الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانوية عبد الرحمان كرزازي – بوقادير- **دورة: 2023**

امتحان بكالوريا تجريبي
الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 03 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0\le u_n<2$

ب – أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج أنها متقاربة .

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

أ – برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ب – أكتب كل من v_n و u_n بدلالة n .ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+\dfrac{1}{u_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{u_n+1}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس U على ثلاث كرات تحمل الرقم 2 و كرتان تحملان الرقم 3 ، ويحتوي كيس V على ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوتين . (كل الكرات متماثلة لا نميز بين الكرات عند اللمس)

نسحب الآن كرة واحدة من الكيس U ونسجل رقمها .

- اذا كانت تحمل رقم 2 نسحب كرتين بالتتابع دون ارجاع من الصندوق V
- اذا كانت تحمل رقم 3 نسحب ثلاث كرات في أن واحد من الصندوق V

نعتبر الحادثتين: A " الكرات المسحوبة من نفس اللون "

B "الحصول على كرتين حمراوتين على الأقل "

1. بين أن $P(A)=\dfrac{7}{25}$ ، ثم احسب $P(B)$

2. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U تحمل رقم 2 علما أن الكرات المسحوبة من V من نفس اللون

3. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة

أ. عين قيم المتغير X

ب. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث : (4 0نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$

2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=-1+i\sqrt{3}$

أ. أكتب كلا من z_A و z_C على شكل أ سي ، ثم استنتج شكل أسي لكل من العددين z_B و z_D

ب. تحقق أن $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=-i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

ت. اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B}{z_A}$ على شكل أسي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

3) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z بحيث : $\left|iz-z_B\right|=\left|\overline{z}-z_C\right|$

التمرين الرابع: (07نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)^2e^{-x}-1$

1) ادرس تغييرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل ثلاث حلول ،أحد ها الحلول معدوم والآخرين هما α و β حيث

$2,51<\alpha<2,52$ و $-1,48>\beta>-1,47$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-2+\left(x^2+4x+5\right)e^{-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ،

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=-g(x)$

ب . استنتج اتجاه تغير الدالة f .ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4. أنشئ (Δ) و (C_f) ، حيث نأخذ $f(\alpha)\simeq 2,2$ و $f(\beta)\simeq 2,1$

5. أ - عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة $H:x\mapsto\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\left(x^2+4x+5\right)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب – أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\alpha$.

ج – بين أن : $A(\alpha)=\dfrac{2\alpha(5\alpha+8)}{(\alpha+1)^2}$ ، ثم جد حصرا للمساحة $A(\alpha)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط):

يحتوي صندوق على 12 كرية كل الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس منها ستة كريات سوداء مرقمة بـ :
0، 0 ، 0، 0 ، 1، 1− و أربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1، 1، 1-، 1 - و كريتين حمراوتين مرقمتين بـ: 2 ، 2−
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق

1) احسب احتمال الحوادث الأتية

A "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون "

B " الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم "

C " الـ صول على ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثنى مثنى "

2) بين أن $P(B \cap C) = \frac{2}{11}$

3) علما أن الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ارقام مختلفة مثنى مثنى علما أن مجموع أرقامها معدوم .

4) نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات المتحصل عليها التي تحمل الرقم 0

- عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X
- احسب امله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (05 نقاط):

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

1. عمدة العدد المركب : $Z = -4ie^{i\frac{\pi}{6}}$ هي :

أ) $Arg(Z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ب) $Arg(Z) = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi$ ج) $Arg(Z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $z_A = 2+3i$ ، $z_B = -1+2i$ ، $z_C = 1$ و $z_D = -2-i$:

أ) $ABDC$ مربع ب) $ABDC$ معين ج) $ABDC$ مستطيل

3. القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ على المجال $\left[e; e^e\right]$ هي

أ) $m = \frac{1}{e^e - e}$ ب) $m = 0$ ج) $m = \frac{e-1}{e^e - e}$

4. (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9$ و $v_n = u_n + \alpha n + \beta$
قيمة العددين الحقيقين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي :

أ) $\alpha = 3$ و $\beta = 1$ ب) $\alpha = 1$ و $\beta = 3$ ج) $\alpha = -3$ و $\beta = 1$

التمرين الثالث : (04 نقاط):

1. (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة حدها الأول u_0 وأساسها q حيث :

$u_1 \times u_3 = 729$ و $u_1 + u_3 = 90$

أ. أحسب u_0 و q

ب. اكتب u_n بدلالة n

2. نفرض أن $u_0 = 3$ و $q = 3$ ونعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n + u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

أ) بين أن المتتالية (w_n) هندسية ،عيين أساسها وحدها الأول w_0 .

ب) أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n .

ت) احسب بـ لالة n المجموع حيث S_n : $S_n = \frac{v_0}{u_0} + \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} + \cdots + \frac{v_n}{u_n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط):

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
2. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. برهن أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع : $t = \sqrt{x}$) ، ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3. أ . أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$.

ب . استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4. أ) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

5. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق : $0,34 < \alpha < 0,35$

6. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

7. أرسم (Δ) و (C_f)

8. أحسب بدلالة α العدد : $A(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} [f(x) - x]\,dx$.

- بين أن : $A(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + 1}\left(\frac{2 - \alpha^2}{3}\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $A(\alpha)$

انتهى الموضوع الثاني