الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية: الشهيد عبيد أحمد – بن ناصر–

مديرية التربية لولاية تقرت — الشعبة : تقني رياضي

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي: 2023

اختبار في مادة: الرياضيات المدة:04ساو 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعيين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقــاط)

يحتوي كيس U_1 على أربع كرات حمراء تحمل الارقام 1,1,0,6 وثلاث كرات سوداء تحمل الارقام 6,6,1 وكرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 6 (كل الكرات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب عشوائيا وعلى التوالي دون إرجاع ثلاث كرات من هذا الكيس.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية

A: ظهور لونين فقط في الكرات الثلاثة المسحوبة .

B:الكرات الثلاثة المسحوبة مختلفة الألوان.

C:الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم

D:مجموعة أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة فردي.

E:الحصول على كرة تحمل الرقم 6 على الاقل.

F:الحصول على كرة واحدة سوداء تحمل الرقم 6.

2) أ- أحسب $P(B \cap C)$

ب- هل الحادثتان B وC مستقلتان ؟

3) نضع الكرات السوداء والحمراء في كيس U_2 .

نعتبر اللعبة التالية :للمشاركة يدفع لاعب y دج (حيث yعدد طبيعي) ,ويقوم بسحب كرتين في آنٍ واحد من الكيسU_2 .بحيث يربح اللاعب 25 دج على كل كرة سوداء مسحوبة ويخسر اللاعب 10 دج على كرة حمراء مسحوبة

- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية سحب الربح أو الخسارة المناسب لها .

أ- عين قيم X.

ب- أحسب الأمل الرياضياتي E(X).

ج- عين قيم y حتي تكون اللعبة في صالح اللاعب .

التمرين الثاني: (04 نقــاط)

الجزء الأول : (U_n)متتالية عددية معرفة N^* على بحدها الأول $U_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:بـــ : $U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $U_n \leq 3$

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

3- احسب نهاية المتتالية (U_n)

www.dzexams.com

الجزء الثاني :لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على N^* بـــ : $V_n = n(3 - U_n)$

-1 برهن ان المتتالية (V_n) هندسية يطلب أساسها وحدها الأول V_1 .

-2 عبر عن V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

-3 احسب نهاية (U_n) مرة اخرى

-4 احسب المجموع S_n التالي : $S_n = \frac{V_1}{3-U_1} + \frac{V_2}{3-U_2} + \cdots + \frac{V_n}{3-U_n}$

التمرين الثالث:(05 نقـــاط)

1)نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

(E)... $\overline{z}^3 - 3\overline{z}^2 + 3\overline{z} + 7 = 0$ ، $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z.

أ*/بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2 - 4\overline{z} + 7) = 0$.

ب*/ حـل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2)في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ*/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا ســـالبا .

ب*/ عين طبيعة المثلث ABC .

1) أ*/أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي،ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب*/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

*/عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5)أ*/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

ب*/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \leq 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

جـ*/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

www.dzexams.com

التمرين الرابع:(07نقــاط)

1) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x^2e^x$

أ*/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب*/ استنتج أنه : إذا كان $0\prec x\prec 1$ فإن $g(x)\prec g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x\succ 1$ فإن $g(x)\succ g\left(\frac{1}{x}\right)$

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\left(x^2-2x+2\right)e+e^{\frac{1}{x}}-3e$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

h دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=e^{\frac{1}{x}}-3e$. (C_h) تمثيلها البياني (**أنظر الملحق**)

أ*/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

ب*/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{x}\right)$، ثم احسب $f'(1)$.

ج*/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ*/بين أن المعادلة: $\left(x^2-2x+2\right)e^x=-h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5\prec\beta\prec 1.6$ و $0.5\prec\alpha\prec 0.6$، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .

ب*/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h)

ج*/ بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها **1** يطلب كتابة معادلته .

4) أ*/ أرسم (T) و (C_f). **(الملحــق يعــاد مع ورقة الإجابـــة)**

ب*/ m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

$$(E)\ldots f(x)=\left(m^2-2m+2\right)e^m+h(m)$$

5) أ*/بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $\int_1^x\left[f(t)-h(t)\right]dt=\left(x^2-4x+6\right)e^x-3e$

ب*/ ليكن العدد λ من المجال $]0;1[$ ،

$A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=\lambda$ و $x=1$.

*استنتج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة)، ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول

www.dzexams.com

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:(04 نقــاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء تحمل الأرقام 1، 1،1 ،1،0- و خمس كرات سوداء تحمل الأرقام 1، 1، 0، 0، 1- لا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات من الصندوق.

I/ نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط". B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل ".

C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون". D : " الحصول على اللونين الأبيض و الأسود ".

F : " مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة يساوي0 ".

1/ أحسب إحتـ ال الأحداث A، B و C .

2/ بيّن أنّ : $P(D)=\frac{5}{6}$ و $P(F)=\frac{31}{120}$ و $P(C\cap F)=\frac{7}{120}$.

3/ إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0 ما هو إحتمال أن تكون الكرات الثلاث من نفس اللون ؟

II/نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

1/ عيّن قيم المتغير العشوائي X .

2/ عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني:(04 نقــاط)

1)نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

أ*/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب*/ استنتج حلول المعادلة (E).

2)ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ*/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب*/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$.

ج*/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3)من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ*/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B.

ب*/استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

التمرين الثالث: (05 نقــاط)

1)عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i\end{cases}$

2)في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ،نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A=1-i$ و $z_B=2+\sqrt{3}+i$.

أ*/اكتب z_A على الشكل الأسي .

www.dzexams.com

ب*/بين أن: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B .

ج*/هل توجد قيم للعددالطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3)أ*/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب*/احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقـدرة بوحدة المساحة)

ج*/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$

د*/عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4)نضـــع: $f = ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r) .

أ*/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب*/ أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب*/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$

www.dzexams.com

التمرين الرابع: (07نقـــاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما:

$y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\ ;\ \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ*/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1.

ب*/ بين أن: $0\le I_n\le \ln 2$

ج*/ عين اتجـــاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ، من أجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ*/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

ب*/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.

انتهى الموضوع الثاني

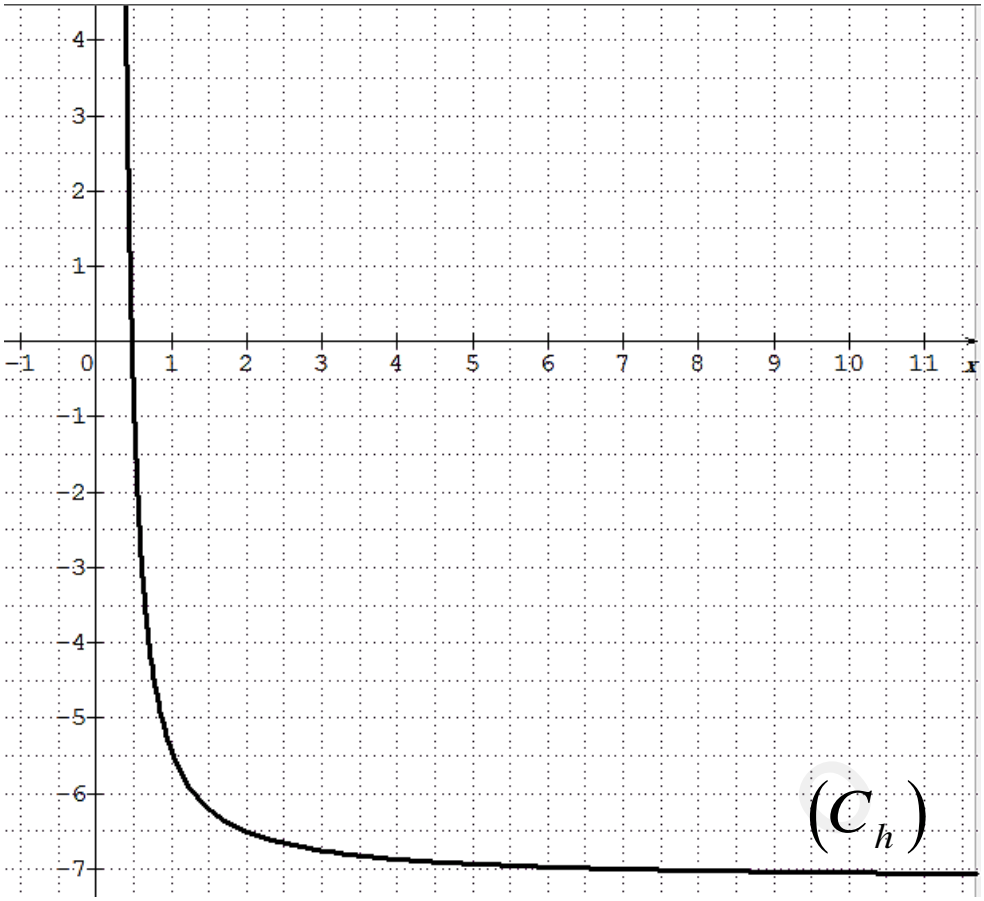
www.dzexams.com

الملحق:

الاسم :.....

اللقب :.....

القسم :.....

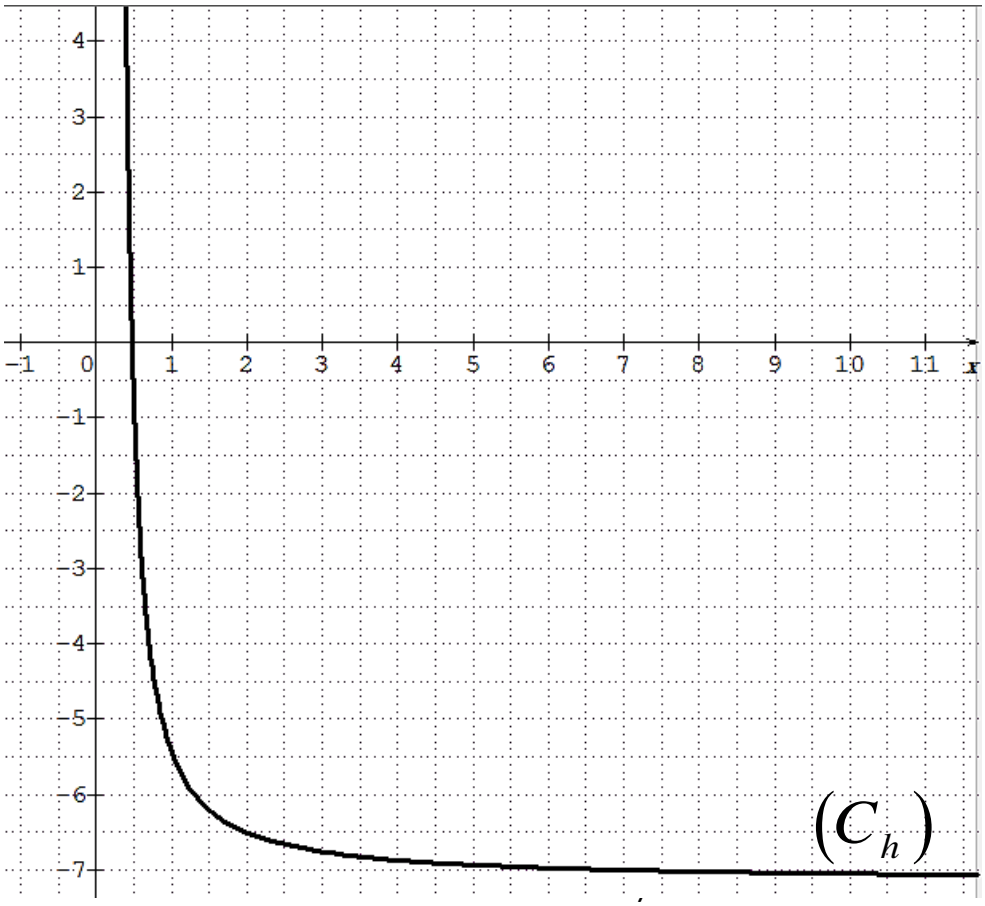


الملحق:

الاسم :.....

اللقب :.....

القسم :.....



www.dzexams.com

تصحيح البكالوريا التجريبي 2023 تقني رياضي

الموضوع الاول: التمرين الأول:(04 نقاط)

1) كتابة التمثيل الوسيطي (d) : t وسيط حقيقي

أي أن: $(d):\begin{cases} x-2=t \\ \dfrac{y-1}{2}=t \\ 1-z=t \end{cases}$ ومنه: $x-2=\dfrac{y-1}{2}=1-z=t$; $t\in\mathbb{R}$

إذن: التمثيلالوسيطي للمستقيم (d) هو $\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1 \\ z=-t+1 \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$

***/ تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوى:**

$\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) ، $\vec{u'}(3;1;2)$ شعاع توجيه (d')

بما أن $\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{1}{1}$ فإن الشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ و $\vec{u'}(3;1;2)$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d')

إما ليسا من نفس المستوي و إما متقاطعان من نفس المستوي

لتكن $E(x;y;z)$ نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

$\begin{cases} x=t+2=3t'+4\ldots(1) \\ y=2t+1=t'+3\ldots(2) \\ z=-t+1=2t'+3\ldots(3) \end{cases}$; $(t,t')\in\mathbb{R}^2$ نبحث عن الثنائية (t,t')

بجمع (1) و (3) : $t'=\dfrac{-4}{5}$ وبتعويضها في (1) أو (3)

نجد: $t=\dfrac{-2}{5}$ ، الثنائية $\left(\dfrac{-2}{5},\dfrac{-4}{5}\right)$ لا تحقق (2)

ومنـــه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوي

2) أ) إيجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (P_1) و (P_2)

ويشملان $A(4;-7;5)$ و $(d)\subset(P_1)$ و $(d')\subset(P_2)$

تعيين معادلة المستوى (P_1): (P_1) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيه (d) و

$\overrightarrow{AD}(-2;8;-4)$ حيث $D(2;1;1)$ نقطة من (d)

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$: شعاع ناظميللمستوي (P_1) غير معدوم

يكافئ $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0 \end{cases}$ بجمع (1) و (2) $\begin{cases} a+2b-c=0 \quad\ldots(1) \\ -2a+8b-4c=0\ldots(2) \end{cases}$

نجد $6b-3c=0$ ومنه $c=2b$ نأخذ $b=1$: نجد $c=2$ و

تعيين معادلة للمستوى (P_2) : لدينا (P_2) يشمل $A(4;-7;5)$

وموجه بالشعاعين $\vec{u'}(3;1;2)$ شعاع توجيه (d') و

$\overrightarrow{AC}(0;10;-2)$ حيث $C(4;3;3)$ نقطة من (d')

بنفس الطريقة $(P_2):11x-3y-15z+10=0$

ب) التحقق أن (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

بما أن: $\dfrac{0}{11}\neq\dfrac{1}{-3}$ فإن $\vec{n}(0;1;2)$ و $\vec{n'}(11;-3;-15)$

غير مرتبطين خطيا وعليه يكون المستويان (P_1) و (P_2)

متقاطعين وفق مستقيم (Δ). لدينا:

$(P_1):y+2z-3=0$ ، $(\Delta):\begin{cases} x=\dfrac{-1}{11}+9\alpha \\ y=3-22\alpha \\ z=11\alpha \end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

$(P_2):11x-3y-15z+10=0$

$(-22\alpha+3)+2(11\alpha)-3=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه $(\Delta)\subset(P_1)$:

$11\left(\dfrac{-1}{11}+9\alpha\right)-3(3-22\alpha)-15(11\alpha)+10=0$ يكافئ $0.\alpha=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه $(\Delta)\subset(P_2)$:

نستنتج أن $(\Delta)=(P_1)\cap(P_2)$

3) أ*/إيجاد إحد ثيات A' المسقط العمودي لـ A على المستوى (Q)

$(Q):A'(x';y';z')$ ، $\overrightarrow{n_Q}(11;1;-1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A\in(\Delta)$. بما أن: $1x_A+y_A-z_A\neq 2$ فإن $A\notin(Q)$

وبالتالي $\overrightarrow{AA'}$ يوازي $\overrightarrow{n_Q}$ يوجد $k\in\mathbb{R}$ حيث $\overrightarrow{AA'}=k\cdot\overrightarrow{n_Q}$

أي $\overrightarrow{AA'}(x'-4;y'+7;z'-5)$

$A'\in(Q)$ ، $\begin{cases} x'=11k+4 \\ y'=k-7 \\ z'=-k+5 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x'-4=11k \\ y'+7=k \\ z'-5=-k \end{cases}$ معناه

$11(11k+4)+(k-7)-(-k+5)-2=0$ معناه $k=-\dfrac{10}{41}$

بالتعويض عن قيمة k نجد: $A'\left(\dfrac{54}{41};-\dfrac{297}{41};\dfrac{215}{41}\right)$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوى (Q) :

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هوالمستقيم (BA')

4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

www.dzexams.com

$a=0$ ومنه $\vec{n}(0;1;2)$ ناظمي لـ $(P_1): y+2z+d=0$

$A\in(P_1)$ معناه $7+10+d=0$ معناه $d=-3$

ومنـــــه $(P_1): y+2z-3=0$:

التمرين الثاني:(04نقاط) $A_0B_0=8$ ، S التشابه المباشر مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1}=S(B_n)$:

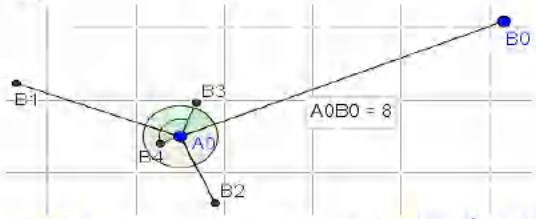
1) انشاء النقط B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 :

$B_1=S(B_0)$ يكافئ $\begin{cases}A_0B_1=\frac{1}{2}A_0B_0=4\\(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_2=S(B_1)$ معناه $\begin{cases}A_0B_2=\frac{1}{2}A_0B_1=2\\(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})=\frac{3\pi}{4}\ \ 2k\pi\end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_3=S(B_2)$ معناه $\begin{cases}A_0B_3=\frac{1}{2}A_0B_2=1\\(\overrightarrow{A_0B_2},\overrightarrow{A_0B_3})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

$B_4=S(B_3)$ معناه $\begin{cases}A_0B_4=\frac{1}{2}A_0B_3=\frac{1}{2}\\(\overrightarrow{A_0B_3},\overrightarrow{A_0B_4})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ ، $k\in\mathbb{Z}$



2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ **متشابهان من أجل كل عدد طبيعي** n :

$B_{n+1}=S(B_n)$ معناه $A_0B_{n+1}=\frac{1}{2}A_0B_n$

و $(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ ، بما أن:

$\frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n}=\frac{1}{2}$ و $\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}}=\frac{1}{2}$ و

$(\overrightarrow{A_0B_n},\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_n},\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0B_{n+1}})=(\overrightarrow{A_0B_{n+1}},\overrightarrow{A_0B_{n+2}})$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان (ضلعان و زاوية محصورة بينهما)ومنه: $\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}}=\frac{1}{2}$

3)أ*/اثبات أن (u_n) **متتالية هندسية أساسها** $\frac{1}{2}$: نعرف

(Γ) هي سطح كرة قطرها $[AB]$ ، $AB=\sqrt{\frac{17150}{121}}\approx 11.9$

ومركزها النقطة $I\left(\frac{43}{22};-2;\frac{5}{2}\right)$ منتصف $[AB]$

01

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=B_0B_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$ ،

حساب δ_n **بدلالة** n **ثم إيجاد** $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n$: م.ح.م. هندسية

$$\delta_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2B_0B_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n=2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ **المعادلة :** $(1)...3x-4y=2$

(1) يكـــافئ $3x=4y+2$ يكـــافئ $3x\equiv 2[4]$

يكـــافئ $7\times 3x\equiv 7\times 2[4]$ يكـــافئ $x\equiv 2[4]$

ومنه: $x=4\lambda+2$ ، $\lambda\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد $y=3\lambda+1$ إذن: $S=\{(4\lambda+2;3\lambda+1);\lambda\in\mathbb{Z}\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n **التي من اجلها تكون النقطة** B_n **تنتمي إلى المستقيم** (Δ) :

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1})+(\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2})+...$

$....+(\overrightarrow{A_0B_{n-1}},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\ \ +\frac{3\pi}{4}=n\frac{3\pi}{4}$

B_n تنتمي إلى (Δ) معناه $(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_n})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

نجد: $\frac{3\pi}{4}n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ $3n=4\left(\frac{1}{2}+k\right)$

يكـــافئ $3n=2+4k$ يكـــافئ $3n-4k=2$

ومنه قيم n هـــي $n=4k'+2$ ، $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثالث:(05 نقاط)

1) أ*/نبين أن المعادلة (E) تكافئ $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0$

لدينا : $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2-4\bar{z}+7)=0\ (E)...\ \bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$

يكافئ $\bar{z}^3-4\bar{z}^2+7\bar{z}+\bar{z}^2-4\bar{z}+7=0$

يكافئ $\bar{z}^3-3\bar{z}^2+3\bar{z}+7=0$

ب* /نحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E) :

www.dzexams.com

متتالية (u_n) بـ $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2}$ ومنه: (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = B_0B_1$

ب*/ كتابة عبارة u_n بدلالة n:

ومنه: $S = \{-1; 2-\sqrt{3}i; 2+\sqrt{3}i\}$

2)أ*/تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا:

لدينا

$(z_B - z_A)^n = (2+\sqrt{3}i+1)^n = (3+\sqrt{3}i)^n$

ومنه $(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا معناه:

$\arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi$

إذن $n = 12k + 6 \; ; k \in \mathbb{N}$

ب*/تعيين طبيعة المثلث ABC

$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

بما ان : $AB = AC = BC$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3)أ*/كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي:

$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب*/استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره المميزة:

$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C)$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة C و نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

لدينا: $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه

$$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right| = \sqrt{3} \\ (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

(E) تكافئ $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2 - 4\overline{z} + 7) = 0$

يكافئ $(z+1)(z^2-4z+7) = 0$ يكافئ $\overline{(z+1)(z^2-4z+7)} = 0$

يكافئ $\begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$ ، $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

$z_1 = 2 - \sqrt{3}i$ و $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$

02

ومنه: من أجل k يمسح المجال $[0;+\infty[$ المجموعة (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}$

لاحقته : $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$

5)أ*/تعيين قيمة العدد α حيث $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;2),(D;\alpha)\}$

يكافئ $\begin{cases} x_C = \frac{-x_A + 2x_B + \alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A + 2y_B + \alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases}$ $\alpha = -3$

ب*/تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث :

$(*) \ldots \left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MD}\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|-\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}\right)\right\| \le 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

$(*)$ تكافئ $\left\|(-1+2-3)\overrightarrow{CM}\right\| \le 2BC$ تكافئ $CM \le BC$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C ونصف قطره هو : $BC = 2\sqrt{3}$

جـ*/استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) و نصف المستقيم $[AB]$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره $BC = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB]$ هو القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الرابع: (07 نقـاط)

1) g معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2e^x$

أ*/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0;+\infty[$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$: $g'(x) = (x^2+2x)e^x$

بما ان $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

www.dzexams.com

لاحقتها $z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$

4 */تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$:

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

***/استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث :**

$z - z_A = k(z_B - z_A)$ معناه $z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$

معناه $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

03

2) f معرفة على $]0;+\infty[$: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ*/حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to 0} f(x)$:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

ب*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$، ثم حساب $f'(1)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ دالتها المشتقة f':

$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه: $f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$

ج*/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

إشـــارة $f'(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	

f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]0;1]$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e = -2.71$	↗	$+\infty$

3) أ*/نبين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$

تقبل **حلين** α **و** β **حيث**: $1.5 < \beta < 1.6$ و $0.5 < \alpha < 0.6$

$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0$ تكافئ $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$

تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا: $f(0.5) \approx 1.25$ ، $f(0.6) \approx -0.74$

بما ان الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.5;0.6]$

$f(0.5) \times f(0.6) < 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$ ، $f(\alpha) = 0$

ب*/ استنتاج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0 < x < 1$ فـإن $\frac{1}{x} < x$ و لدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، فـإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x > 1$ فـإن $\frac{1}{x} < x$ ولدينا g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ،فـإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

إشارة الفرق $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$x^2 - 2x + 2 > 0$ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ لأن $\Delta = -4$

ومنه : (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0;+\infty[$

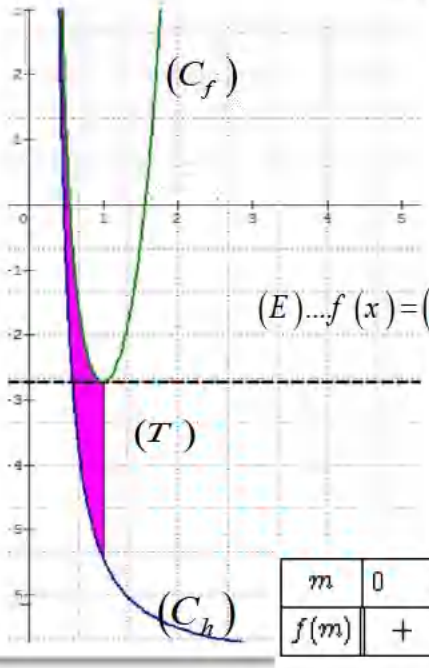
ج*/نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته :

بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0;+\infty[$ مماسا

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ، $f'(1) = 0 ; f(1) = -e$

ومنه: $(T): y = -e$

4) أ*/رسم (T) و (C_f) :



ب*/ايجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m > 0$

$(E) \ldots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$

المعادلة (E) تكـــافئ $f(x) = f(m)$

إشارة $f(m)$ **:**

m	0		α		1		$E+\infty$
$f(m)$	‖	+	0	−	0	+	

من أجـــل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا.

ومنـــه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزينلما $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

www.dzexams.com

لدينا: $f(1.5)\approx -0.60$ ، $f(1.6)\approx 0.44$

بما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.5;1.6]$

$f(1.6)\times f(1.5)\prec 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2-2x+2)e^x=-h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $1.5\prec\beta\prec 1.6$ ، $f(\beta)=0$

***/استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل فينقطتين:**

بما ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f) يقطع محور الفواصل فينقطتين فاصلتيهما α و β

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h):

ب*/استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوى المحدد بـ (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\lambda$ و $x=1$

(مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda\in]0;1[$:

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(t)-h(t)]dt=-\int_{\lambda}^{1}[f(t)-h(t)]dt$$

$$A(\lambda)=-\left[(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}-3e\right]$$

$$=\left(3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right)ua$$

***/حساب $\lim\limits_{\lambda\to 0} A(\lambda)$:**

$$\lim_{\lambda\to 0}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\left[3e-(\lambda^2-4\lambda+6)e^{\lambda}\right]=3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

$A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$

1) أ*/حساب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

لدينا: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(2)+0(-1)+1(0)=4$

***/استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $Cos\,ABC$ و $Sin\,ABC$**

لدينا: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|Cos\,ABC$

ومنه: $Cos\,ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

لدينا: $\sin ABC^2=1-Cos\,ABC^2$

ومنه $\sin ABC=\dfrac{3}{5}$ أو $\sin ABC=-\dfrac{3}{5}$

ب*/حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC}:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BA\times BC\times\sin ABC=\frac{1}{2}\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}ua$$

5) أ*/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

لدينا: $\int_1^x[f(t)-h(t)]dt=\int_1^x(t^2-2t+2)e^t\,dt$

الدالة: $t\to(t^2-2t+2)e^t$ مستمرة على $]0;+\infty[$ فهيتقبل دوالا أصلية على $]0;+\infty[$.

$$\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]'=(t^2-2t+2)e^t$$

$$\int_1^x(t^2-2t+2)e^t dt=\int_1^x\left[(t^2-4t+6)e^t-3e\right]' dt$$

$$=(x^2-4x+6)e^x-3e$$

04

$D\notin(ABC)$ إذن: $m=-\dfrac{5}{2}$ أي $0+2(0)-2m-5=0$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

***/ نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V=\dfrac{2m+5}{6}uv$**

لدينا $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}\times h$ ، $h=d(D,(ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D;(ABC))=\frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2m+5}{3}$$

ومنه $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2m+5}{3}=\dfrac{2m+5}{6}uv$

2) أ*/نبين أن (Q) هو المستوى المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$

معادلته الديكارتية $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$: هناك عدة طرقنها

***إحداثيات $I(2;\frac{3}{2};0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ عمودي على شعاعي توجيهه**

$\vec{u}(-2;-4;-5)$ $\vec{u'}(1;2;0)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

***/تعيين معادلة (Q):** لدينا:

$$(Q):\begin{cases}x=2-2\alpha+\beta....(1)\\ y=\frac{3}{2}-4\alpha+2\beta....(2)\\ z=-5\alpha.....(3)\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

من (1) نجد: $z=-5\alpha$

يكافئ $\alpha=\dfrac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x=2-2\left(\dfrac{z}{-5}\right)+\beta$

ومنه: $\beta=x-2-\dfrac{2z}{5}$ نعوض قيمة α و β في (2) نجد:

ومنه: $y=\dfrac{3}{2}-4\left(\dfrac{z}{-5}\right)+2\left(x-2-\dfrac{2z}{5}\right)$: $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$

www.dzexams.com

ج*/نبين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ **شعاع ناظمي للمستوى** (ABC):

بما أن $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=1(2)+2(0)-2(1)=0$ وكذلك

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=1(2)+2(-1)-2(0)=0$

فإن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاعناظمي للمستوي (ABC)

***/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوى** (ABC)**:**

لدينا $(ABC): x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC)$ تكافئ $3+2+d=0$ تكافئ $d=-5$

ومنه: $(ABC): x+2y-2z-5=0$

د*/تبيان أن $ABCD$ **رباعي وجوه:**

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

نضع $z=t$ (t وسيط حقيقي) نجد $5x-2z-10=0$

إذن: $x=\frac{2}{5}t+2$ و $y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}$

$$(\Delta):\begin{cases}x=\frac{2}{5}t+2\\ y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}\\ z=t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

ج*/ حساب $d(D;(Q))$ **ثم استنتاج بدلالة** m **المسافة بين** D **و** (Δ)**:**

$$d(D;(Q))=\frac{|-4(0)+2(0)+5|}{\sqrt{16+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بماأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D;(\Delta))^2=d(D;(Q))^2+d(D;(ABC))^2$$

ومنه: $d(D;(\Delta))=\sqrt{\frac{5}{4}+\left(\frac{2m+5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{16m^2+80m+145}}{6}$

3)أ*/تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m **سطح كرة** (S_m) **يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:**

لدينا $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$:

ومنه $x^2+y^2+(z-m)^2=9$ إذن: (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ و نصف قطرها $r=3$.

ب*/تعيين m **حتى يكون المستوى** (ABC) **مماسا لسطحالكرة** (S_m)**:** (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D;(ABC))=3$ أي أن: $\frac{2m+5}{3}=3$ ومنه $m=2$:

4)معادلة المستوى (P) **الموازي تماما للمستوى** (ABC) **ويمس** (S_m)**:** لدينا $(P): x+2y-2z+d=0$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني :

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x+2y+5=0$

***/بطريقة أخرى:** (Q) يشمل $I\left(2;\frac{3}{2};0\right)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيطي يحقق $[AB]$ لقطعةالمستقيم ومنه المستوي المحوري $(Q): -2x+y=\frac{-5}{2}$

ب*/استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) **متعامدان و هما متقاطعان وفق مستقيم** (Δ) **يطلب تعيينتمثيله الوسيطي:**

بما أن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1.(-2)+2.(1)+0.(-2)=0$ فإن (Q) و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

***/تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم** (Δ)**:**

$$\begin{cases}x+2y-2z-5=0....(1)\\ -4x+2y+5=0.....(2)\end{cases}$$ بطرح (2) من (1) نجد:

05

$n\in\mathbb{N}^*$ ، $b=11n+4$ و $a=5n+2$

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه: $d/2$ إذن: $d\in D_2=\{1;2\}$.

ب*/تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n **بحيث يكون:** $PGCD(a;b)=2$ لدينا $PGCD(a;b)=2$

معناه 2يقسم a و2يقسم b معناه 2يقسم $b-2a$

أي 2يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2يقسم n.

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n **بحيث يكونالعددان** a و b **أوليان فيما بينهما:** من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n: $n=2\alpha\ /\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه: قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي: $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/نبين أن العدد $(n+1)$ **يقسم كل من العددين** A و B

$n\in\mathbb{N}$ ، $B=11n^2+15n+4$ و $A=5n^2+7n+2$

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n **القاسم المشترك الأكبر للعددين** A و B:

$$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1)تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

www.dzexams.com

$d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$ أي $|-4+d|=9$

ومنه $d=13$: أو $d=-5$ هو المستوي (ABC)

إذن: $(p):x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)أ*/إثبات أن : $y\equiv 4[11]$ ، $(E)\ldots 11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي

أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه : $y\equiv 4[11]$

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E) :

$y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ، نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد : $x=5k+2$

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

***/استنتاج الشكل الأسي للعدد** z_B :

$z_B=z_A(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه : $z_B=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/تعيين قيم للعدد الطبيعي n **حتى تكون صورة لعدد** $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ **تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :**

$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=(1+\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ لدينا $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=\frac{\pi}{4}+k\pi$ معناه

أي : $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n\equiv\frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ لاتقسم 3 ومنه المعادلة لاتقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/إيجاد لاحقة النقطة B' **صورة النقطة** B **بالدوران** r **الذي مركزه النقطة** O **وزاويته** $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B=e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$z_{B'}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt{3}-i$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) **التي قطرها** $[BB']$:لدينا

$R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac{2}{2}=1$ ، $S=\pi R^2$

ومنه : $s=\pi\ u.a$

ج*/تعيين مجموعة النقط $M(z)$ **من المستوى حيث:**

$|-4+d|=9$ أي $d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$

ومنه $d=13$: أو $d=-5$ هو المستوي (ABC)

إذن: $(p):x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)أ*/إثبات أن : $y\equiv 4[11]$ ، $(E)\ldots 11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي

أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه : $y\equiv 4[11]$

ب*/استنتاج حلول المعادلة (E) :

$y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ، نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد : $x=5k+2$

ومنه: $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$:

***/استنتاج الشكل الأسي للعدد** z_B :

$z_B=z_A(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه : $z_B=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/تعيين قيم للعدد الطبيعي n **حتى تكون صورة لعدد** $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ **تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :**

$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=(1+\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ لدينا $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=\frac{\pi}{4}+k\pi$ معناه

أي : $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n\equiv\frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ لاتقسم 3 ومنه المعادلة لاتقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/إيجاد لاحقة النقطة B' **صورة النقطة** B **بالدوران** r **الذي مركزه النقطة** O **وزاويته** $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B=e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$z_{B'}=\sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt{3}-i$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) **التي قطرها** $[BB']$:لدينا

$R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac{2}{2}=1$ ، $S=\pi R^2$

ومنه : $s=\pi\ u.a$

ج*/تعيين مجموعة النقط $M(z)$ **من المستوى حيث:**

$\begin{cases}2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}\ldots(1)\\(\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i\ldots(2)\end{cases}$ نضرب طرفي

$\begin{cases}-2iz_1+z_2=-i+\sqrt{3}\ldots\ldots(1')\\\sqrt{3}z_1+2iz_1-z_2=i-i\sqrt{3}\ldots(2)\end{cases}$ المعادلة الأولى في $(-i)$ نجد

بجمع $(1')$ و (2) : $\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1=1-i$

بالتعويض في $(1')$ نجد : $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2)أ*/كتابة z_A **على الشكل الأسي :** $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب*/نبين أن : $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})i}{2}$

ومنه: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

06

بة لمحور الفواصل ولدينا : $B'(2+\sqrt{3};-1)$ و $A(1;-1)$

أي : AB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم معادلته $y=-1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد :

$z_C=\overline{z_A}=1+i$.

***/ إيجاد** z_I **لاحقة مركز ثقل المستطيل** $AB'BC$

$z_I=\frac{z_A+z_B+z_B+z_C}{4}$ ومنه $z_I=\frac{1-i+4+2\sqrt{3}+1+i}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

4)أ*/تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S **حيث يكون** f **تشابه مباشر مركزه** O **ونسبته** 2 **وزاويته** $\frac{\pi}{3}$: $f=ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros

تشابه مباشر مركزه O و سبته k وزاويته $\theta-\frac{\pi}{6}$

ومنه : $k=2$ و $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي $\theta-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z'=2iz$

ب*/إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) **بالتشابه المباشر** S **:**

مساحة صورة الدائرة (γ) هي S' حيث : $s'=k^2s=4\pi\ u.a$.

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ **،إيجاد طبيعة المثلث** OMM' :

$\arg\frac{z'}{z}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ معناه $\frac{z'}{z}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$: ومنه $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$

$|z'|=2|z|$ أي $\left|\frac{z'}{z}\right|=2$ و $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ معناه

www.dzexams.com

$\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$ أي أن

$\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ومنه $2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$

تفسيرها : $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi/k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B.

د*/تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$\left(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A}\right)=\arg\left(\frac{z_A-z_{B'}}{z_B-z_{B'}}\right)=\arg(z_A-z_{B'})-\arg(z_B-z_{B'})$

$\left(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A}\right)=\arg(1-i-2-\sqrt{3}+i)-\arg(2i)=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ومنه نجد : $\left(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

يكفي أن نبين : $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AC}$ معناه : $\begin{cases}x_C=1\\y_C=1\end{cases}$ ومنه $z_C=1+i$

بطريقة اخرى :لدينا $z_{B'}=\overline{z_B}$ معناه BB' تناظرتان

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $\left[e+\ln\sqrt{2};+\infty\right[$

الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;e+\ln\sqrt{2}\right]$

تشكيل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	$ln2/2+e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$3ln2/2+e$	↗ $+\infty$

2) أ*/ نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ **على الترتيب**: بما أن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-e)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln 1=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+e+\ln 2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2\right]=0$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب*/دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ 1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln 1=0$

معناه OMM' قائم في O ومنه: المثلث $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|=2\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

ب*/تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$: $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

و $\overrightarrow{AM'}(z'-z_A)$ أي $\overrightarrow{AM'}(2iz-z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AM'}(-2y-1;2x+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ معناه $(x-1)(-2y-1)+(y+1)(2x+1)=0$

معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1)أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$

$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */حساب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

07

د*/ تعيين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة m وسيط حقيقي.

معناه $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$

معناه $m\left(x-e-\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}-y=0$

$e-\frac{\ln 2}{2}=0$ و $x-y=0$ ومنه: جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e;\frac{\ln 2}{2}\right)$

ب*/مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) :

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e;\frac{\ln 2}{2}\right)$

إذا كان $m=1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=-1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=0$ فإن (D_m) هو $(D_0):y=\ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in\left]-1;1\right[$ فإنها لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in\left]-\infty;-1\right[$ فإنها توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in\left]1;+\infty\right[$ فإنها توجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ*/التفسير الهندسي العدد I : هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين

www.dzexams.com

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln 2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln 2$

$2+e^{2(x-e)}\succ 2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ \ln 2$ ومنه:

$f(x)-(-x+e+\ln 2)\succ 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D')

من أجل كل عدد حقيقي x

ج*/ نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f):

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)$ من $\mathbb{R}$، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln 2}{2}+e\right)-x\right)=f(\ln 2+2e-x)$$

$$=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})=f(x)$$

ومنه: $(\Delta): x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3) رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f):

4)أ*/نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\frac{\ln 2}{2}\right)$

$$(D_m): y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$$

$0\le X^{n+1}\le X^n$ أي $0\le X^{n+1}+1\le X^n+1$

$n\in\mathbb{N}^*$، $0\le \ln\left(X^{n+1}+1\right)\le \ln\left(X^n+1\right)$ أي أن

$0\le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX\le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0\le I_{n+1}\le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0\le I_n\le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقارية نحو الصفر

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد $\begin{cases}0\le X\le 1\ldots(1)\\ 0\le X^n\le 1\end{cases}$

$0\le X^{n+1}\le X^n$ أي $0\le X^{n+1}+1\le X^n+1$

$n\in\mathbb{N}^*$، $0\le \ln\left(X^{n+1}+1\right)\le \ln\left(X^n+1\right)$ أي أن

$0\le \int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX\le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0\le I_{n+1}\le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر $(0\le I_n\le \ln 2)$

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

08

اللذين معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1 \ln(1+X)dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v'(X)=1$ ، $v(X)=X$

$$I_1=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)\right]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=\left[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)\right]_0^1=\ln 4-1$$

ب*/ نبين أن $0\le I_n\le \ln 2$: لدينا $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$

$0\le X\le 1$ معناه $1\le X^n+1\le 2$ معناه $0\le \ln\left(X^n+1\right)\le \ln 2$

ومنه: $0\le \int_0^1 \ln\left(X^n+1\right)dX\le \int_0^1 \ln 2\,dX$ اذن $0\le I_n\le \ln 2$

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد $\begin{cases}0\le X\le 1\ldots(1)\\ 0\le X^n\le 1\end{cases}$

استعمال: $\ln(1+X)\le X$، من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ / استنتاج أن: $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

$\ln(1+X)\le X$، من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

لدينا: $1+2e^{-2(x-e)}\succ 0$ بوضع: $X=1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

وبالتالي $0\le \ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\le 2e^{-2(x-e)}$

$$0\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0\le -1+\ln 4\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

اذن: $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

ب*/اعطاء حصرا للعدد $I+I_1$:

$$0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$$

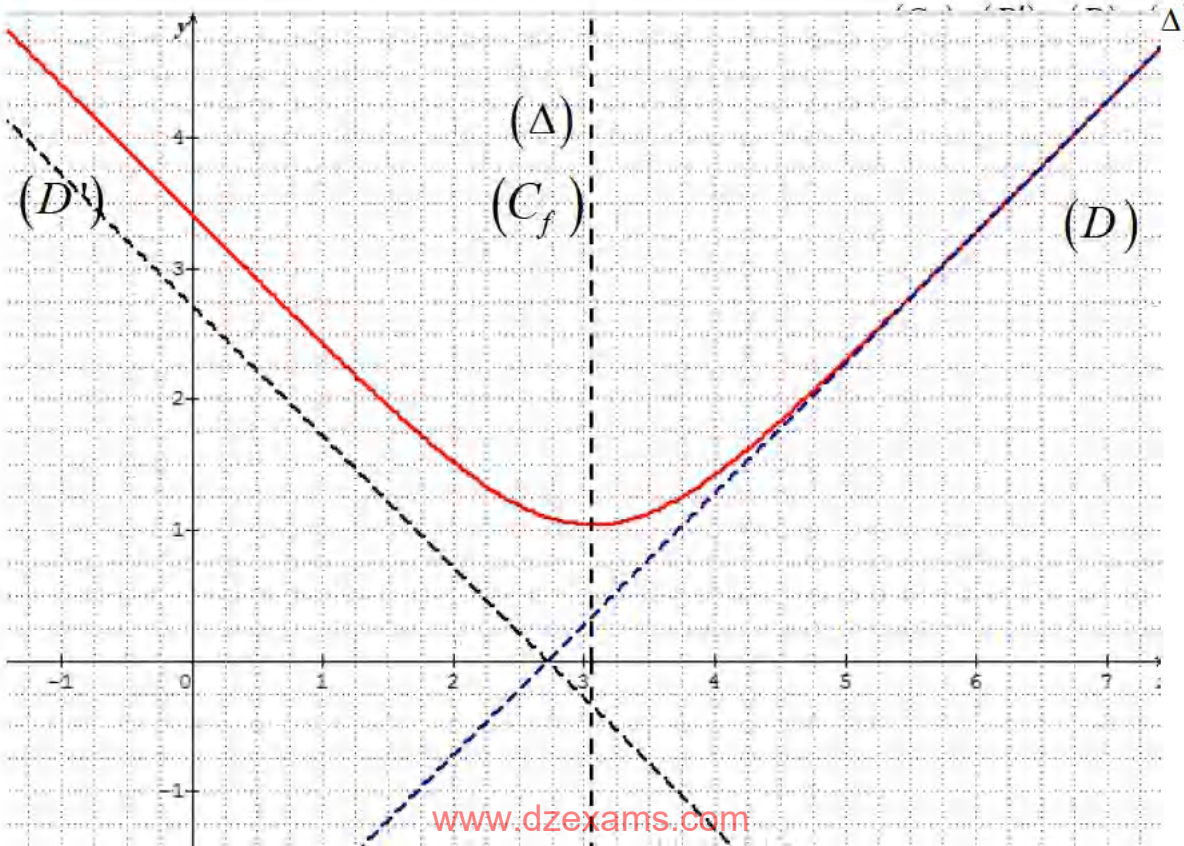
$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx=-\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}-2e^{-2(x-e)}dx=-\left[e^{-2(x-e)}\right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}=\frac{1}{6}$$

www.dzexams.com

$0 \le I + I_1 \le \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$ ومنه: $0 \le I + I_1 \le \frac{-5}{6} + \ln 4$

09

3) رسم (Δ)



www.dzexams.com