الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
مؤسسة التربية و التعليم الخاصة
أوبينياتر
ابتدائي متوسط ثانوي اقامة
Email: saitameur3@gmail.com 023 71 54 67 فاكس: 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 الهاتف:

المستوى:الثالثة رياضيات **دورة ماي 2023**

بكالوريا تجريبية في مادة الرياضيات المدة : 4:30 سا.

الموضوع الثاني

التمرين1 (ن4.5)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ*/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب*/ استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضـــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ*/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب*/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$.

ج*/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ*/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب*/ استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين 2 (ن4.5)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=2-\dfrac{4}{u_n+3} \end{cases}$.

1) عين قيم u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) فيما يلي نضع : $u_0=0$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0\le u_n<1$.

ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة و أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0<1-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(1-u_n)$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0<1-u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

ج- إستنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

4) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج - أحسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n حيث :

$T_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + ... + \frac{1}{u_n+2}$ و $\ln(T'_n) = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

التمرين3 (4ن)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين (لا نفرق بينها عند اللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) احسب احتمالات الأحداث التالية :

A : " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء ".

B : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون ".

C : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل " .

2) أ- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها.

- عين قيم المتغير العشوائي X .
- بين أن: $P(X=3) = \frac{24}{84}$ ثم استنتج $P(X=2)$ وعين قانون احتمال X .

ب -نقترح اللعبة التالية: يدفع اللاعب مبلغ $50DA$ قبل اجراء السحب. ويكسب $25DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .

- هل اللعبة مربحة له ؟ .

التمرين 4 (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - e + \ln\left(1 + 2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln\left(2 + e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\ ;\ \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1\ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ*/ فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1.

ب*/ بين أن: $0\le I_n\le \ln 2$

ج*/ عين اتجـــاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ، من أجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ*/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

ب*/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.

بالتوفيق.

التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل	العلامة
التمرين1	**1)أ*/إثبات أن :** $y \equiv 4[11]$ ، $(E)\ldots 11x-5y=2$ $11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي $y\equiv 4[11]$ أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه : $y\equiv 4[11]$ **ب*/استنتاج حلول المعادلة** (E) : $y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد : $x=5k+2$ ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$ **2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ** $d=PGCD(a;b)$ **:** $n\in\mathbb{N}^*$ ، $b=11n+4$ و $a=5n+2$ $11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$ ومنه : d إذن : $d\in D_2=\{1;2\}$. **ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم** n **بحيث يكون:** $PGCD(a;b)=2$: لدينا $PGCD(a;b)=2$ معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$ أي 2 يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2 يقسم n . ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل : $n=2\alpha \ / \alpha\in\mathbb{N}^*$ **ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم** n **بحيث يكون العددان** a و b **أوليان فيما بينهما:** من السؤال السابق من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n : $n=2\alpha \ / \alpha\in\mathbb{N}^*$ ومنه : قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي : $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$ **3) أ*/نبين أن العدد** $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B $n\in\mathbb{N}$ ، $B=11n^2+15n+4$ و $A=5n^2+7n+2$ $A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$ **ومنه نميز حالتين :** **الحالة 1:** إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$ نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$ **الحالة 2:** إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$ نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$	
التمرين2	1) (u_n) ثابتة يعني : $u_{n+1}=u_n=u_0$ أي : $u_0=2-\frac{4}{u_0+3}$ نجد : $\boxed{u_0=-2}$ و $\boxed{u_0=1}$. 2) أ) لنبرهن بالتراجع : $0\le u_n<1$. *) لنتحقق من أجل $n=0$ أي : $0\le u_0<1$ (محققة) *) نفرض أن : $0\le u_n<1$ و لنثبت : $0\le u_{n+1}<1$ لدينا فرضا : $0\le u_n<1$ أي : $\frac{1}{4}<\frac{1}{u_n+3}\le\frac{1}{3}$ أي : $-1<\frac{-4}{u_n+3}\le\frac{-4}{3}$ و منه : $1<2-\frac{4}{u_n+3}\le\frac{2}{3}$ أي : $0\le u_{n+1}<1$ و بالتالي من أجل $n\in\mathbb{N}$: $\boxed{0\le u_n<1}$ ب) نحسب : $u_{n+1}-u_n$ $u_{n+1}-u_n=2-\frac{4}{u_n+3}-u_n=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+3}$ أي : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+3}$ ، لدينا : $u_n<1$	

أي : $u_n-1<0$ و منه : $-(u_n-1)>0$ و بالتالي يكون : $u_{n+1}-u_n>0$ إذن : المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

*) بما أن (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 1 فهي متقاربة .

*) بما أن (u_n) متقاربة فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

أي : $l=2-\dfrac{4}{l+3}$ أي : $l^2+l-2=0$ نجد : $\boxed{l=1}$ و $l=-2$ (مرفوض) .

3) أ) لنبرهن أن : $0<1-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(1-u_n)$.

لنبرهن من جهة أن : $1-u_n>0$.

لدينا : $1-u_n=-1+\dfrac{4}{u_n+3}$ و $1<\dfrac{4}{u_n+3}\le\dfrac{4}{3}$ و منه: $0<-1+\dfrac{4}{u_n+3}\le\dfrac{1}{3}$ إذن : $1-u_n>0$.

لنبرهن من جهة أخرى : $1-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(1-u_n)$ أي : $1-u_{n+1}-\dfrac{1}{3}(1-u_n)\le 0$ ، لدينا :

$1-u_{n+1}-\dfrac{1}{3}(1-u_n)=\dfrac{u_n(u_n-1)}{3(u_n+3)}$ و منه نجد : $1-u_{n+1}-\dfrac{1}{3}(1-u_n)=\dfrac{2}{3}-u_{n+1}+\dfrac{1}{3}u_n$ نعلم أن :

$u_n-1<0$ و من جهة : $u_n\ge 0$ أي : $1-u_{n+1}-\dfrac{1}{3}(1-u_n)\le 0$

من هذا و ذاك يكون : $\boxed{0<1-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(1-u_n)}$.

ب) لنبرهن بالتراجع أن : $0<1-u_n\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

*) لنتحقق من أجل $n=0$ أي : $0<1\le 1$ (محققة) .

*) لنفرض : $0<1-u_n\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ و لنثبت أن : $0<1-u_{n+1}\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$. مما سبق لدينا : $0<1-u_n$

لدينا : $1-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(1-u_n)$ أي : $1-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)(1-u_{n-1})$

و بالتالي يكون : $\boxed{0<1-u_n\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

ج) لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}1-u_n=0$ إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$.

4) لدينا : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ) $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}$ أي : $v_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{4(u_n+2)}$ و منه : $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}v_n$ إذن : المتتالية (v_n) هندسية

أساسها $\dfrac{1}{4}$ و حدها الأول : $v_0=-\dfrac{1}{2}$.

ب) لدينا : $v_n=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ و منه : $\boxed{v_n=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+1}}$.

لدينا : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ أي : $v_n.u_n+2v_n=u_n-1$ و منه نجد : $u_n=-\frac{2v_n+1}{v_n-1}$ أي :

$$\boxed{u_n=-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-1}}$$.

ج) حساب المجاميع :

*) لدينا : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ أي : $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1-v_n}{3}$.

أي : $T_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_0+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_1+\ldots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}v_n$ أي :

$T_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(v_0+v_1+\ldots+v_n\right)$ و منه :

أي : $T_n=\frac{1}{3}(n+1)-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$

$$\boxed{T_n=\frac{1}{3}(n+1)+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$.

*) لدينا : $\ln(T'_n)=v_0+v_1+\ldots+v_n$ أي يتحقق :

$T'_n=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$ أي نجد : $\boxed{T'_n=e^{-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}}$.

التمرين3

1)حساب احتمال الحوادث التالية:

$p(A)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14}$ ، $p(B)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$ ،

$p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_3^5}{C_9^3}=\frac{37}{42}$.

2) تعيين قيم المتغير العشوائي X : $\{1;2;3\}$.

$p(X=3)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$.

و $p(X=1)=p(B)=\frac{5}{84}$

إذن: $p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$.

أي: $p(X=2)=1-p(X=1)-p(X=3)$.

$p(X=2)=1-\frac{5}{84}-\frac{24}{84}=\frac{55}{84}$.

قانون احتمال :

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

- قيم الربح الممكنة هي:

$\{25-50;50-50;75-50\}$. أي: $\{-25;0;25\}$.

x_i	-25	0	$+25$
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

وبالتالي: $E(X)=-25\times\frac{5}{84}+25\times\frac{24}{84}=\frac{475}{85}>0$. إذن اللعبة في صالح اللاعب.

التمرين4

1)أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

$$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$$

ب */ حساب النهايات $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $\left[e+\ln\sqrt{2};+\infty\right[$

الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;e+\ln\sqrt{2}\right]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$In2/2+e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$3In2/2+e$	↗ $+\infty$

2) أ*/ نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ **على الترتيب**: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-e)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+e+\ln 2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2\right]=0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ 1$ معنـــاه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln 1=0$

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ 0$ إذن (C_f) يقـع فوق م.م (D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln 2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2$

$2+e^{2(x-e)}\succ 2$ معنـــاه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ\ln 2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln 2)\succ 0$ إذن (C_f) يقـع فوق م.م (D')

من اجل كل عدد حقيقي x

ج*/ نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f):

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)$ من $\mathbb{R}$، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)=f\left(\ln 2+2e-x\right)$$

$$=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})=f(x)$$

ومنه: $(\Delta): x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3) رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f):

4) أ*/ نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\frac{\ln 2}{2}\right)$: $(D_m): y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$

إذا كان $m\in]-1;1[$ فإنه لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ*/ التفسير الهندسي العدد I: هومساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين اللذيم معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1\ln(1+X)dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v(X)=X$ ، $v'(X)=1$

$$I_1=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)\right]_0^1=\ln 4-1$$

ب*/ نبين أن $0\le I_n\le\ln 2$: لدينا $I_n=\int_0^1\ln(1+X^n)dX$

$0\le X\le 1$ معناه $1\le X^n+1\le 2$ معناه $0\le\ln(X^n+1)\le\ln 2$

ومنه: $0\le\int_0^1\ln(X^n+1)dX\le\int_0^1\ln 2dX$ اذن $0\le I_n\le\ln 2$

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد $\begin{cases}0\le X\le 1\ldots(1)\\0\le X^n\le 1\end{cases}$

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1} + 1 \le X^n + 1$

$n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$ أي أن

$0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0 \le I_{n+1} \le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases} 0 \le X \le 1 \ldots (1) \\ 0 \le X^n \le 1 \end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0 \le X^{n+1} \le X^n$ أي $0 \le X^{n+1} + 1 \le X^n + 1$

$n \in \mathbb{N}^*$ ، $0 \le \ln\left(X^{n+1}+1\right) \le \ln\left(X^n+1\right)$ أي أن

$0 \le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX \le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0 \le I_{n+1} \le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0 \le I_n \le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

6) باستعمال: $\ln(1+X)\le X$ ،من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ*/ استنتاج أن : $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx -1+\ln 4$

$\ln(1+X)\le X$ ،من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

لدينا: $1+2e^{-2(x-e)}\succ 0$ بوضع: $X=1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

$0\le \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\le 2e^{-2(x-e)}$ وبالتالي

$$0\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx \le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0\le -1+\ln 4\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx -1+\ln 4$

اذن: $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx -1+\ln 4$

ب*/ اعطاءحصرا للعدد $I+I_1$:

$$0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx -1+\ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx=-\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}-2e^{-2(x-e)}dx=-\left[e^{-2(x-e)}\right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}=\frac{1}{6}$$

ومنه: $0\le I+I_1\le \frac{1}{6}-1+\ln 4$ و $0\le I+I_1\le \frac{-5}{6}+\ln 4$