الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

1- عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث: $\begin{cases} z_1 + iz_2 = 0 \\ \overline{z_1} + i\overline{z_2} = 6 - 10i \end{cases}$.

2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B ، C وD نقط من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3+5i$ ، $z_B = -5+3i$ ، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.

أ) تأكّد أنّ $z_B + z_D = z_A + z_C$ وأنّ $z_B - z_D = i(z_A - z_C)$. استنتج طبيعة الرباعي ABCD ثم مثّله.

ب) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathscr{C})$ المحيطة بالرباعي ABCD، ثم أنشئها.

3- لتكن النقطة M من المستوي لاحقتها z تختلف عن A وC، ولتكن النقطة M' لاحقتها Z: $Z = \dfrac{z^2 - z_A^2}{(z - z_C)^2}$.

أ) بيّن أنّ $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_C}$، ثم عيّن وأنشئ المجموعة Γ_1 للنقط M من المستوي حيث $\arg Z = \pi$.

ب) بيّن أنّ المجموعة Γ_2 للنقط M حيث M' تنتمي إلى حامل محور التراتيب هي $(\mathscr{C})$ باستثناء A وC.

4- E نقطة من هذا المستوي لاحقتها z_E حيث: $\dfrac{z_E}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

أ) اكتب على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري العدد المركب z_E.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_E}{1+i\sqrt{3}}$. استنتج قيمتي $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس. كرية واحدة تحمل الرقم 1، كريتان تحملان الرقم 2، ثلاث كريات تحمل الرقم 3 وأربع كريات تحمل الرقم 4. نسحب منه عشوائيا وفي آن واحد كريتين.

نسمي الحادثة A: "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 4 أو 6"، الحادثة B: "سحب كريتين تحملان رقمين جداءهما زوجي"، والحادثة C: "سحب كريتين إحداهما فقط تحمل الرقم 1".

1- أ) احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P(A \cap B)$ و $P(A \cap C)$.

ب) ادرس استقلالية الحادثتين A و B، ثم الحادثتين A و C.

جـ) احسب $P_E(D)$ احتمال سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما زوجي علما أنّ الرقمين مختلفان.

2- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب: "الرقم الأكبر عند سحب رقمين زوجيين مختلفين"، "الرقم الأكبر عند سحب رقمين فرديين مختلفين"، "الرقم الأصغر عند سحب رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي"، "ونفس الرقم عند سحب رقمين متساويين". عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر X، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3- نضيف إلى الكيس السابق $(9-n)$ كرية تحمل الرقم 2، حيث n عدد طبيعي أكبر من 9، ثم نسحب منه عشوائيا كريتين على التوالي بدون إرجاع. ما هو عدد الكريات التي تمّ إضافتها إلى الكيس علما أنّ احتمال الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقما زوجيا هو 0,4. استعمل شجرة الاحتمالات أو العدّ.

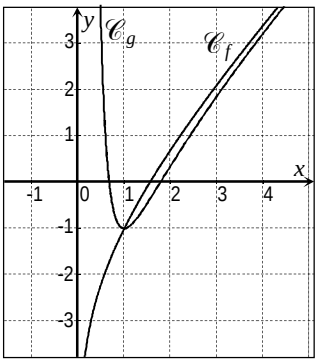
التمرين الثالث: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

		الاقتراح أ)	الاقتراح ب)	الاقتراح جـ)
1	a، b و c حدود متتابعة موجبة تماما للمتتالية الهندسية التي تحقّق: $\ln a^2 + \ln c^2 = 16$:	$b = e^4$	$b = 4$	$b = e^2$
2	المتتالية العددية (w_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $w_n = \frac{e^n}{e^n + 1}$، هي متتالية:	متزايدة تماما ومتقاربة	متناقصة تماما ومتقاربة	متزايدة تماما ومتباعدة
3	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المتقاربة والمعرّفة بـ: $u_{n+1} = 2u_n - \ln(2e^{u_n} - 1)$. نهاية (u_n) هي:	$+\infty$	1	0
4	المتتالية العددية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_0 = 0$ و $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$. عبارة حدّها العام هي:	$v_n = 2n^2 - n$	$v_n = n^2$	$v_n = (n+1)^2$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

في الشكل المقابل $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0\,;+\infty[$.



I - بقراءة بيانية، خمّن: **1-** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}_g)$.

II- الدالتان العدديتان f و g المعرفتان على المجال $]0\,;+\infty[$ بما يلي:

$f(x) = x - 2 + \ln x$ و $g(x) = \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)\ln x + x - 2$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}_g)$ ثم بيّن أنّهما متقاربان.

2- أ) احسب $f'(x)$، ثم بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

جـ) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C}_f)$ الذي يشمل النقطة A حيث $A(0\,;-3)$.

3- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$، نعتبر النقطة M من $(\mathscr{C}_f)$ فاصلتها x والنقطة N من $(\mathscr{C}_g)$ فاصلتها x، ولتكن h الدالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) - g(x)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل $x > 0$ فإنّ: $h'(x) = \frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة h، وجدول تغيراتها.

ب) تأكّد أنّه على $]1\,;+\infty[$، $MN = h(x)$. استنتج قيمة x حتى تكون المسافة MN أكبر ما يمكن.

جـ) بيّن أنّ $\ln\alpha = 2 - \alpha$، ثم استنتج أنّه من أجل $x = \alpha$، فإنّ المسافة $MN = \frac{4-2\alpha}{\alpha^2}$.

4- λ عدد حقيقي أكبر من 1. باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ $\int_1^\lambda \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx = \frac{\lambda - 1 - \ln\lambda}{\lambda}$. استنتج مساحة الحيّز المستوي $\mathscr{A}(\lambda)$ المحدّد بـ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = \lambda$، واحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

5- ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحني الممثل للدالة k المعرّفة على $]-\infty\,;2[$ بـ: $k(x) = g(-x+2)$.

انتهى الموضوع الثاني

وفّقكم الله أعزائي الطلاب في البكالوريا

الموضوع 2

"عبد الطالب"

تمرين 1 :

$$\begin{cases} z_1 + i z_2 = 0 \\ z_1 - i z_2 = 6+10i \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + i z_2 = 0 \\ \overline{z_1} + i \overline{z_2} = 6-10i \end{cases} \quad (1$$

بالجمع : $z_1 = 3+5i$ ثم نعوض $z_2 = -5+3i$

$\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{z_C + z_A}{2}$ (القطران متناصفان) (P (2

$DB = CA$ ، $(\vec{CA}; \vec{DB}) = \frac{\pi}{2}$: $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه : ABCD مربع

ب) المثلث ABC قائم ومنه مركز الدائرة (ج) منتصف [AC] ، وهو المبدأ O . نصف قطرها

$$r = \frac{AC}{2} = \frac{|z_C - z_A|}{2} = |z_A| = \sqrt{34}$$

$$Z = \frac{(z-z_A)(\bar{z}+\bar{z_A})}{(z-z_C)(\bar{z}-\bar{z_C})} = \frac{(z-z_A)(\bar{z}+\bar{z_A})}{(z-z_C)(\bar{z}+\bar{z_A})} = \frac{z-z_A}{z-z_C} \quad (P\ (3$$

$$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = (\vec{CM}; \vec{AM}) = \pi$$

(Γ_1) هي القطعة [AC] ماعدا]AC[أي A و C

ب) M' تنتمي إلى محور التراتيب أي ج تخيلي صرف

$$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$(\vec{CM}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ دائرة (Γ_2) قطرها [AC] ماعدا A و C.

$$z_E = (1+i\sqrt{3})\frac{3}{\sqrt{2}} e^{i(-\frac{\pi}{12})} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{12})} \quad (P\ (4$$

$$z_E = 3\sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12})} = 3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$z_E = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3+3i$$

ب) $\frac{z_E}{1+i\sqrt{3}} = \frac{3+3i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(3+3i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$

$$\frac{z_E}{1+i\sqrt{3}} = \frac{3+3\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{3-3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{3+3\sqrt{3}}{4} + i\,\frac{3-3\sqrt{3}}{4}$$

ومنه : $\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\frac{-\pi}{12} = \frac{3+3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{\sqrt{2}}\sin\frac{-\pi}{12} = \frac{3-3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

تمرين 2 :

$P(A) = \frac{C_2^2 + C_1^1 C_3^1 + C_3^2 + C_2^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{3}$ (P (1

$P(B) = \frac{C_6^2 + C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{13}{15}$

$P(A \cap C) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$ $P(C) = \frac{C_1^1 C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$

$P(A \cap B) = \frac{C_2^2 + C_2^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$

ب) $P(A) \times P(C) = \frac{1}{15}$ و $P(A) \times P(B) = \frac{13}{45}$

$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

A و C مستقلتين A و B غير مستقلتين

ج) D : مجموعها زوجي E : قسمين مختلفين

$P(E) = \frac{C_1^1 \cdot C_9^1 + C_2^1 \cdot C_7^1 + C_3^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$

$P(E \cap D) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1 + C_1^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{11}{45}$

$P_E(D) = \frac{P(E \cap D)}{P(E)} = \frac{11}{35}$

$P(X=2) = \frac{C_2^2 + C_2^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{45}$ $P(X=1) = \frac{C_1^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$ (2

$P(X=4) = \frac{C_2^1 C_4^1 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$ $P(X=3) = \frac{C_3^1 C_4^1 + C_1^1 C_3^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{14}{45}$

$E(X) = \frac{26}{9}$

$\frac{2A_{n-3}^1 \times A_4^1}{A_{n+1}^2} = 0,4$ (3

$0,4n^2 - 7,6n + 24 = 0$ أي $n=4$ أو $n=15$

يجب إضافة 6 كريات

تمرين 3 :

$\ln a^2 + \ln c^2 = 16$ (1

$2(\ln a + \ln c) = 16$ أي $\ln a + \ln c = 8$

$\ln(a \cdot c) = 8$ أي $a \cdot c = e^8$

$b^2 = e^8$ ومنه : $b = e^4$

1) اقتراح الصحيح هو P

2) الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$

f متزايدة وتقاربها عند $+\infty$ تساوي 1

ومنه (w_n) متزايدة ومتقاربة

اقتراح الصحيح هو P

3) $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$\ell = 2\ell - \ln(2e^\ell - 1)$

$2e^\ell - 1 = e^\ell$ يكافئ $\ln(2e^\ell - 1) = \ell$

ومنه: $e^\ell = 1$ و $\ell = 0$

الاقتراح الصحيح هو ج

4) $v_1 = v_0 + 2(1) + 1 = 1$

$v_2 = v_1 + 2(2) + 1 = 4$

ومنه: $v_n = n^2$ هي التي تحقق

$v_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

الاقتراح الصحيح هو ب

تمرين 4:

I- 1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) (C_f) أسفل (C_g) : $0 < x < 1$

(C_f) أعلى (C_g) : $x > 1$

(C_f) و (C_g) يتقاطعان عند $I(1;-1)$

II- 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\ln x + x - 2\right] = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\ln x + x - 2\right] = +\infty$

ب) $f(x) - g(x) = (\ln x)\left(1 - \frac{x^2-2}{x^2}\right) = \frac{2\ln x}{x^2}$

(C_f) أسفل (C_g) : $0 < x < 1$

(C_f) أعلى (C_g) : $x > 1$

و (C_f) و (C_g) يتقاطعان عند $I(1;-1)$

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x^2} = 0$

ومنه: (C_f) و (C_g) متقاربان بجوار $+\infty$

2) أ) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$

ومنه: f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ب) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,5;1,6[$

$f(1,5) \approx -0,09 < 0$ و $f(1,6) \approx 0,07 > 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

3) A يشمل $\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ -3 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \\ -3 = -x_0 - 1 + x_0 - 2 + \ln x_0 \end{cases}$ يكافئ

نعوض $x = 0$ و $y = -3$ في المعادلة

ومنه: $\ln x_0 = 0$ و $x_0 = 1$: Δ $y = 2x - 3$

I- 1) $h(x) = 2\frac{\ln x}{x^2}$ معرفة على $]0;+\infty[$

$h'(x) = 2 \cdot \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2x\ln x}{(x^2)^2} = 2\left(\frac{1 - 2\ln x}{x^3}\right)$

h متزايدة تماما على $]0;\sqrt{e}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{e};+\infty[$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	e^{-1}	↘ 0

2) أ) $M(x;f(x))$ و $N(x;g(x))$

$MN = \sqrt{(x-x)^2 + (g(x) - f(x))^2}$

$MN = \sqrt{(g(x) - f(x))^2} = |g(x) - f(x)|$

من أجل $x > 1$: (C_f) أعلى (C_g) ومنه:

$MN = f(x) - g(x) = h(x)$

h تقبل قيمة حدية كبرى عند $x = \sqrt{e}$

ومنه تكون المسافة MN أكبر ما يمكن

من أجل $x = \sqrt{e}$ و $MN = e^{-1}$

ب) لدينا: $f(\alpha) = 0$ ، $\alpha - 2 + \ln\alpha = 0$

$MN = h(\alpha)$: $x = \alpha$ و $\ln\alpha = 2 - \alpha$

$MN = \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2} = \frac{2(2-\alpha)}{\alpha^2} = \frac{4 - 2\alpha}{\alpha^2}$ م.ل

4) $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ ↑ ↙ $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda -\frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - 1\right]_1^\lambda$

$= \left(\frac{\lambda - 1 - \ln\lambda}{\lambda}\right)$

$A(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^\lambda h(x)\,dx$

$A(\lambda) = 2\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 2\left(\frac{\lambda - 1 - \ln\lambda}{\lambda}\right)$ u.a

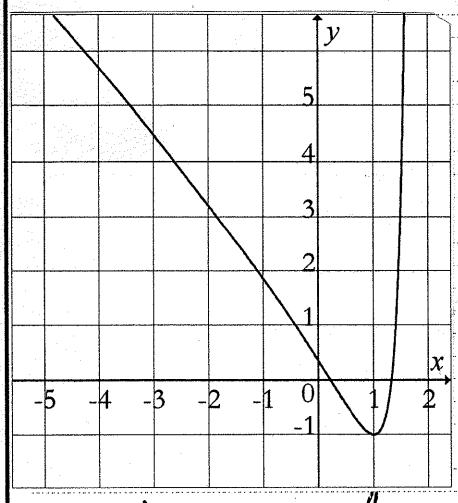
$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} 2\left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}\right) = 2$ u.a

5) $K(x) = g(-x+2)$

(C_k) هو صورة (C_g) بالنسبة لمحور التراتيب

بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

أو نسحب (C_g) بـ $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ ثم نناظره بالنسبة لمحور التراتيب.



"عبد المطلب" N