

امتحان بكالوريا تجريبى

الأستاذ: قويسم الخليل

يوم: 15 مارس 2023



الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 س و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03.00)

- في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير بدقّة
- 1 [01.00] $(S): \begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ نعتبر الجملة z_2 و z_1 عدداً مركبان مع $\bar{z}_1$ مرافق z_1 و $\bar{z}_2$ مرافق z_2 . نعتبر الجملة $(z_1; z_2) \in \{(-3 + \sqrt{3}i; \sqrt{3}i)\}$ هما،
- 2 [01.00] نعتبر العدد المركب A ، حيث: $A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1444} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$
- العدد A حقيقي
- 3 [01.00] نعتبر في المستوى المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 1 - 2i$ المجموعة (Γ) للنقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق: $|\sqrt{3} + i| = |2\bar{z} - 2 - 4i|$ هي؛
- الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 1

التمرين الثاني: (05.00)

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بعدها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ب: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$
- 1 [00.75] برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n > 0$
- 2 [00.75] ادرس اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة
- 3 [00.50] / ا/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$
- ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ، ثم أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$
- 4 [00.75] (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$
- ب/ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$
- ج/ اكتب بدلالة n عبارة v_n و u_n
- د/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ بطريقة أخرى
- 5 [00.50] عيّن بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{6}{2u_0 + 3} + \frac{6}{2u_1 + 3} + \dots + \frac{6}{2u_n + 3}$

الموضوع الثاني

◀ التمرين الأول: (04.00)

نعتبر الصناديق غير الشفافة U ، V و W . حيث يحتوي الصندوق U على 3 كرات سوداء و 4 كرات حمراء. والصندوق V يحتوي على كرتين سوداوين و 6 كرات حمراء. والصندوق W يحتوي على خمس كرات مرقمة من 1 إلى 5.

كل الكرات لا نميز بينها باللمس

نضع:

$$\begin{array}{|l} P(N) \text{ احتمال الحصول على كرة سوداء} \\ P(U) \text{ السحب من الصندوق } U \\ P(R) \text{ احتمال الحصول على كرة حمراء} \\ P(V) \text{ السحب من الصندوق } V \end{array}$$

(I) [01.50] نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد، احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A : "الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون"

B : "الحصول على كرة حمراء واحدة بالضبط"

C : "الحصول على كرة سوداء على الأكثر"

(II) نختار كرة عشوائيا من الصندوق W ، إذا ظهرت الكرة المسحوبة تحمل رقم مضاعف لـ 3 نسحب

عشوائيا كرة من الصندوق U والا فإننا نسحب كرة عشوائيا من الصندوق V

1 [01.00] أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة

2 [00.75] بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء هو: $P(R) = \frac{5}{7}$

3 [00.75] إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء، فما احتمال أن تكون من الصندوق V ؟

◀ التمرين الثاني: (04.50)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B اللذان

لاحقتهما على الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

a و β العددان المركبان حيث: $\alpha = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$ و β يحقق: $\alpha = 2(1 + i)\beta$

1 [01.00] احسب α^2 ، ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب α^2

2 [01.00] استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب α ، ثم اكتبه على الشكل المثلثي

3 [00.75] عين القيم المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

4 [01.00] بين أن $\beta = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، ثم اكتب β على الشكل الجبري

5 (γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z - \sqrt{3} - i| = 1$

أ/ بين أن النقطة B تنتمي إلى (γ) [00.25]

ب/ عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (γ) [00.50]

◀ التمرين الثالث: (04.00)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

1 [00.75] برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2 < u_n \leq 4$

تصحيح مقترح لامتحان البكالوريا التجريبية

الأستاذ: قويسم الخليل

الشعبة: علوم تجريبية

3 (Γ) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 1

صحيح | التبرير:

$$\begin{aligned} |2\bar{z} - 2 - 4i| &= |\sqrt{3} + i| \Rightarrow |2(\bar{z} - 1 - 2i)| = 2 \\ &\Rightarrow |2||\bar{z} - 1 - 2i| = 2 \\ &\Rightarrow |\bar{z} - 1 - 2i| = 1 \\ &\Rightarrow |z - 1 + 2i| = 1 \\ &\Rightarrow |z - (1 - 2i)| = 1 \\ &\Rightarrow |z - z_A| = 1 \\ &\Rightarrow AM = 1 \end{aligned}$$

إذن، (Γ) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 1

4 [م] التمرين الثاني: (05.00)

1 برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا، $u_n > 0$

نضع، $P(n): u_n > 0$

• لدينا، $u_0 = \frac{3}{2}$ معناه، $u_0 > 0$ إذن $P(0)$ محققة

• ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة

$P(n+1)$

• لدينا،

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2u_n}{2u_n + 5} \\ &= \frac{2u_n + 5 - 5}{2u_n + 5} \\ &= \frac{2u_n + 5}{2u_n + 5} - \frac{5}{2u_n + 5} \\ &= 1 - \frac{5}{2u_n + 5} \end{aligned}$$

ولدينا،

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow 2u_n + 5 > 5 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2u_n + 5} < \frac{1}{5} \\ &\Rightarrow -\frac{5}{2u_n + 5} > -1 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{5}{2u_n + 5} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

الموضوع الأول

4 [م] التمرين الأول: (03.00)

1 العددان المركبان حلي الجملة (S)، هما،

$$(z_1; z_2) \in \{(-3 + \sqrt{3}i; \sqrt{3}i)\}$$

خطأ | التبرير:

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{لدينا،}$$

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \dots (*) \\ 2z_1 + z_2 = -3 + 2i\sqrt{3} \dots (**) \end{cases} \quad \text{تكافئ،}$$

بجمع (*) و (**) طرفا لطرف

$$4z_1 = -6 + 2\sqrt{3}i$$

ومنه،

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بتعويض قيمة z_1 في (*) نجد،

$$2\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - z_2 = -3$$

$$z_2 = \sqrt{3}i \quad \text{ومنه،}$$

2 العدد A حقيقي

صحيح | التبرير:

$$\text{لدينا، } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ و } \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه،}$$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1444} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023} \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1444} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2023} = e^{1444 \times \frac{\pi}{3}i} + e^{2023 \times \frac{2\pi}{3}i} \\ &= e^{(481\pi + \frac{\pi}{3})i} + e^{(1349\pi - \frac{\pi}{3})i} = e^{(\pi + \frac{\pi}{3})i} + e^{(\pi - \frac{\pi}{3})i} \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\quad + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 \end{aligned}$$

إذن $P(n+1)$ محققة

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

② دراسة اتجاه تغير (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{2u_n + 5} - u_n \\ &= \frac{2u_n - 2(u_n)^2 - 5u_n}{2u_n + 5} \\ &= -\frac{u_n(2u_n + 3)}{2u_n + 5} \end{aligned}$$

لدينا: $u_n > 0$

$$\begin{cases} 2u_n + 3 > 0 \\ 2u_n + 5 > 0 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \text{ ومنه:}$$

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- استنتاج أنها متقاربة.

بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 0، فهي متقاربة

③

أ/ تبين أن: $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow 2u_n + 5 > 5 \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{2u_n + 5} < \frac{1}{5} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{2u_n}{2u_n + 5} < \frac{2}{5}u_n \\ &\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n \\ &\text{ب/ استنتاج أن: } 0 < u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

لدينا: $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$ ، ومنه:

$$\begin{cases} 0 < u_1 < \frac{2}{5}u_0 \\ 0 < u_2 < \frac{2}{5}u_1 \\ \vdots \\ 0 < u_{n-1} < \frac{2}{5}u_{n-2} \\ 0 < u_n < \frac{2}{5}u_{n-1} \end{cases}$$

بضرب أطراف المتراجحات طرفًا لطرف نجد:

$$\begin{aligned} 0 < u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \\ &< \frac{2}{5}u_0 \times \frac{2}{5}u_1 \times \dots \times \frac{2}{5}u_{n-2} \times \frac{2}{5}u_{n-1} \\ 0 < u_n &< \frac{2}{5}u_0 \times \frac{2}{5} \times \dots \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \\ \text{ومنه: } 0 < u_n &< u_0 \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{ومنه: } 0 < u_n < \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

• إيجاد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

$$\begin{aligned} 0 < u_n &< \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ \Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &< \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\ \Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &< 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= 0 \end{aligned}$$

④

أ/ تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{4 \cdot \frac{2u_n}{2u_n + 5}}{2 \cdot \frac{2u_n}{2u_n + 5} + 3} \\ &= \frac{8u_n}{10u_n + 15} \\ &= \frac{2(4u_n)}{5(2u_n + 3)} = \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

ب/ كتابة بدالة n عبارة v_n و u_n

$$\text{لدينا: } v_0 = 1 \text{، ومنه: } v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{ولدينا: } v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } v_n = \frac{4u_n + 6 - 6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } v_n = \frac{4u_n + 6}{2u_n + 3} - \frac{6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } v_n = 2 - \frac{6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } 2 - v_n = \frac{6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } \frac{2 - v_n}{6} = \frac{1}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } \frac{6}{2 - v_n} = 2u_n + 3$$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{2 - v_n} - \frac{3}{2} = u_n$$

$$\text{ومنه: } \frac{3v_n}{2(2 - v_n)} = u_n$$

$$\text{ومنه: } u_n = \frac{3 \left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 \left(2 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$$

ج/ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ بطريقة أخرى:

$$P(|X| < X^2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{22}{35}$$

ج/ حساب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P(x_i) = \frac{12}{7}$$

◀ [1م] التمرين الرابع: ﴿07.75﴾

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

• نهايات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

• إشارة $g'(x)$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = 2x - 4x \ln x - \frac{2x^2}{x} = -4x \ln x$$

لدينا، $-4x < 0$ على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا، $\ln x = 0$ معناه، $x = 1$

• جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$-4x$	-	-	-
$\ln x$	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا، الدالة g مستمرة ورتيبة على $]1; +\infty[$

ولدينا، $\begin{cases} g(1.9) \approx -0.02 \\ g(1.8) \approx 0.43 \end{cases}$ ومنه، $g(1.9) \times g(1.8) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

③ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II)

① حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، وتفسير النتائج

هندسيا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 \left(\frac{2}{5} \right)^n}{2 \left(2 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)} \right) = \frac{3 \times 0}{2(2-0)} = 0$$

⑤ تعيين بدالات n المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{6}{2u_0 + 3} + \frac{6}{2u_1 + 3} + \dots + \frac{6}{2u_n + 3} \\ &= 2 - v_0 + 2 - v_1 + \dots + 2 - v_n \\ &= 2(n+1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= 2(n+1) - \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} \\ &= 2(n+1) - \frac{5}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

◀ [1م] التمرين الثالث: ﴿04.25﴾

نختار 3 أعضاء من بين 4 رجال و 3 نساء، أي من بين 7 أشخاص، وعليه، عدد الفرق التي يمكن تشكيلها هو

$$A_7^3 = 210$$

① حساب احتمالات الأحداث:

$$\bullet P(A) = \frac{A_4^3}{A_7^3} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

$$\bullet P(B) = \frac{A_4^3 + 3A_3^1 A_4^2}{A_7^3} = \frac{96}{210} = \frac{22}{35}$$

$$\bullet P(C) = \frac{A_1^1 A_6^2}{A_7^3} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

② تبين أن $P(B \cap C) = \frac{1}{7}$:

$$\bullet P(B \cap C) = \frac{A_1^1 A_4^2 + 2A_1^1 A_3^1 A_4^1}{A_7^3} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

③

أ/ تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

لدينا، $X(0; 1; 2; 3)$

حيث:

$$\bullet P(X = 0) = \frac{A_3^3}{A_7^3} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$\bullet P(X = 1) = \frac{3A_4^1 A_3^2}{A_7^3} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}$$

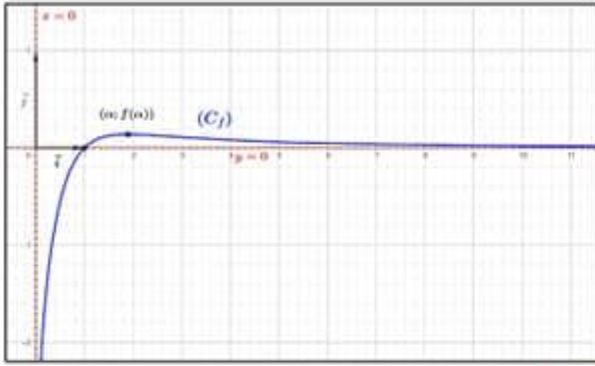
$$\bullet P(X = 2) = \frac{3A_4^2 A_3^1}{A_7^3} = \frac{108}{210} = \frac{18}{35}$$

$$\bullet P(X = 3) = P(A) = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

ومنه:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

ب/ حساب احتمال الحدث $"|X| < X^2"$:



(III)

1 تبين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h .

$$H(x) = \int h(x) dx = \int x^2 \ln x dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left| \begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{array} \right.$$

وعليه،

$$\begin{aligned} H(x) &= \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c \end{aligned}$$

2 تعيين عبارة $G(x)$.

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x g(t) dt \\ &= \int_1^x (1 + t^2 - 2t^2 \ln t) dt \\ &= \int_1^x (1 + t^2) dt - 2 \int_1^x h(t) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{3}t^3 - 2H(t) \right]_1^x \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 - 2H(x) - 1 - \frac{1}{3} + 2H(1) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln x \right) - \frac{14}{9} \end{aligned}$$

3 حساب بدلالة α العدد A_α .

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \int_1^\alpha g(x) dx = [G(x)]_1^\alpha \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln \alpha \right) - \frac{10}{9} \right) - \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{14}{9} \right) \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln \alpha \right) - \frac{10}{9} \right) \times (3 \times 1) \text{ cm}^2 \\ &= \left(3\alpha + \alpha^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln \alpha \right) - \frac{10}{3} \right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) &= 0 \text{ لأن } \\ \text{ومنه: } (C_f) & \text{ يقبل:} \end{aligned}$$

- مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$
- مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$

2

1/ تبين أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - 2x \ln x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1 - 2x^2 \ln x}{x(x^2+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$.

وتشكل جدول تغيراتها،

لدينا: $x(x^2+1)^2 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ ، ومنه،

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

3 تبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$

ومنه: $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$ ، وعليه،

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2 + 1} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

• استنتاج حصر $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} :

لدينا: $1.8 < \alpha < 1.9$

ومنه: $2(1.8)^2 < 2\alpha^2 < 2(1.9)^2$

ومنه: $\frac{1}{2(1.9)^2} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{2(1.8)^2}$

ومنه: $0.13 < f(\alpha) < 0.15$

4 تعيين إحداثي تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه: $(C_f) \cap (xx') = \{(1; 0)\}$

• تمثيل المنحنى (C_f) .

الموضوع الثاني

◀ [2م] التمرين الأول: (04.00)

1 حساب احتمال كل من الأحداث A ، B و C

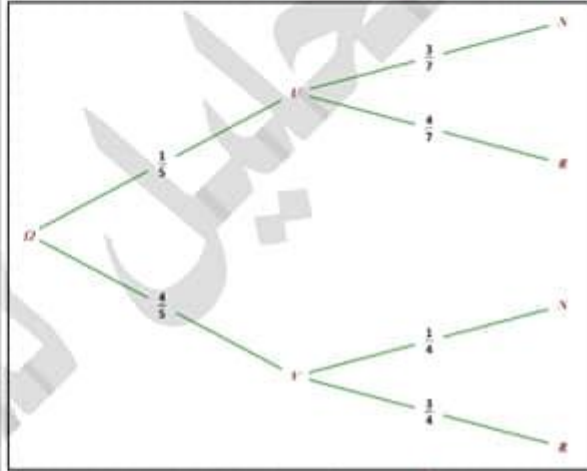
$$P(A) = \frac{C_3^2 C_4^1 + C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$$P(C) = \frac{C_4^3 + C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{22}{35}$$

2

أ/ انجاز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة:



ب/ تبين أن $P(R) = \frac{5}{7}$

$$P(R) = P(U \cap R) + P(V \cap R) = \frac{5}{7}$$

ج/ حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من

الصندوق V علما أنها سوداء:

$$P_N(V) = \frac{P(V \cap N)}{P(N)} = \frac{P(V \cap N)}{1 - P(R)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{7}{10}$$

◀ [2م] التمرين الثاني: (04.50)

1 حساب α^2

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1))^2 \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} + 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1)i(\sqrt{3} + 1) \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} + 1)^2 + (2\sqrt{3} - 2)(i\sqrt{3} + i) \\ &= -4\sqrt{3} + 4i \end{aligned}$$

• تعيين الطول وعمة للعدد المركب α^2

$$|\alpha^2| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

لدينا،

$$\begin{cases} \cos(\arg(\alpha^2)) = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\arg(\alpha^2)) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ومنه،

$$\arg(\alpha^2) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ أي } \arg(\alpha) = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

حيث، $k \in \mathbb{Z}$

2 استنتاج الطول وعمة للعدد المركب α ،

لدينا،

$$\begin{aligned} |\alpha^2| &= 8 \Rightarrow |\alpha|^2 = 8 \\ &\Rightarrow |\alpha| = \sqrt{8} \\ &\Rightarrow |\alpha| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ولدينا،

$$\begin{aligned} \arg(\alpha^2) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi &\Rightarrow 2 \arg(\alpha) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Rightarrow \arg(\alpha) = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{aligned}$$

• كتابة α على الشكل المثلثي:

$$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

3 تعيين القيم المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا،

$$\begin{cases} \alpha = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i2\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \\ \alpha = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

ومنه،

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

ومنه،

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

إذن،

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$$

4 تبين أن $\beta = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\alpha = 2(1 + i)\beta \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2(1 + i)}$$

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2} = \frac{4u_n + 8 - 8}{u_n + 2} = \frac{4u_n + 8}{u_n + 2} - \frac{8}{u_n + 2}$$

$$= 4 - \frac{8}{u_n + 2}$$

نضع: $P(n): 2 < u_n \leq 4$

• لدينا: $2 < u_0 \leq 4$ ومنه: $2 < 4 \leq 4$

إذن: $P(0)$ محققة

• ليكن $n \in \mathbb{N}$

نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$

• لدينا: $2 < u_n \leq 4$

ومنه: $4 < u_n + 2 \leq 6$

ومنه: $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{4}$

ومنه: $-2 < -\frac{8}{u_n + 2} \leq -\frac{8}{6}$

ومنه: $2 < 4 - \frac{8}{u_n + 2} \leq \frac{8}{3}$

ومنه: $2 < 4 - \frac{8}{u_n + 2} \leq 4$

ومنه: $2 < u_{n+1} \leq 4$

② دراسة اتجاه تغير (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{4u_n - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{2u_n - (u_n)^2}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n(2 - u_n)}{u_n + 2}$$

$$\begin{cases} u_n > 0 \\ 2 - u_n < 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$$

لدينا: $2 < u_n \leq 4$ ومنه:

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

③ / اتيين أن (v_n) متتالية حسابية:

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{4u_n}{u_n + 2}}{\frac{4u_n}{u_n + 2} - 2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4u_n}{2u_n - 4}\right) = \ln\left(\frac{4}{2} \times \frac{u_n}{u_n - 2}\right)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{u_n}{u_n - 2}\right)$$

$$= \ln(2) + v_n$$

إذن (v_n) حسابية أساسها $\ln(2)$ وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \ln\left(\frac{u_0}{u_0 - 2}\right) = \ln(2)$$

ب/ كتابة v_n بدلالة n

$$\begin{cases} |1+i| = \sqrt{2} \\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

لدينا:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$\alpha = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

إذن:

$$\beta = \frac{\alpha}{2(1+i)} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

• كتابة β على الشكل الجبري:

لدينا:

$$\beta = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نضع: $\beta = x + iy$ ومنه:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

⑤

أ/ تبين أن النقطة B تنتمي إلى (γ)

لدينا:

$$|z_B - \sqrt{3} - i| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \sqrt{3} - i\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

إذن: $B \in (\gamma)$

ب/ تعيين الطليعة والعناصر المميزة للمجموعة (γ)

لدينا:

$$|z - \sqrt{3} - i| = 1 \Rightarrow |z - (\sqrt{3} + i)| = 1$$

$$\Rightarrow |z - z_A| = 1$$

$$\Rightarrow AM = 1$$

إذن: (γ) هي دائرة مركزها النقطة A ونصف قطرها 1

◀ [م] التمرين الثالث: (04.00)

① برهان بالتراجع أن: $2 < u_n \leq 4$

لدينا:

ولدينا، $x = -1$ معناه، $1 + x = 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$g(-1)$	$+\infty$

② استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ،

لدينا، $g(-1) = 1 - e^{-1} \approx 0.63 > 0$
الدالة g تبلغ قيمة حدية صغرى موجبة تماما
إذن، $g(x) > 0$

(II)

① حساب نهايات الدالة f ،

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} \right) = 1$
 - لأن، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- التفسير الهندسي، (C_f) يقبل،

- مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$
- مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$

② أ/ تبين أن $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي،

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1) - e^x(e^x + x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها،

لدينا، $(e^x - 1)^2 > 0$ ومنه،

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	1

③ تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها α حيث، $-0.6 < \alpha < -0.5$ ،

الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty; 0[$

$$\{ f(-0.6) \approx 0.11$$

$$\{ f(-0.5) \approx -0.27$$

$$\text{ولدينا } f(-0.6) \times f(-0.5) < 0 \text{ أي،}$$

$$v_n = \ln(2) + n \ln(2) = (n+1) \ln 2 = \ln 2^{n+1}$$

• استنتاج أن، $u_n = \frac{2}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}$

لدينا: $v_n = \ln \left(\frac{u_n}{u_n - 2} \right)$

$$\text{ومنه: } e^{v_n} = \frac{u_n}{u_n - 2}$$

$$\text{ومنه: } u_n e^{v_n} - 2e^{v_n} - u_n = 0$$

$$\text{ومنه: } u_n(e^{v_n} - 1) = 2e^{v_n}$$

$$\text{ومنه: } u_n = \frac{2e^{v_n}}{e^{v_n} - 1}$$

$$\text{ومنه: } u_n = \frac{2 \times 2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$$

$$\text{ومنه: } u_n = \frac{2 \times 2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} \times \frac{2^{-n-1}}{2^{-n-1}}$$

$$\text{ومنه: } u_n = \frac{2}{1 - 2^{-n-1}} = \frac{2}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}$$

ج/ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}} \right) = \frac{2}{1 - 0} = 2$$

$$\text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = 0$$

④ اكتب بدلالة n كل من S_n و P_n ،

لدينا، $e^{v_n} = e^{\ln 2^{n+1}} = 2^{n+1}$ ومنه،

$$S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n}$$

$$= 2^{0+1} + 2^{1+1} + \dots + 2^{n+1}$$

$$= 2(2^0 + 2^1 + \dots + 2^n)$$

$$= 2 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right)$$

$$= 2(2^{n+1} - 1)$$

$$\text{و } P_n = (u_0 + 2)(u_1 + 2) \times \dots \times (u_n + 2)$$

◀ [م 2] التمرين الرابع: (07.50)

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ،

- النهايات،

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

- إشارة $g'(x)$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي،

$$g'(x) = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

$$\text{لدينا، } e^x > 0$$

إذن قيم الوسيط m حتى المعادلة $m + f(x) = 0$ حلين مختلفين في الإشارة،

هي: $(-m) \in]1; +\infty[$ أي لما $m \in]-\infty; -1[$

(III)

1 تبين أن $h(x) = f(-x) - 1$

$$\begin{aligned} h(x) &= f(-x) - 1 = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} - 1} - 1 \\ &= \frac{e^{-x} - x - e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{1 - x}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{x - 1}{1 - e^{-x}} = h(x) \end{aligned}$$

2 شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقاً من (C_f)

نضع: $f(-x) = k(x)$

ومنه: $h(x) = f(-x) - 1$

معناه: $h(x) = k(x) - 1$

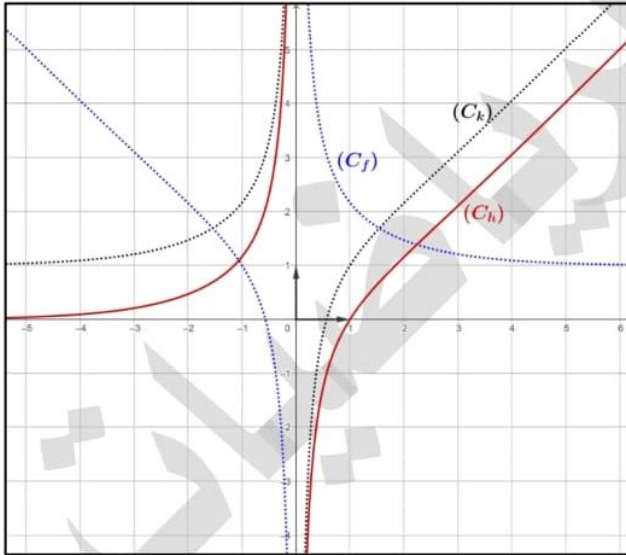
• نرسم (C_k) منحنى الدالة k ، حيث (C_k) هو نظير

(C_f) بالنسبة لمحور الترتيب

• نرسم (C_h) صورة (C_k) بالانسحاب الذي شعاعه

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• الإنشاء:



بالتوفيق في شهادة البكالوريا



♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $\alpha \in]-0.6; -0.5[$

4 / تبين أن (D) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + x}{e^x - 1} + x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + x + xe^x - x}{e^x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} \right] = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

إذن: (D) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) :

$$f(x) - (-x) = \frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} = \frac{e^x(x+1)}{e^x - 1}$$

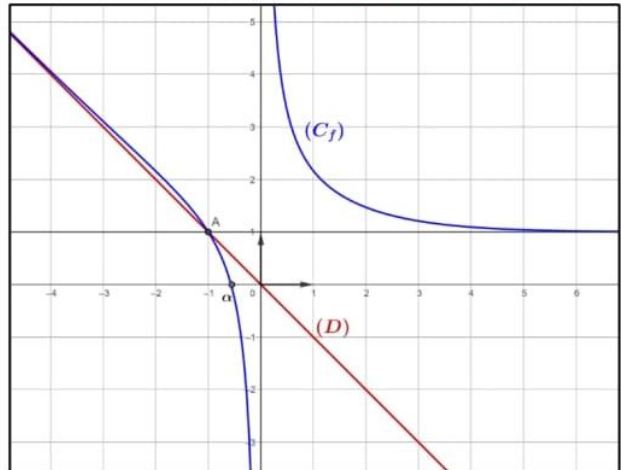
لدينا: $e^x > 0$

ولدينا: $x + 1 = 0$ معناه $x = -1$

ولدينا: $e^x - 1 \neq 0$ معناه: $x \neq 0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$e^x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x) - (-x)$	$+$	0	$-$	$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (D) في $A(-1; 1)$	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)

5 تمثيل بياني كل من (C_f) و (D) :



6 تعيين قيم الوسيط الحقيقي حتى تقبل المعادلة

$m + f(x) = 0$ حلين مختلفين في الإشارة،

لدينا: $m + f(x) = 0$ معناه: $f(x) = -m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلات $y = -m$