الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الشلف **ثانوية جلول بلخير بأولاد محمد ـشلفـ**

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي **دورة : ماي 2023**

الشعبة : علوم تجريبية

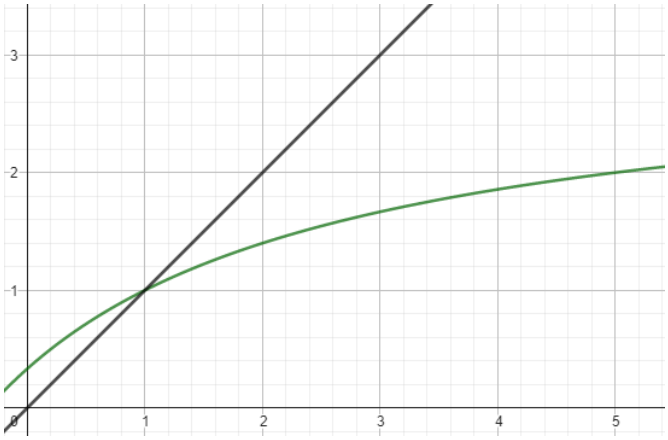
اختبار في مادة : الرياضيات **المدة : 03 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x$.



α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 حيث : $u_0=\alpha$ ؛ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

I) 1) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

2) أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

II) نضع في كل مايلي : $\alpha=5$.

1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل احدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود) .

ب) بالبرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$5 \le u_n < u_{n+1} < 1$ ، ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ يطلب تعين حدها الأول .

ب) عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2022}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n=\dfrac{1}{u_n+1}+\dfrac{1}{u_{n+1}+1}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n+2022}+1}$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $(\bar{z}+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

1) بين أن $z_B-z_A=i(z_C-z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته .

2) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث : $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_C}$.

ب) اكتب على الشكل الأسي العدد $z_C - z_A$ ثم بين أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\frac{\pi}{12}$.

3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعرف بـ : $z' = L(z - z_B) + z_B$.

✓ بين أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة .

4) لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$.

✓ احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

5) عين (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

التمرين الثالث : (03 نقاط)

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من مجموعة أشخاص ثلاث رجال هم : عمر ، سفيان ، فاروق وأربع نساء هن : رغد ، آمنة ، يقين ، سجى .

1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : 42 .

2) نعتبر الحوادث الآتية : A " اللجنة من نفس الجنس" B " اللجنة من جنسين مختلفين "

C " عمر هو الرئيس " D " اللجنة لاتضم كلا من فاروق و رغد "

أ) احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$. ب) احسب $P(C)$ و $P(D)$.

3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها . عين قانون احتمال X .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-1)\ln x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشار كل من $\frac{x-1}{x}$ و $\ln x$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $\frac{x-1}{x} + \ln x$.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$. ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) h الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = x - 2 + \ln x$.

أ) بين أن الدالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب) برهن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.5 < \alpha < 1.6$ ثم بين أن $\ln(\alpha) = 2 - \alpha$.

ج) بين أن $y = \left(\frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha}\right)x$ معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α .

4) أنشئ (T) و (C_f) على $]0;4]$ (نأخذ $\frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} \approx 0.8$)

5) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $f(x) - x = (x-1)(-1 + \ln x)$.

ب) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $f(x) - x$.

6) K الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $K(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $K'(x) = f(x) - x$.

ب) احسب μ مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$.

7) g الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x) = (x+1)\ln(x+2)$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2;+\infty[$: $g(x) = f(x+2) - 1$.

ب) استنتج أن (C_g) صورة (C_f) بتحويل نقطي يطلب تحديده . (لايطلب إنشاء (C_g))

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة والموجبة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}+\ln(x+b)$ حيث a و b عددان حقيقيان مع b موجب تماما تمثيلها البياني (C_f) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يقبل حامل محور الفواصل مماسا له في النقطة O.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f(x)=-1+\dfrac{1}{x+1}+\ln(x+1)$.

2) g الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(x+1)\ln(x+1)$

✓ احسب $g'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\int_{n-1}^{n} f(x)dx$

أ) احسب $u_{2\ 23}$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n=-2+(n+2)\ln(n+1)-(n+1)\ln(n)$.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام : 2 ، 2 و 3 ويحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء وتحمل كل منها الرقم 3 وخمس كريات حمراء تحمل الأرقام : 1، 2، 2 3 و 4.

الكريات لايمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ونسجل رقمها وليكن n .

إذا كان : $n=2$ نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي دون إرجاع .

إذا كان : $n=3$ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 ؛

نعتبر الحادثين التاليتين :

A : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون " B : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم "

1) أ) بين أن $P(A)=\dfrac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$. ب) بين أن $P(A\cap B)=\dfrac{55}{378}$ ثم استنتج : $P_A(B)$.

ج) هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل إجابتك .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2 .

✓ عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) احسب $P\left(X^2=2^X\right)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير .

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=u_n+\alpha n$ حيث α عدد حقيقي .

✓ قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{3}$ هي :

أ) $\alpha=-1$ ب) $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ ج) $\alpha=0$

2) H دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x)=(ax+b)e^{-x}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

✓ قيم العددين الحقيقين a و b بحيث تكون H حل للمعادلة التفاضلية : $y-y'=(2x-3)e^{-x}$ هي :

أ) $a=1$ و $b=-1$ ب) $a=2$ و $b=-3$ ج) $a=1$ و $b=1$

3) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن A نقطة ذات اللاحقة $z_A=\sqrt{3}-i$ و B نقطة ذات اللاحقة $z_B=2i$ نعتبر (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $|\bar{z}+2i|=|z-\sqrt{3}+i|$

✓ إذن (Δ) هي :

أ) محور القطعة $[AB]$ ب) دائرة قطرها $[AB]$ ج) مجموعة خالية

4) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\ln(1+e^x)$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\ln(1+e^{-x})$ ؛ (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

✓ إذن (C_f) و (C_g) :

أ) متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل ب) متناظران بالنسبة لحامل محور التراتيب ج) متناظران بالنسبة لمبدأ المعلم

5) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+1)e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم .

✓ القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;0]$ هي :

أ) $\frac{k-1}{k^2}+\frac{e^{-k}}{k^2}$ ب) 0 ج) $\frac{1-k}{k^2}-\frac{e^{-k}}{k}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x^2-3)e^x+3$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق : $1.53<\alpha<1.54$.

ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x+1+(x^2-2x-1)e^x$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ج) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تحقق : $2.03<\beta<2.04$.

د) بين أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لـ : (Δ) . (لا يطلب كتابة معادلة (T) و (T'))

4) ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) على $]-\infty;1+\sqrt{2}]$.

(نأخذ : $\alpha\approx1.53$ ، $f(\alpha)\approx-2.3$ ، $f(\sqrt{3})\approx-2.1$ و $f(-\sqrt{3})\approx-3.2$)

5) الدالة العددية h معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=f(\ln(x))$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$. ب) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	المجموع

الموضوع الأول

التمرين الأول 05 نقاط

I) لدينا :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{و} \quad f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$$

1) المتتالية (u_n) ثابتة معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n = u_0$

بما أن $u_0 = \alpha$ إ ن $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha$ و $\alpha \in \mathbb{R}^+$ معناه $\alpha = 1$

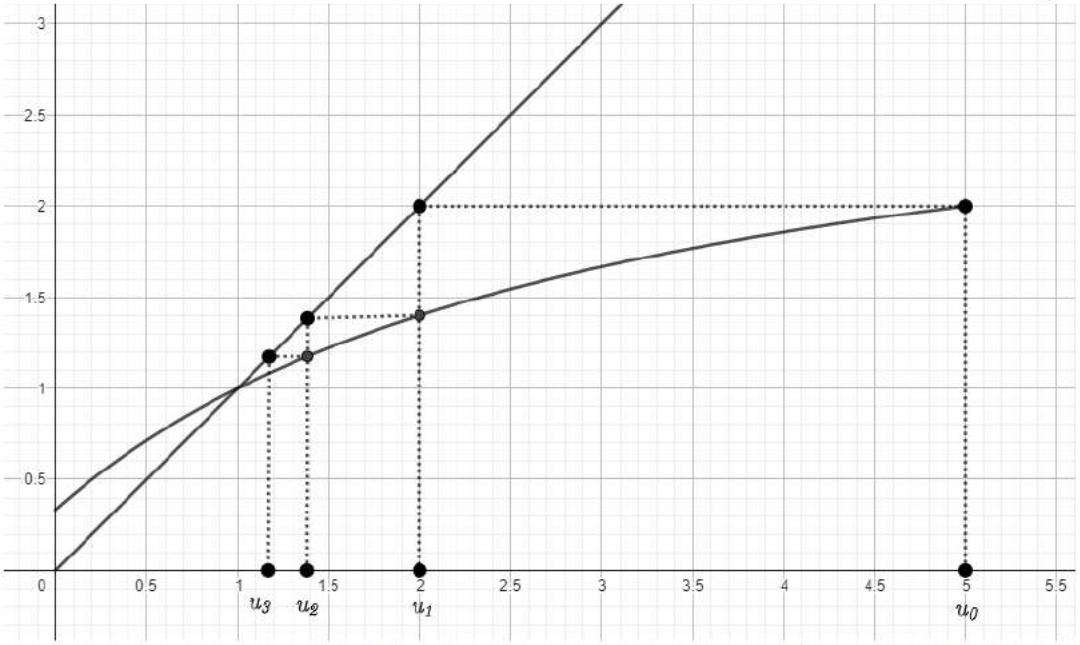
2) من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ الدالة f قابلة للاشتقاق :

$$f'(x) = \frac{8}{(x+3)^2}$$

بما أن من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$: $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$.

II) نضع في كل ما يلي : $\alpha = 5$

1) أ) تمثيل الحدود u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 و u_3 :



ب) نسمي $P(n)$ الخاصية من أجل عدد طبيعي n : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$

التحقق من صحة $P(0)$: لدينا : $u_0 = 5$ و $u_1 = 2$ و $1 < 2 < 5 \leq 5$ إذن $1 < u_1 < u_0 \leq 5$ إذن $P(0)$ صحيحة .

نفرض صحة $P(n)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$ ولنثبت صحة $P(n+1)$ أي لنبرهن :

$1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 5$.

لدينا : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$ بما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$ إذن $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(5)$

إذن $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2 \leq 5$ إذن $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$ محققة إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أي : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$.

نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من أسفل إذن هي متقاربة .

2) لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{2}{3}$.

ب) بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{2}{3}$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=v_0q^n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ إذن $u_n=\dfrac{-v_n-1}{v_n-1}$ إذن $u_n=\dfrac{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$.

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=1$$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ لأن : $-1<\dfrac{1}{2}<1$.

3) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

$$S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2022}=v_n\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+20\ 2-n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{1}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}\right)=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا : $\dfrac{1}{u_n+1}=\dfrac{1}{\frac{-v_n-1}{v_n-1}+1}=-\dfrac{1}{2}v_n+\dfrac{1}{2}$ إذن

$$S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\ldots+\frac{1}{u_{n+2022}+1}$$

$$S'_n=\left(-\frac{1}{2}v_n+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}v_{n+1}+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{2}v_{n+2022}+\frac{1}{2}\right)$$

$$S_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2022}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}$$

$$S'_n=-\frac{1}{2}S_n+\frac{1}{2}(2023)$$

$$S'_n=-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2023}{2}$$

التمرين الثاني 05 نقاط

I) حل المعادلة ذات المجهول المركب z :

$\left(\bar{z}+1-\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$ تكافئ $z^2+2z+4=0$ أو $\bar{z}+1-\sqrt{3}=0$

$\bar{z}+1-\sqrt{3}=0$ تكافئ $z=-1+\sqrt{3}$ تكافئ $\bar{z}=-1+\sqrt{3}$

$z^2+2z+4=0$ إذن $\Delta=(2)^2-4(1)(4)=-12=12i^2$ معناه $z^2+2z+4=0$ تقبل حلين متمايزين :

$z_1=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $\left(\bar{z}+1-\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$ هي : $\left\{-1+\sqrt{3};-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\right\}$.

II) لدينا : $A\left(z_A=-1+\sqrt{3}\right)$ ، $B\left(z_B=-1-i\sqrt{3}\right)$ و $C\left(z_C=-1+i\sqrt{3}\right)$

1) لدينا :

$$\begin{aligned}\left(z_B-z_A\right)-i\left(z_C-z_A\right)&=-1-i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-i\left(-1+i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}\right)\\&=-\sqrt{3}-i\sqrt{3}-i\left(-\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)\\&=-\sqrt{3}-i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\left(z_B-z_A\right)-i\left(z_C-z_A\right)=0$

إذن $\left(z_B-z_A\right)=i\left(z_C-z_A\right)$

بما أن : $\left(z_B-z_A\right)=i\left(z_C-z_A\right)$ معناه $\dfrac{\left(z_B-z_A\right)}{\left(z_C-z_A\right)}=i$ معناه $\begin{cases}\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg(i)\\\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=|i|\end{cases}$

معناه $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\pi}{2}\\\dfrac{AB}{AC}=1\end{cases}$ معناه المثلث ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين .

نرمز بـ ζ_{ABC} إلى مساحته المثلث ABC :

بما أن المثلث ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين إذن

$$\zeta_{ABC}=\frac{AB^2}{2}=\frac{\left|z_B-z_A\right|^2}{2}=\frac{\left|-i\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|^2}{2}=\frac{6}{2}=3\quad u.a$$

2) أ) كتابة L على الشكل الجبري :

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_C}=\frac{\left(-1+i\sqrt{3}+1-\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{-i\sqrt{3}+\sqrt{3}+3+3i}{1+3}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}+i\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

ب) كتابة $z_C - z_A$ على الشكل الأسي :

$$z_C - z_A = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$$
$$|z_C - z_A| = \sqrt{6}$$

لتكن θ_1 عمدة لـ $z_C - z_A$:

$$\arg(z_C - z_A) = \frac{3\pi}{4} \text{ إذن } \begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

إذن $z_C - z_A = \sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

لدينا :

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{z_C}$$

كتابة z_C على الشكل الأسي :

$$|z_C| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$$

لتكن θ_C عمدة لـ z_C :

$$\arg(z_C) = \frac{2\pi}{3} \text{ إذن } \begin{cases} \cos(\theta_C) = \frac{-1}{2} \\ \sin(\theta_C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

إذن $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ إذن $L = \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{z_C} = \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

لدينا : $L = \frac{3+\sqrt{3}}{4} + i\frac{3-\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

إذن $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ إذن $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = 2 - \sqrt{3}$.

3) لدينا : S تحويل نقطي عبارته المركبة $z' = L(z - z_B) + z_B$ معناه $z' - z_B = L(z - z_B)$

بما أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ إذن $L \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $|L| = \frac{\sqrt{6}}{2} \neq 1$ معناه S تشابه مباشر نسبته $k = |L| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ،زاويته $\omega = \arg L = \frac{\pi}{12}$ ومركزه النقطة $B(z_B = -1 - i\sqrt{3})$.

4) تعين العناصر المميزة للتحويل النقطي $S \circ S$:

لتكن النقطة $M"(z")$ صورة النقطة $M(z)$ بالتحويل $S \circ S$ معناه

$$M" = (S \circ S)(M) = S(S(M)) = S(M')$$

إذن

$z'' = L(z' - z_B) + z_B = L\Big(\big(L(z - z_B) + z_B\big) - z_B\Big) + z_B$

$z'' = L^2(z - z_B) + Lz_B - Lz_B + z_B = L^2(z - z_B) + z_B$

$z'' - z_B = L^2(z - z_B)$

بما أن : $L^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ إذن $L^2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $\left|L^2\right| = \frac{3}{2} \neq 1$ معناه $S \circ S$ تشابه مباشر نسبته

$k' = \left|L^2\right| = \frac{3}{2}$ ، زاويته $\omega' = \arg L^2 = \frac{\pi}{6}$ ومركزه النقطة $B\left(z_B = -1 - i\sqrt{3}\right)$.

ملاحظة : $(S \circ S)(B) = S\big(S(B)\big) = S(B) = B$

بما أن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر $S \circ S$ فإن $\zeta_{A'B'C'}$ مساحته المثلث $A'B'C'$ تعطى بالشكل التالي : $\zeta_{A'B'C'} = (k')^2 \zeta_{ABC} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 3 = 6\,75 \quad u.a$.

5) تعين (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما :

ليكن z من $\mathbb{C}$ بحيث $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما

معناه $q \in \mathbb{Z}$; $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right) = 2q\pi$ و $z \neq z_A$ و $z \neq z_B$

معناه $q \in \mathbb{Z}$; $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 2q\pi$ و $z \neq z_A$ و $z \neq z_B$

معناه $q \in \mathbb{Z}$; $\left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}\right) = 2q\pi$ و $M \neq A$ و $M \neq B$

معناه (Δ) هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.

التمرين الثالث 03 نقاط

1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$ لأنه تم عشوائيا اختيار رئيس ونائب لـ من بين سبعة أشخاص .

2) أ)

A " اللجنة من نفس الجنس"

$$P(A) = \frac{A^2 + A_4^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

B " اللجنة من جنسين مختلفين " إذن الحادثة B هي الحادثة العكسية للحادثة A

$$P(B) = P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

ب)

C " عمر هو الرئيس "

$$P(C) = \frac{A_1^1 \times A_6^1}{A_7^2} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

D " اللجنة لا تضم كلا من فاروق ورغد "

$$P(D) = \frac{A_5^2}{A_7^2} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها :

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0;1;2\}$

$$P(X=0)=\frac{A_4^2}{A_7^2}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

$$P(X=1)=P(B)=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=1-\frac{2}{7}-\frac{4}{4}=\frac{1}{7}$$

قانون احتمال X :

x	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

التمرين الرابع 07 نقاط

$$f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=1+(x-1)\ln x$$

1) أ)

إشارة $\frac{x-1}{x}$ على $]0;\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
x 1	‖	$-$	0	$+$	
x	‖	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$	‖	$-$	0	$+$	

إشارة $\ln(x)$ على $]0;\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب)

من أجل $0<x<1$: $\frac{x-1}{x}<0$ و $\ln(x)<0$ إذن $\frac{x-1}{x}+\ln(x)<0$

من أجل $x=1$: $\frac{x-1}{x}=0$ و $\ln(x)=0$ إذن $\frac{x-1}{x}+\ln(x)=0$

من أجل $x>1$: $\frac{x-1}{x}>0$ و $\ln(x)>0$ إذن $\frac{x-1}{x}+\ln(x)>0$

إشارة $\frac{x-1}{x}+\ln(x)$ على $]0;\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$\frac{x-1}{x}+\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) أ) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+(x-1)\ln(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} 1+(x-1)\ln(x)=+\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل $x\in]0;+\infty[$ الدالة f قابلة للاشتقاق :

$$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln(x)$$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) لدينا :

$$h:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto h(x)=x-2+\ln(x)$$

أ) من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ الدالة h قابلة للاشتقاق :

$$h'(x)=1+\frac{1}{x}$$

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $1+\frac{1}{x}>0$ إذن الدالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب) الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على $]1.5;1.6[$

و $h(1.5)\approx -0.0945$ ، $h(1.6)\approx 0.07$ أي $h(1.5)\times h(1.6)<0$

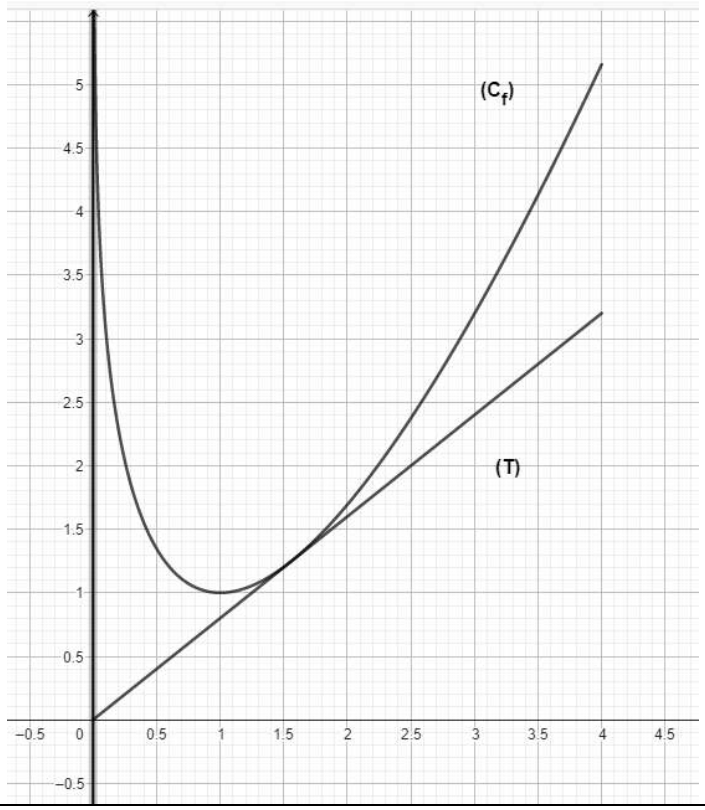
إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.5<\alpha<1.6$.

بما أن : $h(\alpha)=0$ معناه $\alpha-2+\ln(\alpha)=0$ معناه $\ln(\alpha)=2-\alpha$.

ج) معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α تعطى بالشكل :

$$(T):y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$
$$f'(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}+\ln(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}+2-\alpha=\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}$$
$$f(\alpha)=1+(\alpha-1)\ln(\alpha)=1+(\alpha-1)(2-\alpha)=-\alpha^2+3\alpha-1$$
$$(T):y=\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}(x-\alpha)+-\alpha^2+3\alpha-1$$
$$(T):y=\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}x+\alpha^2-3\alpha+1-\alpha^2+3\alpha-1$$
$$(T):y=\frac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}x$$

4) إنشاء (T) و (C_f) على $]0;4]$:



5) أ) ليكن $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x)-x &= 1+(x-1)\ln(x)-x \\ &= 1-x+(x-1)\ln(x) \\ &= -(x-1)+(x-1)\ln(x) \\ &= (x-1)(-1+\ln(x)) \end{aligned}$$

ب) دراسة إشارة $f(x)-x$ على $]0;+\infty[$:

$-1+\ln(x) \geq 0$ تكافئ $\ln(x) \geq 1$ تكافئ $x \geq e$

x	0		1		e	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$
$-1+\ln(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$

6) لدينا :

$$K :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto K(x) = -\frac{3}{4}x^2+2x+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln(x)$$

أ) من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ الدالة K قابلة للاشتقاق :

$$\begin{aligned} K'(x) &= -\frac{3}{2}x+2+(x-1)\ln(x)+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{3}{2}x+2+(x-1)\ln(x)+\frac{1}{2}x-1 \\ &= 1+(x-1)\ln(x)-x \\ &= f(x)-x \end{aligned}$$

ب) μ مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات $y=x$ ؛ $x=1$ و $x=e$ تعطى بالشكل :

$$\mu=\int_1^e x-f(x)\,dx=\int_1^e -K'(x)\,dx=\left[-K(x)\right]_1^e$$

$$\mu=\frac{3}{4}e^2-2e-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{3}{4}+2 \quad u.a$$

$$\mu=\frac{1}{4}e^2-e+\frac{5}{4} \quad u.a$$

$$\mu=\left(\frac{1}{4}e^2-e+\frac{5}{4}\right)\left(4cm^2\right)$$

$$\mu=e^2-4e+5 \quad cm^2$$

7) لدينا :

$$g:]-2;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto g(x)=(x+1)\ln(x+2)$$

أ) ليكن $x\in]-2;+\infty[$:

إذن $x>-2$ إذن $x+2>0$ إذن

$$f(x+2)-1=1+\big((x+2)-1\big)\ln(x+2)-1$$
$$=(x+1)\ln(x+2)$$
$$=g(x)$$

ب) بما أن : من أجل كل $x\in]-2;+\infty[$ فإن $x+2\in]0+\infty[$ و $g(x)=f(x+2)-1$

معناه النحنى (C_g) صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب شعا ه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول 04 نقاط

لدينا :

$$f:]-1;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x)=\frac{ax}{x+b}+\ln(x+b)$$

1) بما أن : (C_f) يقبل حامل محور الفواصل مماسا له في النقطة O

إذن $f(0)=0$ و $f'(0)=0$

$f(0)=0$ معناه $\ln(b)=0$ معناه $b=1$

بما أن من أ ل كل $x\in]-1;+\infty[$ الدالة f قابلة للاشتقاق :

$$f'(x)=\frac{ab}{(x+b)^2}+\frac{1}{x+b}$$

$f'(0)=0$ معناه $\frac{ab}{b^2}+\frac{1}{b}$ 0

بما أن : $b=1$ إذن $a=-1$

إذن من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f(x)=\frac{-x}{x+1}+\ln(x+1)$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$-1+\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)=\frac{-x-1+1}{x+1}+\ln(x+1)=\frac{-x}{x+1}+\ln(x+1)=f(x)$$

2) لدينا :

$$g:]-1;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$\mapsto g(x)=(x+1)\ln(x+1)$$

بما أن من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ الدالة g قابلة للاشتقاق :

$$g'(x)=\ln(x+1)+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right)=\ln(x+1)+1$$

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ إذن تقبل دوال أصلية لتكن F دالة أصلية للدالة f على الجال $]-1;+\infty[$

$$f(x)=-1+\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)$$

إذن

$$F(x)=-x+\ln(x+1)+g(x)-x$$
$$F(x)=-2x+\ln(x+1)+(x+1)\ln(x+1)$$

3) أ) حساب u_{2023} :

$$u_{2023}=\int_{2022}^{2023}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{2022}^{2023}$$
$$u_{2023}=-2(2023)+\ln(2024)+(2024)\ln(2024)+2(2022)-\ln(2023)-(2023)\ln(2023)$$
$$u_{2023}=-2+\ln\left(\frac{2024}{2023}\right)+\ln\left(\frac{2024^{2024}}{2023^{2023}}\right)$$
$$u_{2023}=-2+\ln\left(\frac{2024^{2025}}{2023^{2024}}\right)$$

بما أن الدالة f موجبة على $]-1;+\infty[$ إذن u_{2023} يمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=2022$ و $x=2023$.

ب) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{n-1}^{n}$$

$$u_n = -2n + \ln(n+1) + (n+1)\ln(n+1) + 2(n-1) - \ln((n-1)+1) - ((n-1)+1)\ln((n-1)+1)$$

$$u_n = -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln(n)$$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln(n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -2 + n\ln(n+1) + 2\ln(n+1) - n\ln(n) - \ln(n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -2 + n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \ln\left(n+2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

التمرين الثاني 04 نقاط

1) أ) A " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون"

$$P(A) = P(n=2)\times P_{n=2}(A) + P(n=3)\times P_{n=3}(A)$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{A_4^2 + A_5^2}{A_9^2} + \frac{1}{3}\times\frac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3}$$

$$= \frac{19}{54}$$

B " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس الرقم"

$$P(B)=P(n=2)\times P_{n=2}(B)+P(n=3)\times P_{n=3}(B)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{A_5^2+A_2^2}{A_9^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_5^3}{C_9^3}$$
$$=\frac{46}{189}$$

ب)

$$P(A\cap B)=P(n=2)\times P_{n=2}(A\cap B)+P(n=3)\times P_{n=3}(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{A_4^2+A_2^2}{A_9^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_4^3}{C_9^3}$$
$$=\frac{55}{378}$$
$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{55}{378}}{\frac{19}{54}}=\frac{55}{133}$$

ج) بما أن : $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ معناه الحادثتين A و B غير مستقلتين .

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0\ 1;2;3\}$

$$P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{A_4^2}{A_9^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{8}{63}$$
$$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{\left(A_4^1\times A_5^1\right)\frac{2!}{1!\times 1!}}{A_9^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C^2\times C_5^1}{C_9^3}=\frac{185}{378}$$
$$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{A_5^2}{A_9^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_4^1\times C^2}{C_9^3}=\frac{65}{189}$$
$$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{126}$$

قانون احتمال X :

x	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{63}$	$\frac{185}{378}$	$\frac{65}{189}$	$\frac{5}{126}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=4}x_iP(X=x_i)$$
$$=0\times\frac{8}{63}+1\times\frac{185}{378}+2\times\frac{65}{189}+3\times\frac{5}{126}$$
$$=\frac{35}{27}$$

3)

$$P(X^2=2^x)=P(X=2)=\frac{65}{189}$$

التمرين الثالث 05 نقاط			
1)	الاقتراح الصحيح (أ) التبرير :		
	(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ إذن $v_2=\frac{2}{3}v_1$		
	$v_2=\frac{2}{3}v_1$ معناه $u_2+2\alpha=\frac{2}{3}(u_1+\alpha)$ معناه $\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}\times 1+1+2\alpha=\frac{2}{3}(u_1+\alpha)$		
	معناه $\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+1+2\alpha=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\alpha$ معناه $4+1+3+6\alpha=4+2\alpha$ معناه $\alpha=-1$.		
2)	الاقتراح الصحيح (أ) التبرير :		
	H حل للمعادلة التفاضلية $y-y'=(2x-3)e^{-x}$ معناه $H(x)-H'(x)=(2x-3)e^{-x}$		
	معناه $(ax+b)e^{-x}-ae^{-x}+(ax+b)e^{-x}=(2x-3)e^{-x}$ معناه $(2ax+2b-a)e^{-x}=(2x-3)e^{-x}$		
	معناه $2ax+2b-a=2x-3$ معناه $2a=2$ و $2b-a=-3$ معناه $a=1$ و $b=-1$		
3)	الاقتراح الصحيح (أ) التبرير :		
	(Δ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $\left\|\overline{z}+2i\right\|=\left|z-\sqrt{3}+i\right|$		
	$\left\|\overline{z}+2i\right\|=\left|z-\sqrt{3}+i\right|$ معناه $\left|\overline{z-2i}\right|=\left|z-\left(\sqrt{3}-i\right)\right|$ معناه $\left|z-2i\right|=\left|z-\left(\sqrt{3}-i\right)\right|$		
	معناه $\left|z-z_B\right|=\left|z-z_A\right|$ معناه $BM=AM$		
	معناه (Δ) محور القطعة $[AB]$		
4)	الاقتراح الصحيح (أ) التبرير :		
	ليكن $x\in\mathbb{R}$:		
	$g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x\right)$		
	$g(x)=\ln\left(1+e^x\right)-x=-\left(x-\ln\left(1+e^x\right)\right)$		
	$g(x)=-f(x)$		
	معناه (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل .		
5)	الاقتراح الصحيح (أ) التبرير :		
	$m=\frac{1}{0-(-1}\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)e^{kx}dx=\left[\frac{(x+1)e^{kx}}{k}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\frac{1}{k}e^{kx}dx$		
	$m=\frac{1}{k}-\left[\frac{1}{k^2}e^{kx}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}+\frac{e^{-k}}{k^2}=\frac{k-1}{k^2}+\frac{e^{-k}}{k^2}$		
التمرين الرابع 07 نقاط			
I)	لدينا :		
	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$		
	$x\mapsto g(x)=\left(x^2-3\right)e^x+3$		
1)	دراسة تغيرات الدالة g :		
	$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3\right)e^x+3=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x-3e^x+3=3$		

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-3\right)e^x + 3 = +\infty$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ الدالة g قابلة للاشتقاق :

$g'(x) = 2xe^x + \left(x^2-3\right)e^x = \left(x^2+2x-3\right)e^x$

إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$		
e^x	$+$		$+$		$+$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

اتجا تغير الدالة g :

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-3;-\infty[$ و المجال $]1;+\infty]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-3;1]$.

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$g(x)$	3	↗	$g(-3)=\frac{6}{e^3}+3$	↘	$g(1)=-2e+3$	↗	$+\infty$

2) أ) الدالة g مستمرة ورتيبة على $[1.53;1.54]$

بما أن : $g(1.53)\approx -0.04$ ، $g(1.54)\approx 0.06$ أي $g(1.53)\times g(1\ 54)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1.53<\alpha<1.54$.

ب)

$g(0) = \left(0^2-3\right)e^0 + 3 = 0$

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

II) لدينا :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f(x) = 3x+1+\left(x^2-2x-1\right)e^x$$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1+\left(x^2-2x-1\right)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1+x^2e^x-2xe^x-e^x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1+\left(x^2-2x-1\right)e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+1+x^2e^x-2xe^x-e^x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x\left(\frac{3}{e^x}+\frac{1}{xe^x}+x-2-\frac{1}{x}\right) = +\infty$

2) أ) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ الدالة f قابلة للاشتقاق :

$f'(x) = 3+(2x-2)e^x+\left(x^2-2x-1\right)e^x = \left(x^2-3\right)e^x+3 = g(x)$

ب) إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و المجال $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)=0$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3)

أ) لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(3x+1)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty} x^2e^x-2xe^x-e^x=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-(3x+1)=(x^2-2x-1)e^x$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-(3x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية بين (C_f) و (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

$$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{\left(1-\sqrt{2};4-3\sqrt{2}\right);\left(1+\sqrt{2};4+3\sqrt{2}\right)\right\}$$

ج) الدالة f مستمرة ورتيبة على $[2.03;2.04]$

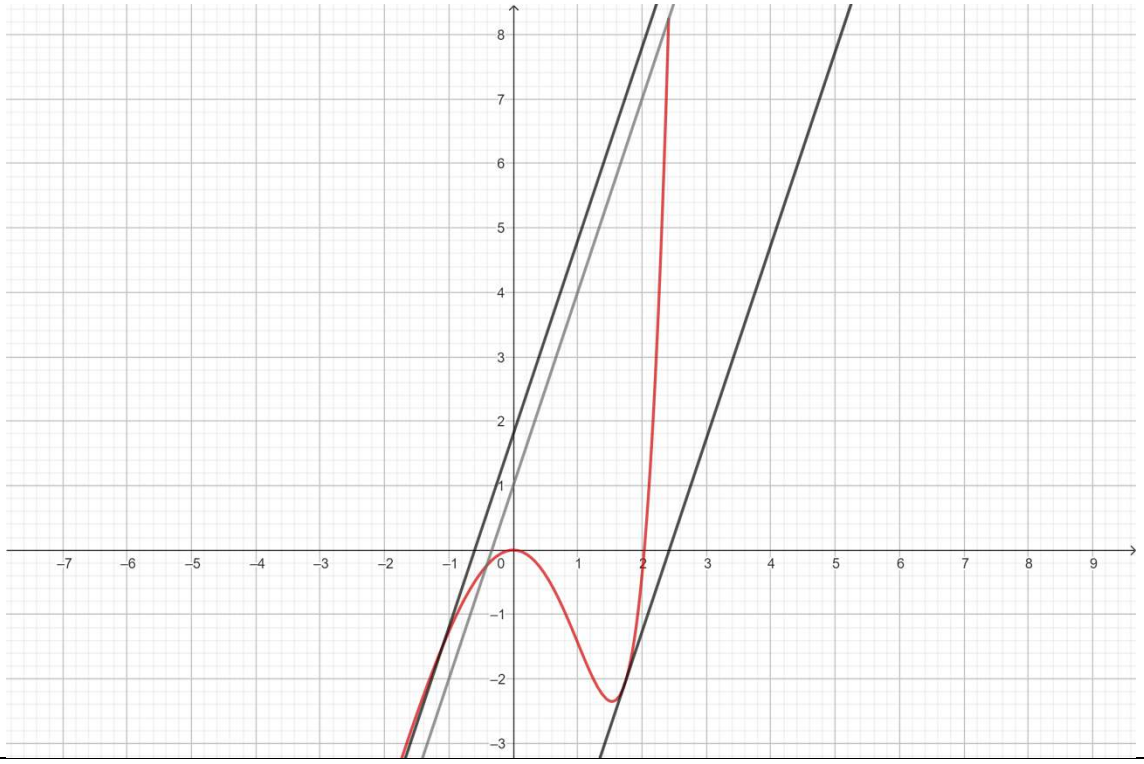
بما أن : $f(2.03)\approx-0.06$ ، $f(2.04)\approx0.05$ أي $f(2.03)\times f(2.04)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد β ، حيث : $2.03<\beta<2.04$.

إذن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة $(\beta;0)$ ؛ حيث : $2.03<\beta<2.04$.

د) المنحنى (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) معناه $f'(x)=3$ معناه $g(x)=3$ معناه $(x^2-3)e^x+3=3$ معناه $(x^2-3)e^x=0$ معناه $x^2-3=0$ معناه $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$ معناه يوجد مماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_f) موازيين لـ (Δ) حيث (T_1) مماس عند $x_1=\sqrt{3}$ و (T_2) مماس عند $x_2=-\sqrt{3}$.

4) رسم (Δ) ؛ (T_1) ؛ (T_2) و (C_f) على $]-\infty;1+\sqrt{2}]$:



5) لدينا :

$$h:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto h(x)=f(\ln(x))$$

أ) حساب النهايات :

بما أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(\ln(x))=-\infty$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(\ln(x))=+\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة h :

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ الدالة h قابلة للاشتقاق :

$$h'(x)=\frac{1}{x}f'(\ln(x))$$

لدينا :

x	0	1	e^{α}	$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\!\!-\infty$	0	α	$+\infty$

لدينا :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن :

x	0		1		e^{α}		$+\infty$
$f'(\ln(x))$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{x}$		$+$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

اتجاه تغير الدالة h :

الدالة h متزايدة تماما على المجال $[0;1[$ و المجال $]e^{\alpha};+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1;e^{\alpha}]$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	0		0		α		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	↗	$h(0)=0$	↘	$h(e^{\alpha})=f(\alpha)$	↗	$+\infty$