

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 05 نقاط

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} \end{cases} \text{ نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

1. (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \frac{5}{2}$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

2. (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{5}{2} - u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} - u_n \right)$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{5}{2} - u_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{5}{2} - u_0 \right)$ ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_{n+1} - u_n)$.

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ يطلب حساب حدها الأول، ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب. احسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = (u_1 - u_0) \times (u_2 - u_1) \times \dots \times (u_{n+1} - u_n)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة منها 6 كريات بيضاء مرقمة بـ: 0, 2, 2, 2, 2, 4 و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: 0, 1.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس ونعتبر الحدثين A و B بحيث: الحدث A : الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون والحدث B : الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.

2. بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ، ثم استنتج $P(A \cup B)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب أصغر الأرقام المحصل عليها أو يساويها.

✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

4. نسحب الآن عشوائيا n كريمة على التوالي بالإرجاع بحيث $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$ ونسمي C الحدث: الحصول على

n كريمة سوداء.

✓ بين أن $P(C) = \left(\frac{1}{4} \right)^n$ ، ثم أوجد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P(\bar{C}) \geq 0,99$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الصحيح $(x; y) : 2x - 5y = 1$.

1. أ) جد الحل $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0 = 3y_0$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن الكسر $\frac{x}{y}$ غير قابل للاختزال.

2. جد قيم العدد الطبيعي λ التي تحقق $\begin{cases} \lambda \equiv 1962 [5] \\ \lambda \equiv 2023 [2] \end{cases}$ ، ثم عين باقي قسمة λ على 10.

3. عين الثنائيات الطبيعية $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $10^2 + x + y \equiv 0 [11]$.

4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{23}$ في النظام ذي الأساس α ويكتب $\overline{54}$ في النظام ذي الأساس β بحيث α و β عددان طبيعيين.

✓ جد العددين α و β علما أن $\beta^2 - \alpha = 31$ ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الرابع: 07 نقاط

1. نعتبر الدالة g المعرفة والمتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ بحيث: $g(x) = e^x + x + 1$.

1. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $-1,29 < \alpha < -1,27$.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ، ثم تحقق أن $e^{-\alpha} = -\frac{1}{\alpha + 1}$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x + \frac{x}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب) بين أن $f(\alpha) = -\alpha$ ، ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

ب) بين أن $f'(-\alpha) = -1$ و $f(-\alpha) = 0$ ، ثم اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$.

4. أنشئ المماس (T) والمستقيمت المقاربة، ثم مثل (C_f) .

5. أ) بين أنه من أجل $x \in [0; 1]$: $f(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x$ ، ثم استنتج أنه من أجل $x \in [0; 1]$: $1 - x \leq f(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x$.

ب) استنتج حصر A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحوري الاحداثيات والمستقيم ذا المعادلة $x = 1$.

$$\cdot \begin{cases} a+b \equiv 7[11] \\ a-b \equiv 5[11] \end{cases} \text{ نعتبر العددين الطبيعيين } a \text{ و } b \text{ بحيث:}$$

1. أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على العدد 11.
ب) بين أن $a \equiv 6[11]$ ثم استنتج أن $b \equiv 1[11]$.
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n وباقي القسمة الإقليدية للعدد a^n على 11.
3. بين أن العدد A بحيث $A = a^{2023} + a^{1444} - (a-b)^{2021}$ مضاعف للعدد 11.
4. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $(b-a)^{10n+6} + (a+b)n \equiv b^{2973}[11]$.

$$\cdot \begin{cases} 2\bar{\alpha} - \sqrt{3}\bar{\beta} = 3\sqrt{3} + i \\ \alpha i - \beta = 0 \end{cases} \text{ جد العددين المركبين } \alpha \text{ و } \beta \text{ بحيث:}$$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها

$$z_C = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A, z_A = \sqrt{3} + i$$

$$1. \text{ اكتب } z_B \text{ على الشكلين المثلثي والجبري، ثم استنتج القيم المضبوطة لـ } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

$$2. \text{ أ) عين قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي من أجلها يكون } \left(\frac{z_B}{\sqrt{2}z_A}\right)^n \text{ تخيليا بحتا سالبا تماما.}$$

ب) تحقق أن صورة A بتحويل نقطي S يطلب تعيين طبيعته وتحديد عناصره المميزة.

$$3. \text{ أ) بين أن } \frac{z_C}{z_A} = i, \text{ ثم استنتج طبيعة المثلث } AOC.$$

$$\text{ب) تحقق أن } z_B - z_A = z_C \text{ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي } AOCB.$$

$$4. \text{ عين طبيعة المجموعة } (E) \text{ مجموعة النقط } M(Z) \text{ بحيث } \left| \frac{\bar{z} - \sqrt{3} + i}{\frac{\sqrt{2}}{2}iz} \right| = \left| \frac{z_B}{z_A} \right|, \text{ ثم عين صورتها}$$

بالتحويل النقطي S .

$$\cdot \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1 + \sqrt{u_n}}{2} \right)^2 \end{cases} \text{ نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 \leq u_n \leq 1$.

2. بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{u_n})(1 + 3\sqrt{u_n})$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر تقاربها.

II. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \sqrt{u_n} - 1$.

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x}\right)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى العلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2. أ) تحقق أنه من أجل $x > 0$: $f(x) = \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{2x - 2}{x^2}\right)$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Γ) المنحني الممثل للدالة $x \mapsto \ln(x)$.

3. بين أنه من أجل $x > 0$: $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x(x^2 - 2x + 2)}$ ثم ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ (لاحظ أن:

$$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

4. أ) بين أن حل المعادلة $f'(x) = -1$ يؤدي إلى حل المعادلة $(x - 1)(x^2 + 2) = 0$ ، ثم استنتج أن (C_f)

يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 يطلب كتابة معادلتها.

ب) عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محاور الفواصل.

5. أنشئ (T) ومثل (Γ) ثم مثل (C_f) . يعطى $f(\sqrt{2}) \approx -0,2$.

6. الدالة g معرفة على $[-2; 0[\cup]0; 2]$ ب: $g(x) = -\ln\left(\frac{x^2 - 2|x| + 2}{|x|}\right)$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

أ) بين أن الدالة g زوجية.

ب) ب) بين أنه من أجل $x \in]0; 2]$: $g(x) + f(x) = 0$ ، ثم استنتج طريقة لرسم (C_g) انطلاقا من (C_f) و ارسمه.