



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل العدد 0 ، وخمس كريات سوداء تحمل العدد -3 ، وكرتين حمراوتين تحملان العدد α (حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$) ، كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد

- 1 أحسب إ احتمال الأحداث الآتية : A : " الحصول على كرتين من نفس اللون "
- B : " الحصول على كرتين جداء الأعداد المسجلة عليها معدوم " ، C : " سحب كرتين حمراوتين على الأكثر "
- 2 نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ، مجموع العددين المسجلين على الكرتين عرف قانون إ احتمال للمتغير العشوائي X

- 3 بين أن : $E(X) = \frac{2}{5}\alpha - 3$

- 4 عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي α حتى يكون $E(X) > 0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z) = z^3 - 8$

- 1 تحقق أن : $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$

- 2 إستنتج كل حلول المعادلة $P(z) = 0$

II- نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C ذات اللواحق

$$z_C = 2 \quad , \quad z_B = \bar{z}_A \quad , \quad z_A = -1 + \sqrt{3}i$$

- 1 أكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسّي

- 2 إستنتج أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة (يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها)

- 3 بين أن : $z_A^{2023} = 2^{2022} z_A$ ، ثم إستنتج مايلي : $(z_A^{2023} + z_B^{2023} + z_C^{2023})$

- 4 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي

- 5 إستنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- 1 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (E) $3x - 2y = 1$...
 - 2 أ/ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، بين أن الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حل للمعادلة (E)
ب/ إستنتج أن العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما
 - 3 ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $21n + 4$ و $2n + 1$
أ/ عين القيم الممكنة للعدد d
ب/ بين أنه إذا كان $d = 13$ فإن $n \equiv 6[13]$
 - 4 من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ نضع $A = 21n^2 - 17n - 4$ ، $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$
أ/ بين أن العددين A و B يقبلان في $\mathbb{Z}$ القسمة على $n - 1$
ب/ عين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B
- التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$.
- 1 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 - 2 أحسب $g(0)$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.
- II- f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - 2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
ج/ إستنتج أنه إذا كان $x \in [0; 4]$ فإن $f(x) \in [0; 4]$
 - 3 أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)
ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ)
 - 4 أرسم (Δ) و (C_f)
- III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ب: $u_{n+1} = f(u_n)$
- 1 بإستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3
 - 2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$
 - 3 أ/ بين أن (u_n) متناقصة ، ثم إستنتج أنها متقاربة
ب/ أحسب نهاية u_n

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- يحتوي صندوق U_1 على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء
ويحتوي صندوق U_2 على 3 كرات حمراء و كرية سوداء و كرية بيضاء
أولاً : نسحب عشوائياً على التوالي ودون إرجاع 3 كرات من الصندوق U_1
- 1 شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية
 - 2 أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، A : "الحصول على 3 كرات حمراء" B : "الحصول على كرية حمراء على الأقل"
- ثانياً : نسحب عشوائياً كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2
- 1 علماً أن الكرة المسحوبة من U_2 سوداء ما هو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل
 - 2 ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة
أ/ برر أن قيم X هي 0 و 1
ب/ أحسب الأمل الرياضي ، ثم إستنتج $E(1444X + 2023)$
ج/ أحسب $P((\ln x)^2 - \ln x \leq 0)$
- 3 نضيف n كرة سوداء إلى الصندوق U_1 و n كرة حمراء إلى الصندوق U_2
نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2
لتكن الحادثة C : "الحصول على كرتين من نفس اللون" . عين قيمة n حتى يكون $P(C) = \frac{3}{7}$
- التمرين الثاني: (04 نقاط)

- لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{2^n + 3n - 1}{2}$ ، $v_n = \frac{2^n - 3n + 1}{2}$ على الترتيب
- 1 أحسب الحدود u_0 و u_1 و u_2 ، v_0 ، v_1 ، v_2
 - 2 لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = u_n - v_n$
أ/ أثبت أن (w_n) متتالية حسابية معيناً أساسها وحدها الأول
ب/ أحسب المجموع $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$
 - 3 لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $t_n = u_n + v_n$
أ/ أثبت أن (t_n) متتالية هندسية معيناً أساسها وحدها الأول
ب/ أحسب المجموع $S' = t_0 + t_1 + \dots + t_{10}$
 - 4 ليكن : $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$ ، $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$
أ/ تحقق أن : $S = S_1 - S_2$ ، و $S' = S_1 + S_2$
ب/ إستنتج قيمة كل من S_1 و S_2

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- 1 أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7
ب/ ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد $2017^{4n+2} + 2019^{6n+4}$ على 7
- 2 نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $(E) : 343x - 648y = 76 \dots$
أ/ بين أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$
ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
- 3 ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y حلول المعادلة (E)
أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d
ب/ عين الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $d = 76$
- 4 λ عدد طبيعي يكتب $\beta 1 \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي التعداد 7 ، ويكتب $\alpha 1 \alpha \beta$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ، جد العددين α و β ، ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = x + e^x$
- 1 أدرس إتجاه تغير الدالة g
- 2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.57 < \alpha < -0.56$
- 3 استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$
- II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = x - xe^{1-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 1 أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$
- 2 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)
- 3 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = e^{1-x}g(x-1)$
ب/ إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha + 1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty; \alpha + 1]$
ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f
- 4 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1
- 5 أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) . (نأخذ $f(\alpha + 1) = -0.4$)
- 6 عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $e^{m-1+x} = x$ حلين متميزين
- III- λ عدد حقيقي موجب تماما
- 1 بإستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{1-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0
- 2 أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادليهما $x = \lambda$ و $x = 0$

الحل المفضل لبقا لرياضة
شعبة رياضية

الموضوع الأول

التمرين الأول

B : 3 : 0, 0, 0

N : 5 : -3, -3, -3, -3, -3

R : 2 : α, α

عدد الحالات الممكنة للسحب

$$C_2^{20} = 190$$

(1) حساب احتمال الأحداث التالية
الحادثة A معناه سحب إما
(B, B) أو (N, N) أو (R, R)

$$P(A) = \frac{C_2^3 + C_2^5 + C_2^2}{45} = \frac{14}{45}$$

(*) الحادثة B معناه سحب إما
(0, 0) أو (0, ̄0)

$$P(B) = \frac{C_2^1 C_1^7 + C_2^2}{45} = \frac{24}{45}$$

(*) الحادثة C معناه سحب إما
(R, R) أو (R, ̄R) أو (̄R, ̄R)

$$P(C) = \frac{C_2^2 + C_2^1 C_1^8 + C_2^0 C_2^8}{45} = 1$$

(2) قيم المتغير العشوائي X هي

$$X = \{0, -6, -3, \alpha, \alpha-3, 2\alpha\}$$

عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X=0) = \frac{C_2^3}{45} = \frac{3}{45}$$

$$P(X=-6) = \frac{C_2^5}{45} = \frac{10}{45}$$

$$P(X=-3) = \frac{C_2^3 C_1^5}{45} = \frac{15}{45}$$

$$P(X=\alpha) = \frac{C_2^1 C_1^8}{45} = \frac{6}{45}$$

$$P(X=\alpha-3) = \frac{C_2^1 C_1^2}{45} = \frac{10}{45}$$

$$P(X=2\alpha) = \frac{C_2^2}{45} = \frac{1}{45}$$

x_i	0	-3	-6	α	$\alpha-3$	2α
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{10}{45}$

$$E(X) = \frac{6}{5} \alpha - 3$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i P_i$$

$$= \frac{0 \times 3 + (-3) \times 15 + (-6) \times 10 + 6\alpha + 2\alpha + (\alpha-3) \times 10}{45}$$

$$= \frac{18\alpha - 135}{45} = \frac{18\alpha}{45} - 3 = \frac{2}{5} \alpha - 3$$

(4) عت أصغر قيمة لـ α بحيث $E(X) > 0$

$$\frac{2}{5} \alpha - 3 > 0$$

$$\frac{2}{5} \alpha > 3$$

$$\alpha > \frac{15}{2}$$

$$\alpha \in] \frac{15}{2} ; +\infty [$$

بما أن α عدد طبيعي فإن

$$\alpha = 8$$

$$|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| \quad \text{لدينا}$$

$$OA = OB = OC \quad (0.5)$$

ومنه نستنتج أن النقاط A, B, C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = 2$

$$Z_A^{2023} = 2^{2022} Z_A \quad (3) \quad \text{تبيين أن}$$

$$Z_A^{2023} = \left(2 e^{\frac{2\pi}{3}i} \right)^{2023}$$

$$= 2^{2023} \times e^{\frac{4046\pi}{3}i}$$

$$= (2)^{2023} \times e^{\left(\frac{4044\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)i}$$

$$= (2)^{2023} \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 2^{2022} \times 2 \times e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$= 2^{2022} \cdot Z_A \quad (0.75)$$

و . ه . و

$$Z_A^{2023} + Z_B^{2023} + Z_C^{2023} \quad \text{استنتاج} \quad (0.75)$$

$$Z_A^{2023} = 2^{2022} Z_A \quad \dots \text{لدينا} \quad (1)$$

$$Z_B = \overline{Z_A} \quad \text{وبما أن}$$

$$Z_B^{2023} = 2^{2022} Z_B \quad (2)$$

$$Z_C^{2023} = 2^{2022} Z_C \quad (3) \quad \text{لدينا أيضا}$$

التسريع الثاني

(I) التحقق

$$(Z-2)(Z^2+2Z+4) = Z^3+2Z^2+4Z-2Z^2-4Z-8 = Z^3-8 \quad (0.25)$$

و . ه . و

$$P(Z) = 0 \quad (0.15) \quad \text{استنتاج حلول}$$

$$(Z-2)(Z^2+2Z+4) = 0 \quad \text{تكافئ } Z^3-8=0$$

$$Z-2=0 \quad \text{أو} \quad Z^2+2Z+4=0$$

$$Z=2 \quad \text{أو} \quad Z=-1+\sqrt{3}i \quad \text{أو} \quad Z=-1-\sqrt{3}i$$

(II) كتابة Z_A, Z_B, Z_C على الشكل الأسّي

$$Z_A = -1+\sqrt{3}i$$

$$|Z_A| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\arg(Z_A) = \theta \quad \text{نضع}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$Z_A = 2 e^{\frac{2\pi}{3}i} \quad (0.5)$$

ومنه

$$Z_B = \overline{Z_A} \quad \text{وبما أن}$$

$$Z_B = 2 e^{-\frac{2\pi}{3}i} \quad (0.25)$$

نلاحظ أن Z_C هو عدد حقيقي موجب ومنه

$$Z_C = 2 e^{0i} \quad (0.25)$$

(3) استنتاج أن A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

و منه $(\vec{AC}; \vec{AB}) = -\frac{\pi}{3}$ المقرين (3)
 متساويين الاضلاع ABC

① حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)
 واضح ان $(1; 1)$ حلا لـ (E)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases}$$

بالطرح نجد $3(x-1) = 2(y-1)$

$$\operatorname{PGcd}(3; 2) = 1 \text{ لكن } 3 \mid 2(y-1)$$

و منه حسب غو ج بان $3 \mid y-1$

$$y-1 = 3k$$

$$\boxed{y = 3k + 1}$$

$$\operatorname{PGcd}(3; 2) = 1 \text{ لكن } 2 \mid 3(x-1)$$

و منه حسب غو ج بان $2 \mid x-1$

$$x-1 = 2k$$

$$\boxed{x = 2k + 1}$$

$$(x; y) = \{(2k+1; 3k+1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

② (أ) تبين ان $(14n+3; 21n+4)$ حلا

$$3x - 2y = 3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$$

و . ه . م

(ب) استنتاج ان $14n+3$ و $21n+4$ أوليان
0, 1, 2

بما ان $(14n+3; 21n+4)$ حلا لـ (E)

$$3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$$

من ① و ② و ③ نجد $z_A^{2023} + z_B^{2023} + z_C^{2023} = z^{2022}(z_A + z_B + z_C)$

$$= z^{2022}(-1+1+2) = 2z^{2022}$$

$$z_A^{2023} + z_B^{2023} + z_C^{2023} = 0$$

④ كتابة L على الشكل الجبري

$$L = \frac{-1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i}{2 + 1 \cdot \sqrt{3}i} = \frac{-2\sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{3 + \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{-6\sqrt{3}i + 6}{(3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{6 - 6\sqrt{3}i}{12}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

(*) كتابة L على الشكل الأسّي

$$|L| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

نضع $\operatorname{Arg}(L) = \theta_1$ و منه

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \boxed{\theta_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

⑤ طبيعة المثلث ABC 0, 1, 2

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$$

$$\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1$$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

$$AB = AC$$

(4) بين ان A و B يقبلان القسمة على $n-1$

$$A = (n-1)(21n+4) \quad (0.12)$$

$$B = (n-1)(28n^2+20n+3)$$

(ب) تعيين حقيقتي n القاسم المشترك الاكبر ل A و B

$$\begin{aligned} \text{PGcd}(A; B) &= \text{PGcd}((n-1)(21n+4); (n-1)(28n^2+20n+3)) \\ &= (n-1) \times \text{PGcd}(21n+4; 28n^2+20n+3) \\ &= (n-1) \times \text{PGcd}(21n+4; (14n+3)(2n+1)) \end{aligned}$$

بما ان $21n+4$ و $14n+3$ اوليان فيما بيدهما حسب السؤال 2، ب فان

$$\text{PGcd}(A; B) = (n-1) \text{PGcd}(21n+4; 2n+1)$$

ومن السؤال (3) (4) وجدنا ان

القيم الممكنة ل $\text{PGcd}(21n+4; 2n+1)$ هي 1 او 13 ومنه نستنتج

$$\text{PGcd}(A; B) = (n-1) \times 13$$

$$n = 13K + 6 \quad \text{اذا كان}$$

$$\text{PGcd}(A; B) = (n-1) \times 1$$

$$n \neq 13K + 6 \quad \text{اذا كان}$$

(1)

اي انه يوجد عددان $\mu = 3$ و $\nu = -2$ يحققان

$$\mu(14n+3) + \nu(21n+4) = 1$$

و منه حسب مبرهنة بيزوفيان العددان اوليان فيما بينهما

(3) ا) القيم الممكنة للعدد d

$$\text{PGcd}(21n+4; 2n+1) = d$$

$$\begin{aligned} d &| (2n+1)(21) \quad \text{اذن} \quad d | 2n+1 \quad \text{و} \quad d | 21n+4 \\ &| (21n+4)(-2) \end{aligned}$$

$$d | 13$$

و منه القيم الممكنة ل d هي 1 او 13 (ب) بين انه اذا كان $d = 13$ فان $n \equiv 6 [13]$

$$\text{PGcd}(2n+1; 21n+4) = 13$$

$$\begin{cases} 2n+1 \equiv 0 [13] \\ 21n+4 \equiv 0 [13] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n+1 \equiv 0 [13] \\ 8n+4 \equiv 0 [13] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n \equiv 12 [13] \\ 8n \equiv 9 [13] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2n \equiv 12 [13] \\ 8n \equiv 48 [13] \end{cases}$$

$$6n \equiv 36 [13]$$

$$n \equiv 6 [13]$$

$$\text{PGcd}(6; 13) = 1$$

الحل

(0.71)

ان

حساب $g(0)$ وإستنتاج إشارة $g(x)$
 $g(0) = 0^2 + 2 \times 0 + \ln(0+1) = 0$

x	-1	0	$+\infty$
$g(x)$		-	+

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \quad (I)$$

① حساب النهايتين

$$\lim_{x \rightarrow -1} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2} \quad (2) \quad \text{بين أن}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - 1}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1 \cdot \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

و نلاحظ

(ب) إتحاد تغير الدالة f

بما أن $(x+1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه

f متناقصة كما صار للجال $]-1; 0]$ و متزايدة كما صار للجال $[0; +\infty[$

التمرين الرابع

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

① تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + \ln(x+1) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x + \ln(x+1) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن}$$

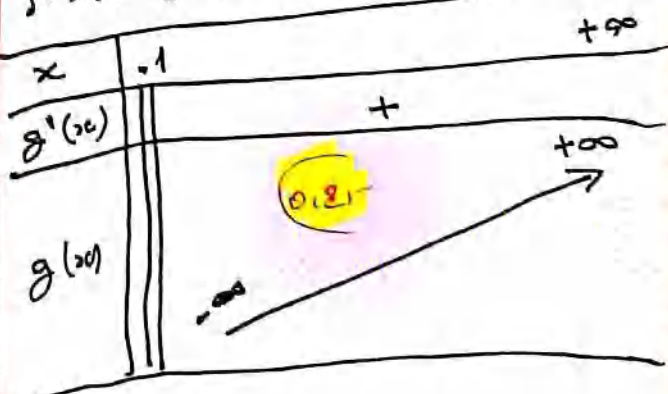
g تقبل الإشتقاق على $]-1; +\infty[$ و دالتها مشتقة هي

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

بما أن $2(x+1)^2 + 1 > 0$ فإن إشارة المشتق من إشارة المقام

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+

g متزايدة كما صار للجال $]-1; +\infty[$



$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(III)

(2) برهن بالترجع أن $0 \leq u_n \leq 4$
من أجل $n=0$ لدينا $u_0=4$ ومنه
 $0 \leq u_0 \leq 4$ (0.1)

ومنه $P(0)$ محققة

(*) نفرض $P(n)$ ونبرهن $P(n+1)$
لدينا $0 \leq u_n \leq 4$

وبما أن f متزايدة على $[0; 4]$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

ومنه $P(n+1)$ محققة

و . ه . م

(3) بين أن (u_n) متناقصة

لدينا مما سبق $f(x) - x \leq 0$

من أجل كل $x \in [0; 4]$

ومنه إذا كان $u_n \in [0; 4]$

$$f(u_n) - u_n \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

ومنه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

(*) بما أن (u_n) متناقصة، محدودة

من الأسفل بالعدد 0 فهي مقاربة

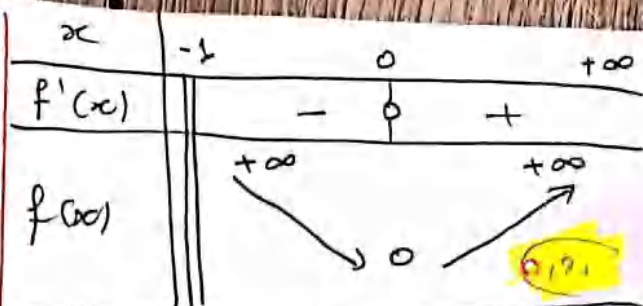
(3) حساب نهاية u_n

الدالة f مستمرة على المجال $[0; 4]$

وبما أن (u_n) مقاربة فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$$



(2) استنتاج أن $f(x) \in [0; 4]$ (0.1)

$x \in [0; 4]$ معناه $0 \leq x \leq 4$

وبما أن f متزايدة تماماً على $[0; 4]$

$$f(0) \leq f(x) \leq f(4)$$

$$0 \leq f(x) \leq 4$$

أي أن $f(x) \in [0; 4]$

و . ه . م

(3) بين أن $y = x$ و $y = f(x)$ مقاربتان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

ومنه $y = x$ و $y = f(x)$ مقاربتان (0.1)
بحسب

(ب) الوضع النسبي: نحدد إشارة الفرق

$$f(x) - x = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ فإن

$$x+1 > 0$$

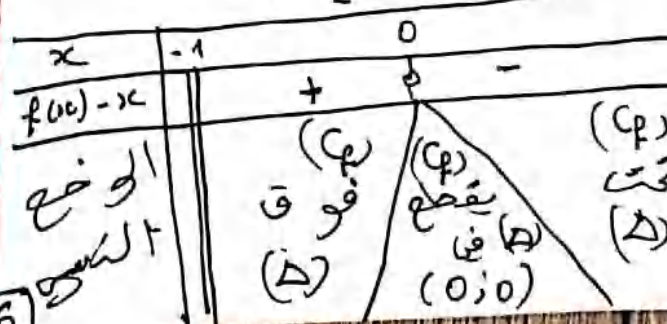
ومنه إشارة الفرق من إشارة $-\ln(x+1)$

$$-\ln(x+1) \geq 0$$

$$\ln(x+1) \leq 0$$

$$x+1 \leq 1$$

$$x \leq 0$$



$$f(l) = l$$

$$l - \frac{\ln(l+1)}{l+1} = l$$

$$- \frac{\ln(l+1)}{l+1} = 0$$

$$- \ln(l+1) = 0$$

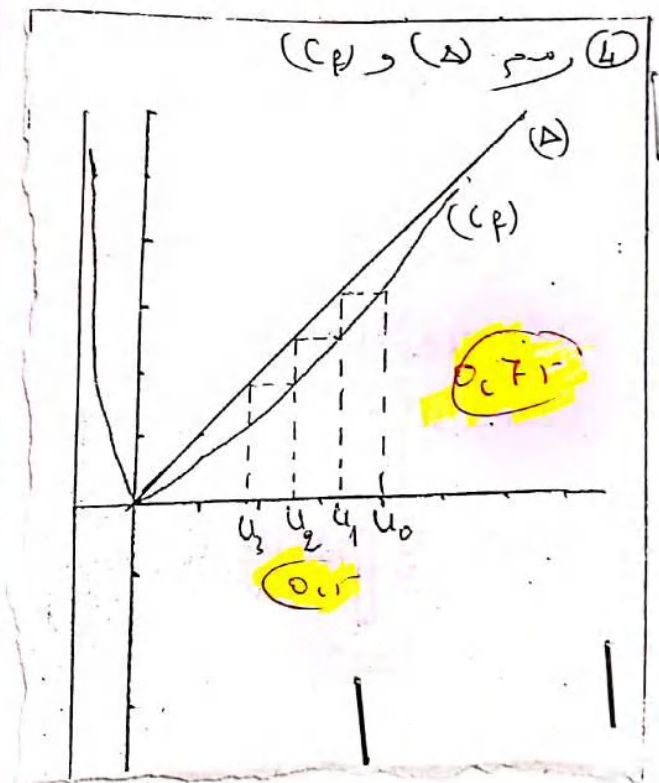
$$\ln(l+1) = 0$$

$$l+1 = 1$$

$$l = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

و



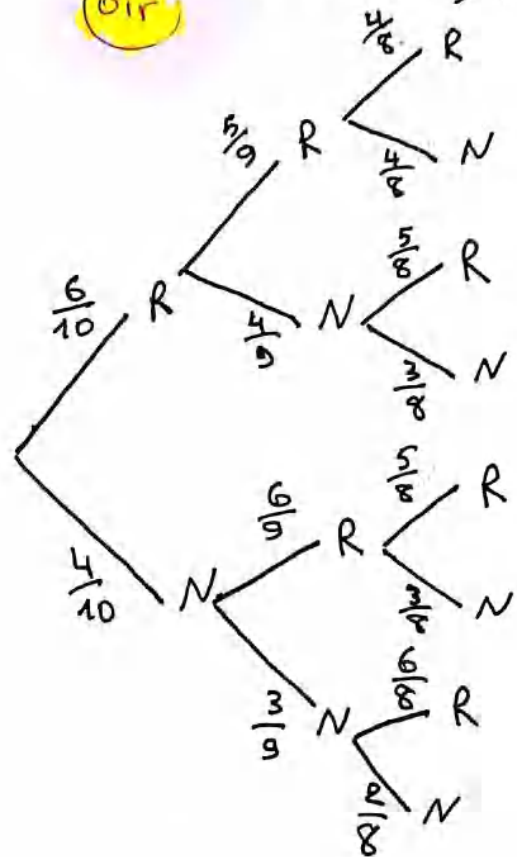
تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول :

$$\begin{matrix} 6R \\ 4N \\ \hline \mu_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3R \\ 1N \\ 1B \\ \hline \mu_2 \end{matrix}$$

① شجرة الاحتمالات



② حساب $P(A)$ (0.2r)

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

حساب $P(B)$ (0.2r)

$\bar{B}$: "عدم سحب أي كرة حمراء"

$$P(\bar{B}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720}$$

نعلم ان

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{24}{720} = \frac{696}{720}$$

ثانيا : عدد الحالات الممكنة

$$C_{10}^2 \times C_5^1 = 225$$

① علما ان الكرة من μ_2 سوداء
ما احتمال سحب كرة حمراء على الأقل

E : "سحب كرة سوداء من μ_2 "
 D : "سحب كرة حمراء على الأقل"

$$P_E(D) = \frac{P(E \cap D)}{P(E)}$$

$$P(E) = \frac{C_1^1}{C_5^1} = \frac{1}{5}$$

$E \cap D$: "سحب كرة سوداء من μ_2 وسحب كرة حمراء على الأقل"

(R, N, N) أو (R, N, N)
 $\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_2$

$$P(E \cap D) = \frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} + \frac{C_6^2}{C_{10}^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1}$$

$$= \frac{24}{225} + \frac{15}{225} = \frac{39}{225}$$

ومنه

$$P_E(D) = \frac{\frac{39}{225}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{15} \quad (0.8r)$$

③ برر ان قيم X هي 0 و 1 (0.2r)

الحادثة $(X=0)$ معناها عدم سحب أي كرة بيضاء

الحادثة $(X=1)$ معناها سحب كرة بيضاء

ملاحظة

منه $x=1$

$$P((\ln x)^2 - \ln x \leq 0) = P(X=1) = \frac{1}{5}$$

عني قيمة n بحيث $P(C) = \frac{3}{7}$ (0.25)

$$P(C) = \frac{C_6^1}{C_{n+10}^1} \times \frac{C_{n+3}^1}{C_{n+5}^1} + \frac{C_{n+4}^1}{C_{n+10}^1} \times \frac{C_1^1}{C_{n+5}^1}$$

$$= \frac{6}{n+10} \times \frac{n+3}{n+5} + \frac{n+4}{n+10} \times \frac{1}{n+5}$$

$$= \frac{6n+18}{n^2+15n+50} + \frac{n+4}{n^2+15n+50}$$

$$= \frac{7n+22}{n^2+15n+50} = \frac{3}{7}$$

$$3n^2 + 45n + 150 = 49n + 154$$

$$3n^2 - 4n - 4 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(-4) = 64 > 0$$

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = -\frac{2}{3} \text{ (مرفوض)}$$

عرف قانون الاحتمال

$$P(X=0) = \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2} \times \frac{C_4^1}{C_5^1} = \frac{4}{5} \text{ (0.25)}$$

$$P(X=1) = \frac{C_{10}^2}{C_{10}^2} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} = \frac{1}{5} \text{ (0.25)}$$

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

(ب) حساب الاحتمال الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \times \frac{4}{5} + 1 \times \frac{1}{5} =$$

$$E(X) = \frac{1}{5} \text{ (0.25)}$$

استنتاج $E(1444X + 2023)$

$$E(1444X + 2023) = 1444E(X) + 2023$$

$$= 1444 \times \frac{1}{5} + 2023$$

$$= 2311.8 \text{ (0.25)}$$

(ج) حساب $P((\ln x)^2 - \ln x \leq 0)$ (0.5)

نقوم أولاً بعمل المبراجدة

$$(\ln x)^2 - \ln x \leq 0$$

$$\ln x (\ln x - 1) \leq 0$$

x	0	1	e^1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$\ln x - 1$	-	-	0	+
$\ln x (\ln x - 1)$	+	0	-	+

$[1; e]$

ومنه قيم المتغير التي تتدعى $[1; e]$

[2]

(ب) حساب المجموع

$$S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$$

$$S = \frac{11}{2} (w_0 + w_{10}) = \frac{11}{2} (-1 + 29)$$

$$S = 154 \quad (0.5)$$

(3) (1) إثبات أن (t_n) هندسية

$$t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} \quad (0.5)$$

$$= \frac{2^{n+1} + 3(n+1) - 1}{2} + \frac{2^{n+1} - 3(n+1) + 1}{2}$$

$$= \frac{2 \times 2^{n+1}}{2} = 2^{n+1}$$

$$t_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$t_n = u_n + v_n = \frac{2 \times 2^n}{2} = 2^n$$

لدينا

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

ومن ثم (t_n) متساوية هندسية أساسها 2

$$t_0 = 1$$

(ج) حساب المجموع (0.5)

$$S' = 1 \left[\frac{2^{11} - 1}{2 - 1} \right] = 2^{11} - 1 = 2047$$

$$(4) (1) \text{ نثبت أن } S = S_1 - S_2 \quad (0.5)$$

$$S_1 - S_2 = (u_0 + u_1 + \dots + u_{10}) - (v_0 + v_1 + \dots + v_{10})$$

$$= (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + \dots + (u_{10} - v_{10})$$

$$= w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$$

$$= S$$

ع. م. م

[3]

التمرين الثاني:

(1) حساب الحدود

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 2; \quad u_2 = \frac{9}{2} \quad (0.5)$$

$$v_0 = 1; \quad v_1 = 0; \quad v_2 = -\frac{1}{2}$$

(2) (1) إثبات أن (w_n) حسابية (0.5)

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1} + 3(n+1) - 1}{2} - \frac{2^{n+1} - 3(n+1) + 1}{2}$$

$$= \frac{2^{n+1} + 3n + 3 - 1 - 2^{n+1} + 3n + 3 - 1}{2}$$

$$= \frac{6n + 4}{2} = 3n + 2$$

$$w_{n+1} = 3n + 2$$

$$w_n = u_n - v_n = \frac{2^n + 3n - 1}{2} - \frac{2^n - 3n + 1}{2}$$

$$= \frac{2^n + 3n - 1 - 2^n + 3n - 1}{2}$$

$$w_n = \frac{6n - 2}{2} = 3n - 1$$

ومن ثم

$$w_{n+1} - w_n = 3n + 2 - (3n - 1)$$

$$= 3n + 2 - 3n + 1$$

$$w_{n+1} - w_n = 3$$

ومن ثم (w_n) متساوية حسابية أساسها 3

$$w_0 = u_0 - v_0 = 0 - 1 = -1$$

$$w_n = 3n - 1$$

للعقد 3^n على 7 تشكل متتالية دورية دورها $6K$

$n =$	$6K$	$6K+1$	$6K+2$	$6K+3$	$6K+4$	$6K+5$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5

ومن البديهي (0.2) $5, 4, 6, 2, 3, 1$
(4) ما هو باقي القسمة لإقليدية ل
 $2 \times 2019^{6K+4} + 2017^{4K+2}$ على 7

لدينا $2019 \equiv 3 [7]$

ومنه $2019^{6K+4} \equiv 4 [7]$

لدينا أيضا

$2017 \equiv 1 [7]$

$2017^{4K+2} \equiv 1 [7]$

$2017^{4K+2} \equiv 1 [7]$

$2 \times 2019^{6K+4} + 2017^{4K+2} \equiv (2 \times 4 + 1) [7] \equiv 9 [7] \equiv 2 [7]$

اذن باقي القسمة هو 2 (0.5)

(2) بين ان (E) تقبل حلول في 2^2

لدينا $\text{PGcd}(343; 648) = 1$

وبما ان 1 يقسم 76 فإن

(E) تقبل حلول في 2^2

(0.2)

$$S_1 + S_2 = U_0 + U_1 + \dots + U_{10} + U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$$

$$= (U_0 + U_0) + (U_1 + U_1) + \dots + (U_{10} + U_{10})$$

$$= 2U_0 + 2U_1 + \dots + 2U_{10}$$

$$= 2S' \quad (0.1)$$

و نعلم

ب) استنتج قيمة كل من S_1 و S_2

$$\begin{cases} S_1 - S_2 = 154 \\ S_1 + S_2 = 2047 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 - S_2 = 154 \\ S_1 + S_2 = 2047 \end{cases}$$

بالجمع نجد $2S_1 = 2201$

$S_1 = \frac{2201}{2}$

(0.2)

$S_2 = \frac{1893}{2}$

بالطريق نجد

القرينة الثالثة

(1) (2) هو اقتران قسمة 3^n على 7

$n=0, 3^0 \equiv 1 [7]$

$n=1, 3^1 \equiv 3 [7]$

$n=2, 3^2 \equiv 2 [7]$

$n=3, 3^3 \equiv 6 [7]$

$n=4, 3^4 \equiv 4 [7]$

$n=5, 3^5 \equiv 5 [7]$

$n=6, 3^6 \equiv 1 [7]$

(0.1)

ومن البديهي ان القسمة اقلية

(٢) تعيين (x, y) بحيث $d = 76$

$$\text{PGcd}(x, y) = 76$$

$$\begin{cases} 648K + 4 \equiv 0 [76] \\ 343K + 2 \equiv 0 [76] \end{cases} \quad \begin{matrix} x \equiv 0 [76] \\ y \equiv 0 [76] \end{matrix} \quad \text{ومن}$$

$$\begin{cases} 40K + 4 \equiv 0 [76] \\ 39K + 2 \equiv 0 [76] \end{cases}$$

$$K + 2 \equiv 0 [76] \quad \text{بالطرح نجد}$$

$$K \equiv -2 [76]$$

$$K \equiv 74 [76]$$

$$K = 76\alpha + 74$$

$$(x, y) = \{49248\alpha + 47956; 26068\alpha + 25384\} \quad \alpha \in \mathbb{N}$$

(٤) ايجاد α و β

$$\lambda = \overline{\beta 1 \alpha \beta}^7 = \beta \times 7^3 + 1 \times 7^2 + \alpha \times 7 + \beta \times 7^0$$

$$\text{0.2r} = 344\beta + 7\alpha + 49$$

$$\lambda = \overline{\alpha 1 \alpha \alpha \beta}^5 = \alpha \times 5^4 + 1 \times 5^3 + \alpha \times 5^2 + \alpha \times 5 + \beta \times 5^0$$

$$= 655\alpha + \beta + 125 \quad \text{0.2r}$$

$$344\beta + 7\alpha + 49 = 655\alpha + \beta + 125$$

$$343\beta - 648\alpha = 76$$

$$\alpha = 343K + 2$$

$$\beta = 648K + 4$$

لك $0 < \alpha < 5$ و $0 < \beta < 5$ ومنه

$$\alpha = 2 \quad \beta = 4 \quad \text{0.2r}$$

كتابة λ في النظام العشري

$$\lambda = 655(2) + 4 + 125 \quad \text{0.2r}$$

$$\lambda = 1439 = \text{0.2r}$$

٢.٤ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة E
نلاحظ ان $(4, 2) \in E$ ومنه

$$\begin{cases} 343x - 648y = 76 \\ 343(4) - 648(2) = 76 \end{cases}$$

$$343(x-4) = 648(y-2) \quad \text{بالطرح نجد}$$

$$\text{PGcd}(343, 648) = 1 \quad \text{لكن} \quad 343 \mid 648(y-2)$$

$$343 \mid y-2 \quad \text{ومنه حسب خواص فان}$$

$$y-2 = 343K$$

$$y = 343K + 2$$

$$\text{PGcd}(343, 648) = 1 \quad \text{لكن} \quad 648 \mid 343(x-4)$$

$$\text{ومنه حسب خواص فان} \quad 648 \mid x-4 \quad \text{ومنه}$$

$$x-4 = 648K$$

$$x = 648K + 4 \quad \text{0.2r}$$

$$(x, y) = \{(648K + 4; 343K + 2) \mid K \in \mathbb{Z}\}$$

(٣) (أ) القيم الممكنة للعدد d

$$\text{PGcd}(x, y) = d$$

$$\begin{matrix} d \mid x & d \mid y \\ d \mid 343x & d \mid 648y \\ d \mid 343x - 648y \end{matrix}$$

$$d \mid 343x - 648y$$

$$d \mid 76$$

$$d \in \{1, 2, 4, 19, 38, 76\} \quad \text{0.5}$$

$$f(x) = x - x e^{1-x} \quad (II)$$

① حساب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - e^{1-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{x}{e^x} x e^1 = +\infty$$

② - بين أن $y = x$ (Δ) مقارب لـ (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x}{e^x} e^1 \right] = 0$$

و منه $y = x$ (Δ) مقارب مائل

لـ (C) بجوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$$f(x) - x = -x e^{1-x}$$

لدينا معها يمكن $x \in \mathbb{R}$ بأن

$$e^{1-x} > 0 \text{ و منه إشارة } -$$

الفرق من إشارة $-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
الوضع النسبي	(C) فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ) في (0;0)	(C) تحت (Δ)

$$f'(x) = e^{1-x} g(x-1) \quad (3) \quad \text{بين أن:}$$

$$f'(x) = 1 - e^{1-x} = e^{1-x} (-x)$$

$$= 1 - e^{1-x} + x e^{1-x}$$

$$= e^{1-x} (e^{x-1} - 1 + x)$$

$$= e^{1-x} \times g(x-1)$$

و . ه . ج

كتابة λ من النظام ذي الأساس 6

$$\begin{array}{r} 1439 \div 6 = 239 \text{ ر } 5 \\ 239 \div 6 = 39 \text{ ر } 5 \\ 39 \div 6 = 6 \text{ ر } 3 \\ 6 \div 6 = 1 \text{ ر } 0 \\ 1 \div 6 = 0 \text{ ر } 1 \end{array}$$

$$1439 = 10355_6$$

التصريف الرابع

$$g(x) = x + e^x$$

① اتجاه تغير الدالة و

الدالة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 1 + e^x > 0$$

و منه g متزايدة تما على $\mathbb{R}$

② بين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا ويدا α

و مستمرة و متزايدة تما على

المجال $[-0.57; -0.56]$ و

$$\begin{cases} g(-0.57) = -0.004 \\ g(-0.56) = +0.01 \end{cases} \quad g(-0.57) \times g(-0.56) < 0$$

و منه حسب مبرهنة القيمة المتوسطة

فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا ويدا α

حيث $-0.57 < \alpha < -0.56$

إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$$x - e^m = x - x e^{1-x}$$

$$f(x) = x - e^m$$

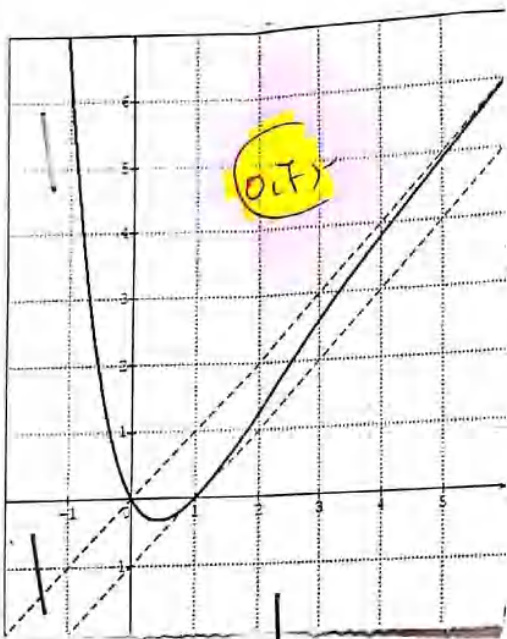
و منه حلول المعادلة هي فواصل زمنية
تقريباً طوع (Cf) مع المستقيم $y = x - e^m$
يكون للمعادلة حلين متباينين
إذا كان

$$-1 < -e^m < 0$$

$$0 < e^m < 1$$

$$m \in]-\infty; 0)$$

الإشارة:



(III) التكامل بالتجزئة

$$\int_0^x t e^{1-t} dt = [-t e^{1-t}]_0^x - \int_0^x -e^{1-t} dt$$

$$= [-t e^{1-t}]_0^x + [-e^{1-t}]_0^x$$

$$= [(-t-1) e^{1-t}]_0^x$$

$$= (-x-1) e^{1-x} + e$$

(0.17)

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda (x - f(x)) dx = \int_0^\lambda x e^{1-x} dx \quad (2)$$

$$A(\lambda) = (-\lambda-1) e^{1-\lambda} + e$$

(0.17)

[7]

(0.17)

(4) استنتاج، اتجا، المتغير

$$f'(x) = e^{1-x} g(x-1)$$

بما أن $e^{1-x} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$

من إشارة $g(x-1)$

(5) $g(x-1) > 0$ من أجل كل $x-1 > \alpha$

أي $x > \alpha+1$ ومنه

f متزايدة تماماً على $[\alpha+1; +\infty[$

(6) $g(x-1) \leq 0$ من أجل $x-1 \leq \alpha$

أي $x \leq \alpha+1$ ومنه

f متناقصة تماماً على $]-\infty; \alpha+1]$

(ج) جدول المتغير

x	$-\infty$	$\alpha+1$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha+1)$	$+\infty$

(4) معادلة التماس (T) عند $x_0 = 1$

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = x - 1 \quad (0.21)$$

(5) حساب $f(-1)$

$$f(-1) = e^2 - 1 \approx 6.38$$

(6) تعيين قيم m بيانياً

$$e^{m-1+x} = x$$

$$e^m \times e^{-1+x} = x$$

$$e^m = \frac{x}{e^{-1+x}}$$

$$e^m = x e^{1-x}$$

$$e^m = -x e^{1-x}$$

(0.17)