الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية عمور عبد القادر – الجلفة – **مديرية التربية لولاية الجلفة**

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي **دورة : 2023**

الشعبة : علوم تجريبية

التحضير للبكالوريا : الرياضيات **المدة :03 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق يحوي 7 كرات لانفرق بينها باللمس ، منها اربع كرات بيضاء مرقمة بـ $2, 1, -1, -1$ وكرتان سوداء مرقمة بـ $1, -1$ وكرية حمراء تحمل الرقم 2 ،نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات .

1. أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " 3 كرات من نفس اللون." B " ثلاث كرات مختلفة الالوان مثنى مثنى."

C " 3 كرات مجموع ارقامها 2 ."

2. علما أن الكرات المسحوبة مختلفة الالوان مثنى مثنى ، ما احتمال ان يكون مجموع ارقامها 2

3. X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الارقام الظاهرة .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، استنتج $E(2023X - 1444)$.

التمرين الثاني: (4.5 نقاط)

$I)$ f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x}{x+8}$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2. استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$ فإن $f(x) \geq 0$.

$II)$ (U_n) متتالية معرفة كمايلي : $U_0 = 1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فان $U_n \geq 0$

2. أدرس اتجاه تغير (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

3. (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = 1 + \dfrac{7}{U_n}$.

أ) بين أن (V_n) هندسية أساسها 8 ،يطلب تعيين حدها الاول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n ، أحسب $\lim U_n$.

4. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{1}{U_1} + \ldots\ldots\dfrac{1}{U_n}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

وليكن $P(z)$ كثير الحدود المعرف بـ $P(z)=z^2-8\sqrt{3}z+64$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$
2. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهماعلى الترتيب : $a=4\sqrt{3}-4i$ و $b=4\sqrt{3}+4i$ على الترتيب .
   أ) أكتب العددين b,a على الشكل الأسي .
   بـ) أحسب المسافات AB,OB,OA ،ثم استنتج طبيعة المثلث OAB
3. لتكن النقطتان C و D ذات اللاحقتين $c=-\sqrt{3}+i$ و $d=2i$ على الترتيب ، ولتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(B,1);(D,1);(O,-1)\}$
   أ) بين أن لاحقة النقطة G هي $4\sqrt{3}+6i$
4. بين أن النقط G,D,C على استقامة واحدة .
5. بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع .
6. بين أن $\dfrac{Z_C-Z_G}{Z_A-Z_G}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ، استنتج طبيعة المثلث AGC ؟ ،برر

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

I) g دالة معرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=\ln(1-x)+x^2-2x-1$

1. احسب نهايتي الدالة g عند طرفي مجموعة تعريفها.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.32<\alpha<-0.31$
4. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty;1[$.

II) f دالة معرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2-\ln(1-x)}{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)$، فسر النتيجة الثانية بيانيا.
2. تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;1[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(1-x)^2}$.
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان وحيدان β و λ حيث $0.5\le\beta\le0.6$ و $-3\le\lambda\le-3.2$.
5. اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
6. أثبت أن : $f(\alpha)=-2\alpha-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
7. احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(f(x)+x\Big)$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ،معينا معادلته.

8. ادرس الوضعية النسبية بين (C_f) و (Δ).
9. أرسم (T) ، (Δ) و (C_f).
10. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(x+1)^2 = \ln(1-x)+3-mx+m$

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

أختر الاجابة الصحيحة في كل مايلي مع التبرير :

1. حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ هي كل الدوال y حيث: (مع C ثابت حقيقي)

أ) $y(x) = ln(2x) - \frac{1}{x} + C$ ب) $y(x) = 2ln(x) - \frac{1}{x} + C$ ج) $y(x) = ln(x^2) + \frac{1}{x} + C$

2. التكامل $\int_1^{\sqrt{e}} xln(x)\ dx$ يساوي

أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\sqrt{e} - 1$.

3. عدد اللجان المكونة من رئيس ونائب الممكن تشكيلها من 20 شخص هي

أ) 190 ب) 380 ج) 400 .

4. حلول المعادلة $Z^4 - 1 = 0$ في $\mathbb{C}$ هي

أ) $\{1; -1\}$ ب) $\{i; 1\}$ ج) $\{i; -i; 1; -1\}$.

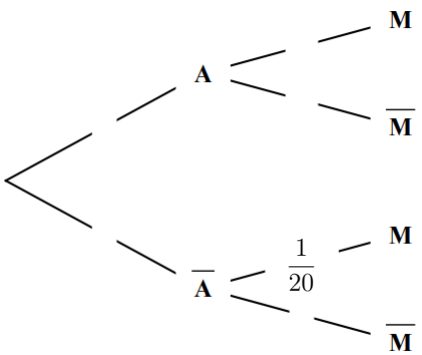
التمرين الثاني: (7 نقاط)

يحتوي وعاء U على 3 كرات حمراء وكرتان خضراء وكرية بيضاء ويحتوي وعاء V على 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و3 كريات بيضاء (كل الكريات متماثلة ولانفرق بينها باللمس). نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد بالكيفية التالية :

نرمي زهرة نرد متجانسة مرة واحدة مرقمة بـ $1; 1; 1; 2; 2$ و 3 ، إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نسحب الكرات من U إذا كان الرقم الظاهر فرديا نسحب الكرات من V.

نسمي الحدث A "ظهور رقم زوجي"

نسمي الحدث M "ظهور 3 كرات من نفس اللون "



1. تحقق أن $P(\overline{A})$ احتمال السحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$
2. علما ان الكرات المسحوبة من U ،بين ان احتمال أن تكون من نفس اللون هو $\frac{1}{20}$
3. انقل شجرة الاحتمال المقابلة ثم اكملها ،استنتج $P(M)$.
4. ماهو احتمال السحب من الوعاء U علما ان الكرات المسحوبة مختلفة الالوان ؟

التمرين الثالث: (4.5 نقاط)

$I)$ f دالة معرفة على المجال $[-4;-1]$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+7}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(لاحظ الشكل- الورقة المرفقة -)

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
2. استنتج أنه : إذا كان $x\in]-4;-1[$ فإن $f(x)\in]-4;-1[$

$II)$ (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حيث $U_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(U_n)$

1. مثل على حامل محور الفواصل الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (U_n)
2. أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.
3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4<U_n<-1$.
4. ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) استنتج أنها متقاربة .

$III)$ (V_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n=\dfrac{-U_n-1}{U_n+4}$.

1. أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$، معينا حدها الأول
2. اكتب V_n بدلالة العدد الطبيعي n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_n=-4+\frac{3}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3. أحسب المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{U_0+4}+\dfrac{1}{U_1+4}+\dfrac{1}{U_2+4}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{U_n+4}$

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

$I)$ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x+3+e^x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها .
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3\le\alpha\le-3.1$
3. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

$II)$ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{xe^x-2}{e^x+1}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$) .

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية بيانيا.
2. بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.
3. أدرس الوضعية النسبية بين (C) و (Δ) .

4. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$.
5. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
6. بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $[0.8; 0.9]$
7. بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم أستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
8. أكتب معادلة (T) مماس (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
9. أرسم (Δ) ، (T) و (C) .
10. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد واشارة حلول المعادلة $f(x) = ln(m)$.

بالتوفيــق

التصحيح النموذجي لامتحان الفصل الثالث

① الموضوع الأول

التمرين 1:

① حساب احتمال الحوادث A, B و C:

"A" ثلاث كرات من لون واحد"

$A=\{BBB\}$

$P(A)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$

"B" ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى"

$B=\{BNR\}$

$P(B)=\frac{C_4^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{35}=\frac{8}{35}$

"C" ثلاث كرات مجموع أرقامها 2"

$C=\{(2,-1,-1)\}$

$P(C)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{35}=\frac{6}{35}$

ب/ حساب الاحتمال $P_B(C)$

أ/ حساب $P(B\cap C)$

$B\cap C=\{B_{-1}N_{-1}R_2\}$

$P(B\cap C)=\frac{C_4^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{35}=\frac{2}{35}$

ومنه $P_B(C)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}$

$=\frac{\frac{2}{35}}{\frac{8}{35}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

ج/ X المتغير العشوائي:

$X(\{(-1,-1,-1)\})=-3$

$X(\{(-1,-1,1)\})=-1$

$X(\{(-1,-1,2)\})=0$

$X(\{(-1,1,1)\})=1$

$X(\{(-1,1,2)\})=2$; $X(\{-1,2,2\})=3$

$X(\{(1,1,2)\})=4$

$X(\{(1,2,2)\})=5$

ومنه $X\in\{-3,-1,0,1,2,4,5\}$

قانون احتمال X:

$P(X=-3)=\frac{C_3^3}{35}=\frac{1}{35}$

$P(X=-1)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{35}=\frac{6}{35}$

$P(X=0)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{35}=\frac{6}{35}$

$P(X=1)=\frac{C_3^1\,C_2^2}{35}=\frac{3}{35}$

$P(X=2)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{35}=\frac{12}{35}$

$P(X=4)=\frac{C_2^2\cdot C_2^1}{35}=\frac{2}{35}$

$P(X=5)=\frac{C_2^1\cdot C_2^2}{35}=\frac{2}{35}$

$P(X=3)=\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{35}=\frac{3}{35}$

X	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$

$E(X)=\sum x_i p_i=\frac{-3-6+3+24+9+8+10}{35}$

$=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$

$E(2023X-1444)=2023\,E(X)-1444$

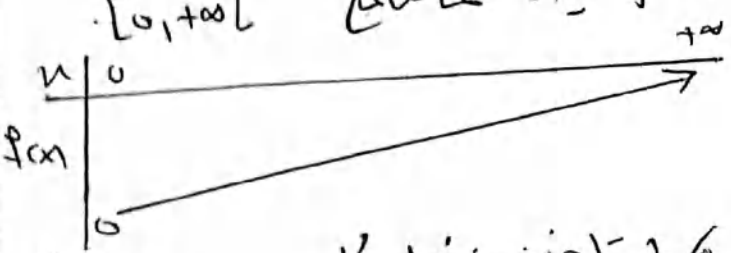
$=2023\left(\frac{9}{7}\right)-1444=1157$.

تمرين 2:

I/1) - دراسة اتجاه تغير f + جدول تغيراتها:

$f'(x)=\frac{1(x+8)-1.x}{(x+8)^2}=\frac{8}{(x+8)^2}>0$

f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.



2/ استنتاج: من أجل كل $x\geq 0$; $f(x)\geq 0$

من جدول تغيرات f لدينا $f(x)\geq f(0)=0$

من أجل كل $x\geq 0$.

II/1) البرهان بالتراجع أن $u_n\geq 0$:

نضع الخاصية $P(n)$: $u_n\geq 0$

من أجل n عدد طبيعي.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1\geq 0$

و منه $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $u_n\geq 0$.

و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}\geq 0$

لدينا $u_n\geq 0$ و منه حسب السؤال I-2

فإن $f(u_n)\geq 0$ أي $u_{n+1}\geq 0$

و منه $P(n+1)$ محققة وبالتالي

$P(n)$ صحيحة.

2/ دراسة اتجاه تغير (u_n) + استنتاج التقارب:

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n+8}-u_n=\frac{u_n-7u_n-u_n^2}{u_n+8}$

$=\frac{-u_n(u_n+6)}{u_n+8}\leq 0$

و لدينا $u_n\geq 0$. و منه (u_n) متناقصة

جميع حدود (u_n) موجبة و محدودة بـ 0

الأصغر فهي متقاربة.

3/ بيان أن (v_n) هندسية + حساب v_n بدلالة n

$v_{n+1}=1+\frac{7}{u_{n+1}}=1+\frac{7}{\frac{u_n}{u_n+8}}$

$=1+\frac{7u_n+56}{u_n}=1+7+\frac{56}{u_n}$

$=8+\frac{56}{u_n}=8\left(1+\frac{7}{u_n}\right)=8v_n$

و منه (v_n) هندسية أساسها $q=8$

حساب v_0:

$v_0=1+\frac{7}{u_0}=1+\frac{7}{1}=8$

ب/ عبارة كل من v_n و u_n بدلالة n:

$v_n=v_0\times q^n=8.8^n=8^{n+1}$

و لدينا

$v_n-1=\frac{7}{u_n}$

أي أن $u_n=\frac{7}{v_n-1}=\frac{7}{8^{n+1}-1}$

حساب $\lim u_n$:

$\lim u_n=\lim\frac{7}{8^{n+1}-1}=0$

لأن

$\lim 8^{n+1}=+\infty$.

4/ حساب المجموع S_n:

$S_n=\frac{8}{v_0}+\frac{8}{v_1}+\dots+\frac{8}{v_n}$

$=\frac{8}{7}(v_0-8)+\frac{8}{7}(v_1-1)\dots+\frac{8}{7}(v_n-1)$

$=-\frac{8}{7}(n+1)+\frac{8}{7}v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$=-\frac{8}{7}(n+1)+\frac{8}{7}.8\frac{8^{n+1}-1}{7}$

$=-\frac{8}{7}(n+1)+\frac{8}{19}\left(8^{n+1}-1\right)$.

التمرين 3:

1) حل المعادلة $P(z)=0$:

$z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

$\Delta=-64<0$

$z_1=\frac{8\sqrt{3}+i\sqrt{64}}{2}=4\sqrt{3}+4i$

$z_2=\frac{8\sqrt{3}-i\sqrt{64}}{2}=4\sqrt{3}-4i$

2) كتابة a و b على الشكل الأسي:

$|a|=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(-4)^2}=\sqrt{64}=8$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}\end{cases}$

ومنه $\theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

أي: $a=8e^{-\frac{\pi}{6}i}$

ولدينا $b=\bar{a}=8e^{\frac{\pi}{6}i}$

ب/ حساب الأطوال OA, OB, AB:

$OA=|z_A-z_O|=|z_A|=|a|=8$

$OB=|z_B|=|b|=8$

$AB=|z_B-z_A|=|8i|=8$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3/ بيان أن O هي صورة G و $z_G=4\sqrt{3}+6i$

$z_G=\frac{z_B+z_D-z_O}{2}=\frac{4\sqrt{3}+4i+2i}{2}$

$=4\sqrt{3}+6i$

4/ بيان أن C, D, G على استقامة واحدة:

نبين أن $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$

ولدينا

$\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}=\frac{4\sqrt{3}+6i+\sqrt{3}-i}{2i+\sqrt{3}-i}=\frac{5\sqrt{3}+5i}{\sqrt{3}+i}$

$=5\in\mathbb{R}$

1/ بيان أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع:

نبين أن $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DG}$

لدينا $z_{\overrightarrow{OB}}=z_B-z_O=z_B=4\sqrt{3}+4i$

$z_{\overrightarrow{DG}}=z_G-z_D=4\sqrt{3}+6i-2i=4\sqrt{3}+4i$

أي $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DG}$

ومنه $OBGD$ متوازي أضلاع.

$\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=\frac{-\sqrt{3}+i-4\sqrt{3}-6i}{4\sqrt{3}-4i-4\sqrt{3}-6i}$ (1/6)

$=\frac{-5\sqrt{3}-5i}{-10i}=\frac{-5\sqrt{3}i+5}{10}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

أي $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right|=1$

و $\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

ومنه المثلث AGC متقايس الأضلاع

أي $\frac{|z_C-z_G|}{|z_A-z_G|}=\frac{GC}{GA}=1$

و $(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GC})=-\frac{\pi}{3}$

التمرين 4:

1) حساب نهايات g:

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1-x)+x^2-2x-1 = +\infty$

$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \ln(1-x)+x^2-2x-1 = -\infty$

2) دراسة اتجاه تغير g + جدول تغيراتها.

$g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 2x - 2 = \frac{-1}{1-x} - 2(1-x)$

$= \frac{-1-2(1-x)^2}{1-x} = -\left(\frac{1+2(1-x)^2}{1-x}\right) < 0$

g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$.

x	$-\infty$		1	
g(x)	$+\infty$	↘		$-\infty$

3) برهنة البيع المتوسطة: $g(x)=0$

4) جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	1
g(x)	+	0	−

5) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to 1} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{1-x}$

$= +\infty$.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-2-\ln(1-x)}{1-x} = +\infty$

$x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f).

6) إثبات أن $f'(x) = \frac{-g(x)}{(1-x)^2}$

$f'(x) = \frac{(2x+2+\frac{1}{1-x})(1-x)+x^2+2x-2-\ln(1-x)}{(1-x)^2}$

$= \frac{2(1-x^2)+1+x^2+2x-2-\ln(1-x)}{(1-x)^2}$

$= \frac{-x^2+2x+1-\ln(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{-g(x)}{(1-x)^2}$.

3) اتجاه تغير f + جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$	α	1
f'(x)	−	0	+ ‖

f متناقصة على $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة على $]1;+\infty[$

x	$-\infty$	α	1
f(x)	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4) برهنة البيع المتوسطة: $f(x)=0$

5) معادلة المماس (T):

$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$= 1\cdot x - 2$

$y = x-2$.

6) بيان $f(x) = -2\alpha-2+\frac{1}{\alpha-1}$

لدينا $g(\alpha) = \ln(1-\alpha)+\alpha^2-2\alpha-1 = 0$

ومنه $-\ln(1-\alpha) = \alpha^2-2\alpha-1$

ومنه $f(\alpha) = \frac{\alpha^2+2\alpha-2-\ln(1-\alpha)}{1-\alpha}$

$= \frac{\alpha^2+2\alpha-2+\alpha^2-2\alpha-1}{1-\alpha}$

$= \frac{2\alpha^2-3}{1-\alpha} = \frac{-2\alpha^2+3}{\alpha-1} = -\frac{2\alpha^2+2+1}{\alpha-1}$

$= -\frac{2(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}$

$= -2\alpha-2+\frac{1}{\alpha-1}$.

6/ حساب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$: نستنتج أن (Δ) مستقيم مقارب مائل

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-2-\ln(1-x)}{1-x} + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-2+x-x^2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -3$$

و منه $y=-x-3$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$.

7/ دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ):

$$f(x)-(-x-3) = \frac{1-\ln(1-x)}{1-x}$$

إشارة $f(x)-y$ من إشارة $1-\ln(1-x)$

$1-\ln(1-x) \geq 0$ يعني $1 \geq \ln(1-x)$

ومنه $1-x \leq e$ أي

$1 > x \geq 1-e$

x	$-\infty$		$1-e$		1
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	$\|\|$
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في $(1-e;e-4)$.

8/ أنظر الورقة

9/ المناقشة البيانية:

$$(x+1)^2 = \ln(1-x)+3+m(-x+1)$$

$$x^2+2x+1-\ln(1-x)-3 = m(1-x)$$

$$\frac{x^2+2x-2-\ln(1-x)}{1-x} = m$$

$$f(x) = m$$

$m \in]-\infty, f(\alpha)[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا
$m = f(\alpha)$	المعادلة تقبل حلين متمايزين
$m \in]f(\alpha), +\infty[$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا

الموضوع الثاني:

التمرين 1:

① حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ هي الدوال y حيث:

$y'(x) = \left(2\ln|x| - \frac{1}{x} + C\right)'$

$= \frac{2}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

② التكامل $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln(x)\,dx$ بالتكامل بالتجزئ.

$\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{e}} x\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^{\sqrt{e}}$

$= \frac{e}{2}\ln\sqrt{e} - \frac{1}{4}(e-1)$

$= \frac{e}{4} - \frac{e}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

③ عدد الحالات هو: 380.

$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20\times 19 = 380$

④ حلول المعادلة: $z^4 - 1 = 0$

هي $\{i, -i, 1, -1\}$

$z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1)$

$z^4 - 1 = 0$ تكافئ $z^2 - 1 = 0$ أو $z^2 + 1 = 0$

أي $z^2 = 1$ أو $z^2 = -1$

أي $\begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases}$

التمرين 2:

① بيانات

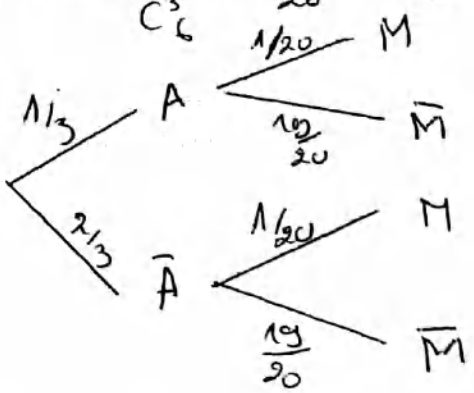
$P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ إذن

② تكمن "D" كيفيات تنتمي للمجموعة "M"

$P(D) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20} = P_A(M)$

③



استنتاج $P(M)$.

$P(M) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{20} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{20} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$.

④ $P_{\bar{M}}(A) = \frac{P(A\cap\bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{19}{20}}{1-\frac{1}{20}} = \frac{1}{3}$.

التمرين 3:

1/ دراسة اتجاه تغير f + جدول تغيراتها.

$f'(x) = \frac{2(x+7)-(2x-4)}{(x+7)^2} = \frac{18}{(x+7)^2} > 0$

f متزايدة تماما على $[-4;-1]$

x	-4		-1
$f(x)$	-4	↗	-1

2/ من جدول تغيرات f نلاحظ أن

$-4 \leq x \leq -1$

$-4 \leq f(x) \leq -1$

3/ I_1 المستقيل.

4/ (I_n) متزايدة ومتقاربة نحو -1.

5/ البرهان بالتراجع أن $-4 < I_n < -1$

نضع خاصية $P(n): -4 < I_n < -1$

من أجل $n=0$: $-4 < I_0 = -3 < -1$

$P(0)$ محققة. نفرض صحة $P(n)$ أي

$-4 < I_n < -1$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $-4 < I_{n+1} < -1$.

لدينا $-4 < I_n < -1$ من السؤال

1/ نجد $-4 < f(I_n) < -1$

أي $-4 < I_{n+1} < -1$ وهو

$P(n+1)$ محققة وبالتالي صحة $P(n)$.

4/ دراسة اتجاه تغير (I_n).

$I_{n+1} - I_n = \frac{2I_n - 4}{I_n + 7} - I_n$

$= \frac{-I_n^2 - 5I_n - 4}{I_n + 7}$

إشارة $-I_n^2 - 5I_n - 4$ من إشارة $-t^2 - 5t - 4$ على المجال $]-4;-1[$

$-t^2 - 5t - 4 = 0$ نقبل طريقة

$t_1 = -4$ ، $t_2 = -1$

t	-4		-1
$-t^2-5t-4$	0	$+$	0

ومنه (I_n) متزايدة تماما.

فتقارب (I_n): بما أن (I_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ -1 فهي متقاربة.

III) بيان أن (U_n) هندسية حيث $q = \frac{1}{2}$.

$U_{n+1} = \frac{-I_{n+1}-1}{I_{n+1}+4} = \frac{-\frac{2I_n-4}{I_n+7} - 1}{\frac{2I_n-4}{I_n+7} + 4}$

$= \frac{\frac{-2I_n+4-I_n-7}{I_n+7}}{\frac{2I_n-4+4I_n+28}{I_n+7}}$

$= \frac{-3I_n+3}{6I_n+24} = \frac{3}{6}\left(\frac{-I_n-1}{I_n+4}\right)$

$= \frac{1}{2}U_n$

$q = \frac{1}{2}$ هندسية أساسها (U_n)

$U_0 = \frac{-(I_0)-1}{I_0+4} = \frac{3-1}{-3+4} = 2$

عبارة U_n بدلالة n:

$U_n = U_0 \times q^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$

عبارة I_n بدلالة n: (*)

$U_n = \frac{-I_n-1}{I_n+4} = \frac{-I_n-4+3}{I_n+4}$

$= -1 + \frac{3}{I_n+4}$

ومنه $\frac{3}{I_n+4} = U_n + 1$ ..... (*)

$$w_n + 4 = \frac{3}{v_n + 1}$$

ب) بين أن

$$w_n = -4 + \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= -4 + \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

استنتج $\lim w_n$:

$$\lim w_n = \lim -4 + \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= -1 .$$

③ احسب بدلالة n المجموع

$$S_n = \frac{1}{w_0 + 4} + \cdots + \frac{1}{w_n + 4}$$

$$= \frac{1}{3}(v_0 + 1) + \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \cdots + \frac{1}{3}(v_n + 1)$$

$$= \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + \frac{1}{3}(1 + 1 + \cdots + 1)$$

$$= \frac{1}{3} v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1) .$$

التمرين 4:

① دراسة اتجاه تغير g + جدول تغيراتها.

$g'(x) = 1 + e^x > 0$

g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

② بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α.

③

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

④

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

II/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ne^x - 2}{e^x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x\left(n - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n - \frac{2}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = +\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ne^x - 2}{e^x + 1} = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي بجوار $-\infty$.

② بيان أن (Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim\left(\frac{ne^x - 2}{e^x + 1} - n\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ne^x - 2 - ne^x - n}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - n}{e^x + 1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n\left(\frac{2}{n} - 1\right)}{n\left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right)} = \lim \frac{\frac{2}{n} - 1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$= 0$.

(Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$

وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$f(x) - y = \frac{2 - x}{e^x + 1}$

إشارة $f(x) - y$ من إشارة $2 - x$

$2 - x = 0$ يعني $2 = x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-y$		+	0	−	
	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $(2, e^2)$		(C_f) تحت (Δ)

③ دراسة الوضعية النسبية:

④ بيان أن $f'(x) = e^x \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(n+1)e^x(e^x+1) - e^x(ne^x - 2)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[(n+1)(e^x+1) - ne^x + 2\right]}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[ne^x + n + e^x + 1 - ne^x + 2\right]}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[n + 3 + e^x\right]}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x\, g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	

f متناقصة على $[\alpha, +\infty[$ ومتزايدة على $]-\infty, \alpha]$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
			-2		
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

$f(\alpha) = \alpha - 5 + \frac{12}{\alpha+2}$ ٦- بيان أن

لدينا:

$g(\alpha) = \alpha + 3 + e^{\alpha} = 0$

ومنه $e^{\alpha} = -\alpha - 3$ ---(1)

ولدينا أيضا

$f(\alpha) = \frac{\alpha e^{\alpha} - 2}{e^{\alpha} + 1}$ ---(2)

بتعويض (1) في (2) نجد.

$f(\alpha) = \frac{(-\alpha-3)\alpha - 2}{-\alpha-3+1} = -\frac{\alpha^2 - 3\alpha - 2}{-\alpha-2}$

$= \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{\alpha+2} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha+2} = \alpha + 1$

$f(x)$ حصر

لدينا $-3,1 \leq \alpha \leq -3$

ومنه $-2,1 \leq \alpha + 1 \leq -2$

$-2,1 \leq f(\alpha) \leq -2$

٥/ معادلة (T) المماس عند 0.

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$= 1.x - 1$

$y = x - 1$

٩/ الرسم:

١٠/ المناقشة البيانية:

لما $m \in]-\infty, -2[$ المعادلة تقبل حلا

لما $m \in [-2, f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلين سالبين

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

لما $m \in]f(\alpha), 0[$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلين

لما $m \in]0, +\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا.

ومنه:

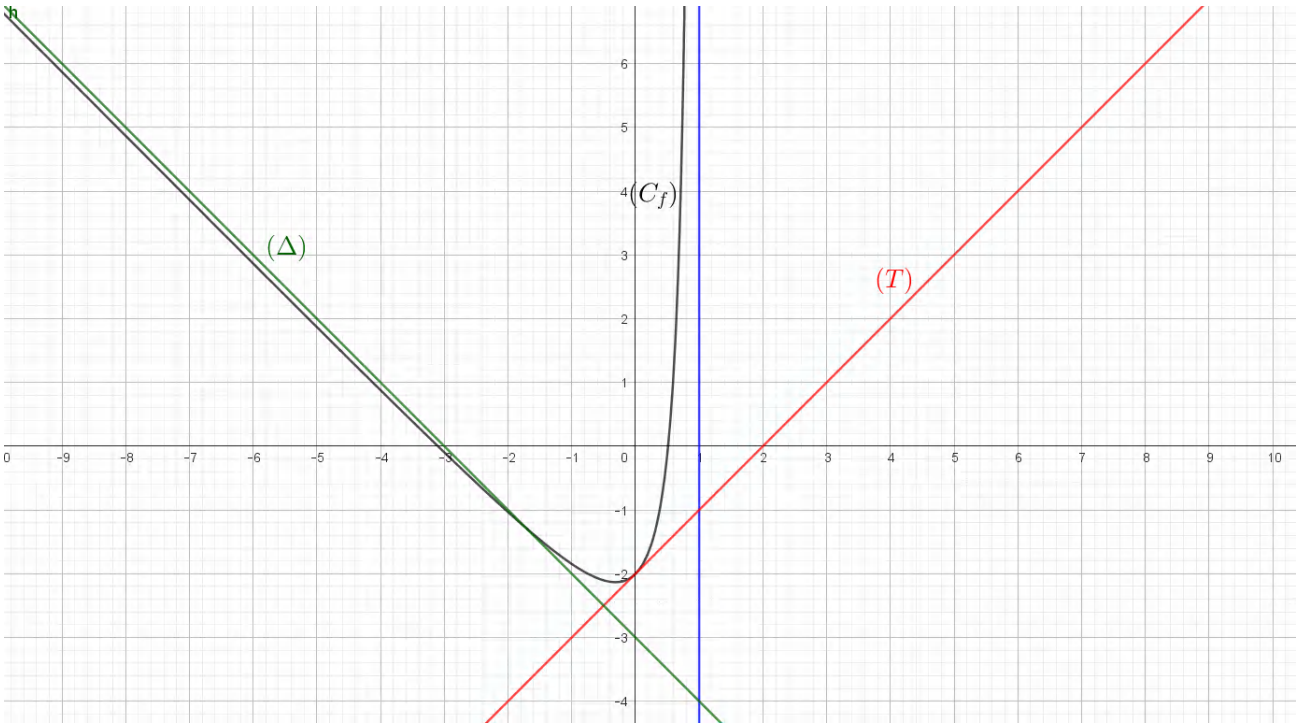
لما $m \in]0; e^{-2}[$ المعادلة تقبل حلا

لما $m \in [e^{-2}; 1[$ المعادلة تقبل حلين سالبين

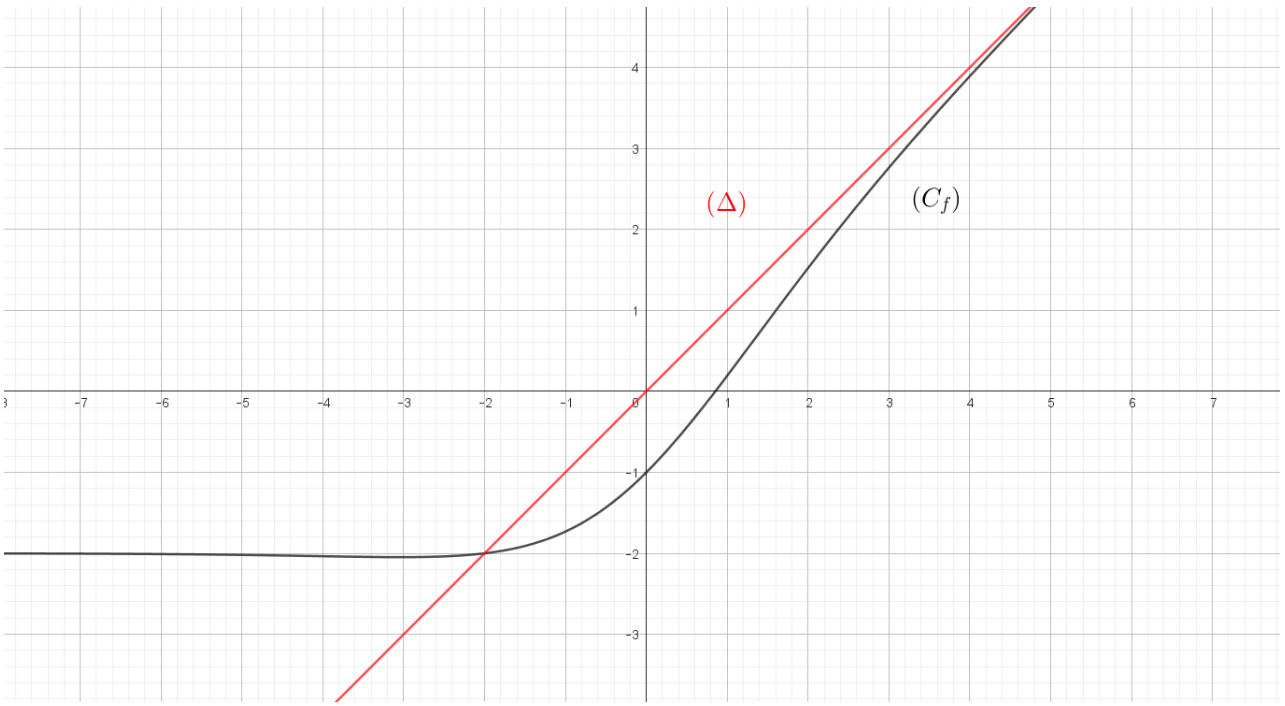
لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

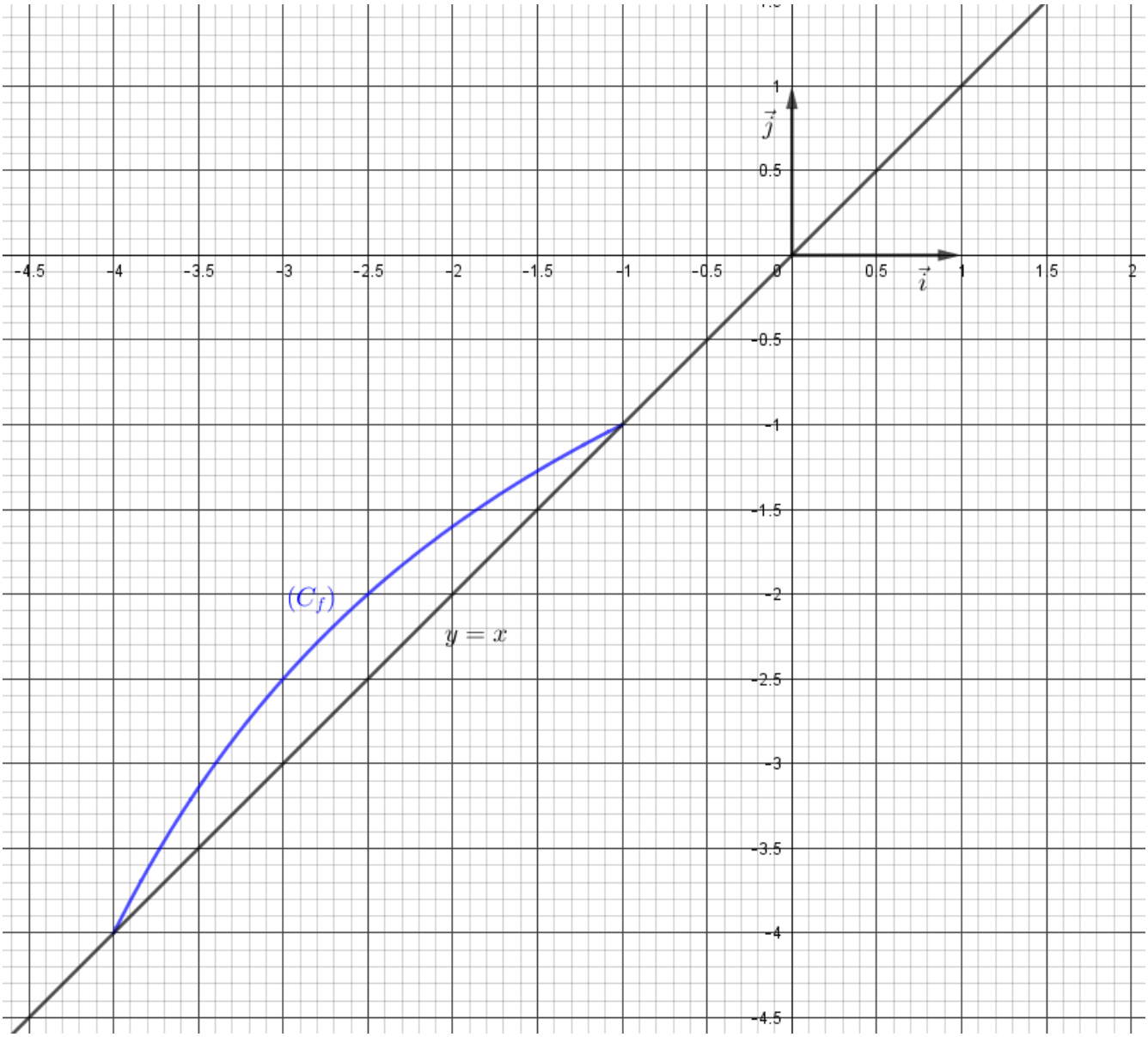
لما $m \in]1, +\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا

الموضوع الأول



الموضوع الثاني




(C_f)
$y = x$
$\vec{i}$
$\vec{j}$