** من أجل كل

من $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$.

نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين

$]-\infty; -2[$ و $] -2; +\infty[$.

• **جدول التغيرات:**

	$-\infty$	-2	$+\infty$
	$f'(x)$		
$f(x)$	2 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ 2