الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سعيدة — وزارة التربية الوطنية

ثانوية : توهامي مصطفى — امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

الشعبة : علوم تجريبية — دورة م 3 0

اختبار في مادة : الرياضيات — مدة : 03 سـ ت و نصف

على المترشح أن يختار أ د الوضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عينه مع التعليل

1. الدالة الأصلية للدالة $f : x \to \dfrac{1}{x\ln\left(x^2\right)}$ على المجال $]1;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $\sqrt{e}$ هي:

أ) $F(x)=\frac{1}{2}\ln(\ln x)+\ln 2$ ب) $F(x)=\frac{1}{2}\ln(\ln x)-\ln 2$ جـ) $F(x)=\frac{1}{2}\ln(2\ln x)$

2. حل المعادلة : $2C_n^2 - A_n^1 = 0$ هو :

أ) $n\in\{0;2\}$ ب) $n\in\{2;3\}$ جـ) $n=2$

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $A=1+\ln(2e)+\ln(3e)+...+\ln(e.n)$ تساوي

أ) $n+\ln(n!)$ ب) $n-\ln(n!)$ جـ) $n!+\ln(n)$

4. (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{n+3}$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{u_n-\alpha}{u_n+1}$ ، قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية غير ثابتة هي:

أ) $\alpha=1$ ب) $\alpha=-1$ جـ) $\alpha=3$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

صندوق يحوي 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها كريتان تحملان الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 0 و خمس كريات تحمل الرقم 2 .

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق ، ونعتبر الحدثين A و B حيث :

A " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة " ، B " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جداؤها معدوما "

أ) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب .

ب) بين أن : $P(A\cap B)=\dfrac{7}{10}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل.

جـ) علما أن جداء أرقام الكريات معدوما ، ما احتمال أن تكون مختلفة .

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الأرقام المتساوية المحصل عليها.

أ) برر أن مجموعة قيم X هي : $X\in\{0;2;3\}$

ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب تباينه $V(X)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بالحدين : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n$

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتاليتين (v_n) و (w_n) كمايلي : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $w_n = 3^n \times u_n$

1. أحسب : u_2 ثم v_0 ، v_1 ، w_0 ، w_1

2. أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها ، ثم عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+2} + w_n = 2w_{n+1}$ ، ماذا نقول عن المتتالية (w_n) ؟

جـ) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

ب) استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n)

4. نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

بين أن : $0 < S_n \leq 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln\left(\frac{a + be^x}{c}\right)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى لمعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

إذا علمت أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) بجوار $+\infty$ و الآخر أفقي (Δ') بجوار $-\infty$

حيث المستقيم (Δ) يشمل النقطتين $A(0;-\ln 2)$ و $B(\ln 2;0)$ والمستقيم (Δ') يشمل النقطة A

1. باستعمال المستقيم المقارب الأفقي (Δ') بين أن : $c = 2a$.
2. عين معادلة المستقيم (Δ) .
3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + \ln\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right)$.
4. بين أن : $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - (x - \ln 2)\right] = \ln\left(2.\frac{b}{c}\right)$ واستنتج أن : $c = 2b$.
5. مما سبق استنتج أن : $f(x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)$

II. أ ـ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

بـ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ حيث f' هي مشتقة الدالة f

جـ ـ استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

د ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

هـ ـ أرسم المستقيمين (Δ) و (Δ') ثم أرسم المنحنى (C_f)

III. لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \ln\left(\frac{1 + e^{|x|}}{2}\right)$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ – بين أن الدالة h زوجية .

ب – اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{8}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$

I. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x(2-x)$

1). ادرس اتجاه تغير الدالة f .

2). بين أنه إذا كان: $x \in]0;1[$ فإن: $f(x) \in]0;1[$

II. 1). احسب كلا من u_1 و u_2 .

2). برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

3). بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

III. (v_n) المتتالية لعددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 1 - u_n$

1). عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

2). برهن بالتراجع أن من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

3). استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4). عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n \succ 1-10^{-20}$

5). أحسب بدلالة n الجداء $p(n)$ حيث: $p(n) = v_0 \times v_1 \times ..... \times v_n$ ، ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 6 كريات حمراء و 4 كريات سوداء.

يحتوي صندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كرية سوداء و كرية بيضاء.

I. نسحب عشوائيا على التوالي و دون ارجاع 3 كريات من الصندوق U_1.

1). شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.

2). أحسب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كريات حمراء.

3). أحسب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كرية حمراء على الأقل.

II. نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2 .

1). علما أن الكرية المسحوبة من U_2 سوداء .

- ما هو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل.

2). ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

أ). بين أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0 و 1 .

ب). احسب الأمل الرياضي، ثم استنتج : $E(1444X + 2023)$.

ج). أحسب : $P\left((\ln X)^2 - \ln X \leq 0\right)$.

III. نضيف n كرية سوداء إلى الصندوق U_1 و n كرية حمراء إلى الصندوق U_2 ،

نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2 . و لتكن C حادثة الحصول على كريتين من نفس اللون.

- عين قيمة n حتى يكون: $P(C) = \frac{3}{7}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

$P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث: $P(z)=(z+1-i)(z^2+2z+4)$

I. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=-1+i$ ، $z_B=-1+\sqrt{3}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

1). اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

2). اكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ على الشكل الجبري، ثم الشكل الأسي.

3). استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4). أ). عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{2z_A}{\sqrt{2}z_B}\right)^n$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب تماما.

ب). بين أن: $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2023}+\left(\frac{z_C}{2}\right)^{14\,4}=-1$

5). عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z+1-i|=|iz+\sqrt{3}+i|$

التمرين الرابع : (07,5 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=2e^{x-1}-x-1$

1). احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

2). أ). بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 و لآخر α بحيث: $-0,6\prec\alpha\prec-0,5$

ب). استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-2+(x+2)e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1). أ). بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، ثم احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

ب). بين أنه من اجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{1-x}g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج). بين أنه من اجل $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=xe^{1-x}$ ، ثم استنتج أن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها.

د). بين أن: $f(\alpha)=2\alpha+\frac{2}{\alpha+1}$ ، ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

2). أ). بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=2x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ: (C_f) و (Δ)

ب). بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

3). أ). أنشئ كلا من (Δ) و (T)، ثم مثل (C_f). نقبل أن: $f(\beta)=0$ ، بحيث: $-1,63\prec\beta\prec-1,61$ و $f(\alpha)\approx3,73$

ب). عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m، التي من اجلها تقبل المعادلة: $f(x)=2(x-1)+m$ حلين مختلفين في الإشارة.

4). أ). بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x)=(-x-3)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+2)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$

ب). استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ: (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=-2$ و $x=1$

انتهى الموضوع الثاني

الحل النموذجي للموضوع الأول لاختبار البكالوريا التجريبية 2023

العلامة النهائية	العلامة المجزأة	الإجـــــــــابة
		التمرين الأول:(04 نقاط)
		$F(x)=\int_{\sqrt{e}}^{x}\left(\frac{1}{t\ln t^2}\right)dt=\int_{\sqrt{e}}^{x}\left(\frac{\frac{1}{t}}{2\ln t}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}}^{x}\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}dt=\frac{1}{2}[\ln(\lvert\ln t\rvert)]_{\sqrt{e}}^{x}$ $=\frac{1}{2}[\ln(\ln x)+\ln(2)]=\frac{1}{2}\ln(2\ln x)$
		من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $1+\ln(2e)+\ln(3e)+\ldots+\ln(ne)=\ln 2+1\ e)+\ln 3+\ln(e)+\ \ +\ln n+\ln(e)$ $=(1+1+\ldots.+1)+\ln(2\times 3\times\ldots.\times n)=n+\ln(n!)$
		$2C_n^2-A_n^1=0\Rightarrow 2\left(\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\right)-n=0\Rightarrow 2\left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}\right)-n=0$ $\Rightarrow n(n-1)-n=0\Rightarrow n(n-2)=0\Rightarrow n=0$ أو $n=2$ إذن $n\geq 2$ $n=0$ مستحيلة لأنه $\boxed{n=2}$
		$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-\alpha}{\frac{3u\ +1}{u_n+3}+1}=\frac{3u_n+1-\alpha(u_n+3)}{3u_n+1+u_n+3}$ و منه: $=\frac{(3-\alpha)u_n+1-3\alpha}{4(u_n+1)}=\frac{(3-\alpha)}{4}\left(\frac{u_n+\frac{1-3\alpha}{3-\alpha}}{u_n+1}\right)$ ومنه: $\frac{1-3\alpha}{3-\alpha}=-\alpha$ أي : $1-3\alpha=-\alpha(3-\alpha)$ ،و منه : $\alpha^2-1=0$ ،إذن : $\alpha=-1$ مرفوض ، $\alpha=1$
		التمرين الثاني:(04 نقاط) 1)أ) حساب احتمال الحادثتين A و B الحادثة $\overline{A}$ "الكريات تحمل نفس الرقم" $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}=1-\frac{1+10}{120}=\frac{109}{120}$ لحادثة $\overline{B}$ "لا توجد كرية تحمل الرقم 0" $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=1-\frac{35}{120}=\frac{85}{120}=\frac{17}{24}$ ب) تبيين أن $P(A\cap B)=\frac{7}{10}$ $P(A\cap B)=\frac{C_3^1\times C_7^2+C_3^2\times C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{63+21}{120}=\frac{84}{120}=\frac{7}{10}$ بما أن: $P(A)\times P(B)=\frac{1853}{2880}$ و $P(A\cap B)=\frac{2016}{2880}$ منه: $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$ فإن الحادثتين B و A غير مستقلتين. ج)حساب احتمال أن تكون أرقام الكريات مختلفة علما أن جداءها معدوم: $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{7}{10}\times\frac{24}{17}=\frac{84}{85}$

2) أ) تعيين القيم الممكنة لـ X : كريات إما تحمل نفس الرقم فإن $X=3$ و تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى فإن $X=0$

أو كريتان تحملان نفس الرقم و الأخرى تحمل رقما مختلفا فإن $X=2$ ، إذن: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي $\{0;2;3\}$.

ب) تعريف قانون الاحتمال:

$x_i =$	0	2	3	Σ
$P(X=x_i)=$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1
$x_i.P_i =$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$
$x_i^2.P_i =$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$

$$P(X=3)=P(\overline{A})=\frac{11}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^1+C_2^2\times C_8^1+C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120}$$

$$P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$$

*) حساب التباين $Var(X)$: $E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.p_i=\frac{191}{120}\approx 1{,}59$ منه: $Var(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2.p_i-[E(X)]^2=\frac{13319}{14400}\approx 0{,}925$

التمرين الثالث:(05 نقاط)

لدينا : $\begin{cases}u_0=0\ ;\ u_1=1\\ u_{n+2}=\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{9}u_n\end{cases}$ ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$ و $w_n=3^n\times u_n$.

1) حساب الحدود :

لدينا : $u_2=\frac{2}{3}u_1-\frac{1}{9}u_0$ **ومنه نجد :** $\boxed{u_2=\frac{2}{3}}$.

لدينا : $v_0=u_1-\frac{1}{3}u_0$ **أي نجد :** $\boxed{v_0=1}$ و $v_1=u_2-\frac{1}{3}u_1$ **أي :** $v_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ **ومنه :** $\boxed{v_1=\frac{1}{3}}$.

لدينا : $w_0=3^0\times u_0$ **أي :** $\boxed{w_0=0}$ و $w_1=3^1\times u_1$ **ومنه :** $\boxed{w_1=3}$.

2) أ- من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ **لدينا :** $v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{3}u_{n+1}$ **أي :** $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{9}u_n-\frac{1}{3}u_{n+1}$ **أي :** $v_{n+1}=\frac{1}{3}u_{n+1}-\frac{1}{9}u_n$

ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{3}\left(u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n\right)$ **أي :** $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ ، **إذن : المتتالية** (v_n) **هندسية أساسها** $\boxed{q=\frac{1}{3}}$.

وبالتالي من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ **لدينا :** $\boxed{v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

ب- من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ **لدينا :** $w_{n+2}+w_n=3^{n+2}\times u_{n+2}+3^n\times u_n$ **أي :** $w_{n+2}+w_n=3^{n+2}\left(\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{9}u_n\right)+3^n\times u_n$

أي : $w_{n+2}+w_n=\frac{2\times 3^{n+2}}{3}u_{n+1}-\frac{3^{n+2}}{9}u_n+3^n\times u_n$ **أي :** $w_{n+2}+w_n=2\times 3^{n+1}\times u_{n+1}-3^n\times u_n+3^n\times u_n$

ومنه : $w_{n+2}+w_n=2\times 3^{n+1}\times u_{n+1}$ ، **إذن :** $\boxed{w_{n+2}+w_n=2w_{n+1}}$ **هـ.م**

☜ **لدينا من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$: $w_{n+2}+w_n=2w_{n+1}$ **وهذا ما يدل على أن المتتالية** (w_n) **حسابية .**

لدينا مما سبق : $w_0=0$ **و** $w_1=3$ **وبالتالي :** (w_n) **متتالية حسابية أساسها** $r=3$ ، **إذن :** $\boxed{w_n=3n}$.

جـ- لدينا : $w_n=3^n\times u_n$ **أي :** $u_n=\frac{w_n}{3^n}$ **ومنه :** $\boxed{u_n=\frac{3n}{3^n}}$.

3) أ- من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لنبين أن : $0<u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$.

ط1) من أجل $n\ge1$ لدينا $\frac{3n+3}{3^{n+1}}>0$ أي : $u_{n+1}>0$ ، هذا من جهة .

و من جهة أخرى لدينا $u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{3(n+1)}{3^{n+1}}-\frac{2}{3}\times\frac{3n}{3^n}=\frac{3n+3}{3^{n+1}}-\frac{6n}{3^{n+1}}$ أي : $u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{3-3n}{3^{n+1}}$.

لكن لدينا : $n\ge1$ أي : $n-1\ge0$ و منه : $3-3n\le0$ و $3^{n+1}>0$ إذن : $u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n\le0$ أي : $u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\boxed{0<u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n}$.

ط2) نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ فإن : $0<u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$. $P(n)$:

- لنتحقق ن صحة $P(n)$ من أجل $n=1$ أي : $0<u_2\le\frac{2}{3}u_1$ و منه : $0<\frac{2}{3}\le\frac{2}{3}$ (محققة) .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $0<u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $0<u_{n+2}\le\frac{2}{3}u_{n+1}$.

لدينا : $u_{n+2}=\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{9}u_n$ ي : $u_{n+2}-\frac{2}{3}u_{n+1}=-\frac{1}{9}u_n$ لكن نعلم أن : $-\frac{1}{9}u_n\le0$ أي أن : $u_{n+2}-\frac{2}{3}u_{n+1}\le0$

و بالتالي : $u_{n+2}\le\frac{2}{3}u_{n+1}$ لكن نع م أيضا : $u_{n+2}>0$ إذن نجد : $0<u_{n+2}\le\frac{2}{3}u_{n+1}$.

و أخيرا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ يكون : $\boxed{0<u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n}$.

ب- لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $0<u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$ أي : $0<u_2\le\frac{2}{3}u_1$ ، $0<u_3\le\frac{2}{3}u_2$ ، $0<u_4\le\frac{2}{3}u_3$ ، .....

..... ، $0<u_n\le\frac{2}{3}u_{n-1}$ ، $0<u_{n+1}\le\frac{2}{3}u_n$. بالضرب طرف لط ف نجد :

$0<u_2\times u_3\times.....\times u_{n-1}\times u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(u_1\times u_2\times.\ ....\times u_{n-1})$ أي : $0<u_2\times u_3\times.....\times u_{n-1}\times u_n\le\frac{2}{3}u_1\times\frac{2}{3}u_2\times.....\times\frac{2}{3}u_{n-1}$

بالإختزال نجد : $0<u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times u_1$ لكن : $u_1=1$ ، إذن نجد : $\boxed{0<u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$ هـ.م

4) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$.

مما سبق لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $0<u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ أي : $0<u_1\le\left(\frac{2}{3}\right)^0$ ، $0<u_2\le\left(\frac{2}{3}\right)^1$ ، $0<u_3\le\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ، .....

..... ، $0<u_{n-1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ ، $0<u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ، بجمع طرف لطرف نجد :

$0<S_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+.....+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ أي : $0<u_1+u_2+.....+u_{n-1}+u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+.....+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

- لكن نعلم أن : $\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+.....+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ هو مجموع لحدود متتابعة من متتالية هندسية عدد الحدود هو n حدا

إذن : $0<S_n\le1\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$ أي : $0<S_n\le\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}$ و منه نجد : $\boxed{0<S_n\le3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$ هـ.م

التمرين الرابع:(07 نقاط)

I.

1. لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\ln 2 = \ln\left(\frac{a}{c}\right)$ ، ومنه: $\frac{c}{a} = 2$ و بالتالي : $c = 2a$

2. معادلة المستقيم: $(\Delta) : y = x - \ln 2$

3. من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \ln\left[e^x\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right)\right] = \ln e^x + \ln\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right) = x + \ln\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right)$

4. لدينا : $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x - \ln 2)] = \ln 2 + \ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln\left(2\cdot\frac{b}{c}\right)$ ، وبالتالي : $ln\left(2\cdot\frac{b}{c}\right) = 0$ إذن : $2\cdot\frac{b}{c} = 1$

و في الأخير نجد : $c = 2b$

5. مماسبق و بالتعويض نجد: $f(x) = \ln\left(\frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}e^x}{c}\right) = \ln\left[\frac{c\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{c}\right] = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

II.

أ. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب.من أجل كل عدد حقيقي x : لدينا : $f'(x) = \left(\frac{\frac{1}{2}e^x}{\frac{1+e^x}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}e^x\cdot\frac{2}{1+e^x}\right) = \left(\frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})}\right) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

جـ. من أجل كل عدد حقيقي x : لدينا : $f'(x) > 0$ ، وبالتالي : f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

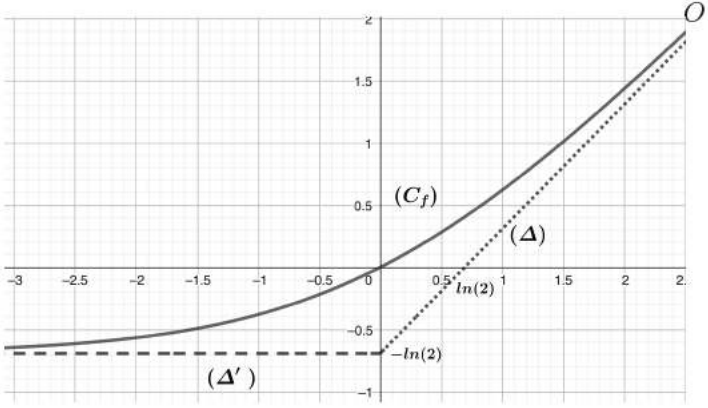
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-ln2$ ↗	$+\infty$

د. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى حامل محور الفواصل . لدينا: $f(x) = 0$ معناه: $\frac{1+e^x}{2} = 1$ ، و منه : $x = 0$

وبالتالي : على المجال $]-\infty;0[$ نجد :(C_f) تحت (xx') وعلى المجال $]0;+\infty[$ نجد :(C_f) فوق (xx')

ومن أجل $x = 0$ نجد : (C_f)يقطع (xx') في النقطة O

هـ. الرسم



III

أ. لدينا: $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة الى 0 و $h(-x) = \ln\left(\frac{1+e^{|-x|}}{2}\right) = h(x)$ ، و منه h دالة زوجية

ب. لدينا : $h(x) = \begin{cases} f(x); x \geq 0 \\ \frac{1+e^{-x}}{2}; x \leq 0 \end{cases}$ و بالتالي : (C_h) ينطبق على (C_f) على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم نرسم نظير(C_h) بالنسبة الى محور التراتيب على المجال $]-\infty;0[$ لان h دالة زوجية.

رسم (C_h)