موضوع تدريبي رقم 1 في مادة الرياضيات — **المدة: 3 ساعات و 30 دقيقة**

التمرين الأول (3 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) قيمة العدد $\ln\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{e}\right)^{2026}+\ln\left(\sqrt{e+1}+\sqrt{e}\right)^{2026}$ هي 2026.

2) مجموعة حلول المتراجحة $-(\ln x)^2-\ln x+2>0$ هي $]e^{-2};e[$.

3) مجموعة حلول المعادلة $2^x=5^{1-x}$ هي $\mathcal{S}=\{\log(5)\}$.

التمرين الثاني (4 نقاط)

f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ، يعطى جدول تغيراتها كالآتي:

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘	0	↘	$+\infty$	↘	$+\infty$	↗	
	0										$-\infty$

1) عيّن حلول كل من المعادلتين $f(x)=0$ و $f'(x)=0$

2) حدّد إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$.

3) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $g(x)=(f(x))^2$

أ) أكتب $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة g.

ج) إذا علمت أن منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $A(-3;1)$ مماساً معادلته $y=x+3$ ، فأوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة -3.

4) نعتبر الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=f(1-2x)$.

– دون حساب عبارة $h(x)$ حدّد إتجاه تغيّر الدالة h و شكّل جدول تغيراتها.

التمرين الثالث (6 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $f(x)=2x+\dfrac{1}{e^x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

2) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)$ ، ثم فسّر النتيجتين بيانياً.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين $(\Delta_1):y=2x$ و $(\Delta_2):y=2x-1$.

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{0\}$ ، $f'(x)=\dfrac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$

الأستاذ أنس معطيات

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[\ln 2;+\infty[$ و $]-\infty;-\ln 2]$ و متناقصة تماماً على كل من المجالين $]-\ln 2;0]$ و $[0;\ln 2[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ أحسب $f(-x)+f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

5) ارسم كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) و المنحنى (C_f). (يعطى $f(\ln 2)=\ln 4+1$ و $f(-\ln 2)=-\ln 4-2$)

6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=2x+\ln m$.

7) h دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=|f(x)|$

– اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع (7 **نقاط**)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-x^2+7x-3$

1) بيّن أن الدالة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,4<\alpha<0,5$

ب) حدّد إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}(-x^2+2x+3)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) أ) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=-x+2+\dfrac{ax+b}{x^2+1}$

ب) استنتج معادلة للمستقيم (Δ) المقارب المائل لـ (C_f).

ج) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=\dfrac{(x-1)g(-x)}{(x^2+1)^2}$

4) استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكّل جدول تغيراتها.

5) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to-\alpha}\dfrac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

6) أوجد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

7) ارسم كلاً من (Δ) و (C_f). (نأخذ: $f(-\alpha)\approx -0.7$)

8) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=\mathrm{e}^m$.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=-x-1+\dfrac{4x+2}{x^2+2x+2}$

1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $h(x-1)=f(x)-2$

2) اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

الأستاذ أنس معطيات

التصحيح المفصل للموضوع التجريبي

رقم 1

التمرين الأول

1) خطأ ! لأن

$$\ln\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{e}\right)^{2026}+\ln\left(\sqrt{e+1}+\sqrt{e}\right)^{2026}$$

$$=2026\ln\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{e}\right)+2026\ln\left(\sqrt{e+1}+\sqrt{e}\right)$$

$$=2026\left[\ln\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{e}\right)+\ln\left(\sqrt{e+1}+\sqrt{e}\right)\right]$$

$$=2026\ln\left[\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{e}\right)\left(\sqrt{e+1}+\sqrt{e}\right)\right]$$

$$=2026\ln\left[\left(\sqrt{e+1}\right)^2-\left(\sqrt{e}\right)^2\right]$$

$$=2026\ln(e+1-e)$$

$$=2026\ln(1)$$

$$=2026\times 0$$

$$=\boxed{0}$$

2) صحيح لأن:

حل المتراجحة $-(\ln x)^2-\ln x+2>0$

بوضع $y=\ln x$ لدينا:

$$-y^2-y+2>0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(-1)(2)$$

$$=1+8$$

$$=9>0$$

$$y'=\frac{1-3}{-2}=\frac{-2}{-2}=\boxed{1}$$

$$y''=\frac{1+3}{-2}=\frac{4}{-2}=\boxed{-2}$$

ومنه: $-y^2-y+2=-(y-1)(y+2)$

أي أن: $-(\ln x)^2-\ln x+2=-(\ln x-1)(\ln x+2)$

$\ln x+2=0$	$\ln x-1=0$
$\ln x=-2$	$\ln x=1$
$x=e^{-2}$	$x=e^{1}$

ومنه

x	0		e^{-2}		e^{1}		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$\ln x-1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x+2$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$-(\ln x-1)(\ln x+2)$ $=-(\ln x)^2-\ln x+2$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه حلول المتراجحة

$$-(\ln x)^2-\ln x+2>0$$

$$S=\left]e^{-2};e^{1}\right[$$

أي أن: هي

3) صحيح

$$e^x=5^{1-x}$$

$$\ln e^x=\ln 5^{1-x}$$

$$x\ln e=(1-x)\ln 5$$

$$x\ln 2=\ln 5-x\ln 5$$

$$x\ln 2+x\ln 5=\ln 5$$

$$x(\ln 2+\ln 5)=\ln 5$$

$$x\ln(2\times 5)=\ln 5$$

$$x\ln(10)=\ln 5$$

$$x=\frac{\ln 5}{\ln 10}$$

$$\boxed{x=\log(5)}$$

لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln 10}}$$

الأستاذ أنس معطيات

التمرين الثاني

1) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

- تعيين حلول المعادلة $f(x)=0$ من جدول التغيرات نلاحظ أنه $f(x)=0$ لما $\boxed{x=0}$

- تعيين حلول المعادلة $f'(x)=0$

$f'(x)=0$ لما $\begin{pmatrix} x=-2 \\ \text{أو} \\ x=3 \end{pmatrix}$

2) إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

3) $D_g = \mathbb{R}-\{1\}$ / $g(x) = (f(x))^2$

أ) كتابة $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$

g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا

$$\boxed{g'(x) = 2f'(x) \times f(x)}$$

ب) جدول تغيرات g.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x) \times f(x)$

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

ج) إيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند النقطة $A(-3;1)$ ذات الفاصلة -3.

ليبنا: يقبل مماسا معادلته $y=x+3$ عند النقطة $A(-3;1)$

- منحنى الدالة f يشمل A معناه $\boxed{f(-3)=1}$

ومن خلال المعادلة نستنتج أن $\boxed{f'(-3)=1}$

ومنه معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند -3 تكتب

$$y = g'(-3)(x+3) + g(-3)$$

ليبنا: $g(-3) = (f(-3))^2 = (1)^2 = \boxed{1}$

$g'(-3) = 2f'(-3) \times f(-3) = 2 \times 1 \times 1 = \boxed{2}$

إذن: $y = g'(-3)(x+3) + g(-3)$

$y = 2(x+3) + 1$

$y = 2x + 6 + 1$

$$\boxed{y = 2x + 7}$$

4) $D_h = \mathbb{R}^*$ / $h(x) = f(1-2x)$

- h قابلة للإشتقاق على $D_h = \mathbb{R}^*$

ولدينا: $\boxed{h'(x) = -2f'(1-2x)}$

تحديد إشارة $f'(1-2x)$

معناه: $f'(1-2x)=0$ $\begin{pmatrix} 1-2x=-2 \\ \text{أو} \\ 1-2x=3 \end{pmatrix}$

$1-2x=3$

$-2x=3-1$

$-2x=2$

$\boxed{x=\frac{2}{-2}=-1}$

$1-2x=-2$

$-2x=-2-1$

$-2x=-3$

$\boxed{x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}}$

معناه $f'(1-2x)=0$ $\begin{pmatrix} \boxed{x=-1} \\ \text{أو} \\ \boxed{x=\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

الأستاذ أنس معطار

$h(x) = f(1-2x)$

$h(-1) = f(1-2(-1)) = f(1+2) = f(3) = 1$

$h\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(1-2\left(\frac{3}{2}\right)\right) = f(1-3) = f(-2) = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(1-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(1-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(1-2x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(1-2x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

توضيح: $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x) = 1^-$ | $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x) = 1^+$

التمرين الثالث

$D_f = \mathbb{R}^*$ / $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x + \frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-1} = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x + \frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$

ب)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x + \frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}(2x) = 0$

معناه $f'(1-2x) < 0$

إما: $-2 < 1-2x < 1$

$-3 < -2x < 0$

$\boxed{\frac{3}{2} > x > 0}$

أو: $1 < 1-2x < 3$

$0 < -2x < 2$

$\boxed{0 > x > -1}$

معناه $f'(1-2x) > 0$

إما: $1-2x < -2$

$-2x < -3$

$\boxed{x > \frac{3}{2}}$

أو $1-2x > 3$

$-2x > 2$

$\boxed{x < -1}$

إذن إشارة $f'(1-2x)$ على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(1-2x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه جدول تغيرات h

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
-2	$-$		$-$		$-$		$-$		
$f'(1-2x)$	$+$		0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$	$-$		0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

الأستاذ أنس معلاني

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x + \frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty$$

لأن: $\lim_{x\to 0^+}(2x) = 0$ و $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty$

التفسير البياني: $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$.

ج) 1)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \frac{1}{e^x-1} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$= 0$$

$y = 2x$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x + \frac{1}{e^x-1} - 2x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{0-1}$$

$$= -1$$

$y = 2x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ عند $-\infty$.

ب) دراسة وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta_1): y = 2x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$f(x) - 2x = 2x + \frac{1}{e^x-1} - 2x$$

$$\boxed{f(x) - 2x = \frac{1}{e^x-1}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
1	$+$		$+$		
e^x-1	$-$		0	$+$	
$f(x)-2x = \frac{1}{e^x-1}$	$-$		‖	$+$	
الوضع النسبي	$(\mathcal{C})$ يقع تحت (Δ_1)		‖	$(\mathcal{C})$ يقع فوق (Δ_1)	

وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ $(\Delta_2): y = 2x-1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$f(x) - (2x-1) = 2x + \frac{1}{e^x-1} - 2x + 1$$

$$= \frac{1}{e^x-1} + 1$$

$$= \frac{1+e^x-1}{e^x-1}$$

$$\boxed{f(x) - (2x-1) = \frac{e^x}{e^x-1}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x	$+$		$+$		
e^x-1	$-$		0	$+$	
$f(x)-(2x-1) = \frac{e^x}{e^x-1}$	$-$		‖	$+$	
الوضع النسبي	$(\mathcal{C})$ يقع فوق (Δ_2)		‖	$(\mathcal{C})$ يقع تحت (Δ_2)	

3) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا:

$$f'(x) = 2 + \frac{0(e^x-1) - e^x(1)}{(e^x-1)^2}$$

$$= 2 - \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

الأستاذ أنس معطيات

$$f'(x) = \frac{2(e^x-1)^2 - e^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{2(e^{2x}+1-2e^x)-e^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{2e^{2x}+2-4e^x-e^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$$

لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$(2e^x-1)(e^x-2) = 2e^{2x} - 4e^x - e^x + 2$
$= 2e^{2x} - 5e^x + 2$

4) إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^x-1)(e^x-2)$

$2e^x-1=0$	$e^x-2=0$
$2e^x = 1$	$e^x = 2$
$e^x = \frac{1}{2}$	$x = \ln 2$
$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$	

ومنه

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\ln 2)$	↘	$+\infty$	↘	$f(\ln 2)$	↗	$+\infty$

ومنه f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty;-\ln 2]$ و $[\ln 2;+\infty[$ ومتناقصة تماماً على كل من المجالين $[-\ln 2;0[$ و $]0;\ln 2]$.

4) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$f(-x)+f(x) = 2(-x)+\frac{1}{e^{-x}-1}+2x+\frac{1}{e^x-1}$$
$$= -2x + \frac{1\times e^x}{(e^{-x}-1)\times e^x} + 2x + \frac{1}{e^x-1}$$
$$= \frac{e^x}{(1-e^x)\times(-1)} + \frac{1}{e^x-1}$$
$$= \frac{-e^x}{e^x-1} + \frac{1}{e^x-1}$$
$$= \frac{-e^x+1}{e^x-1}$$
$$= \frac{-(e^x-1)}{e^x-1}$$

ومنه $\boxed{f(-x)+f(x) = -1}$

$f(2x_0-x)+f(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)$

التفسير البياني: النقطة $\Omega\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (φ).

5) المناقشة: حلول المعادلة $(*)$ $f(x) = 2x+\ln m$

هي فواصل نقط تقاطع (φ) مع المستقيم $y = 2x+\ln m$ ومنه

قيم $\ln m$	قيم m	عدد واشارة حلول المعادلة $(*)$
$\ln m < -1$	$m < e^{-1}$	يوجد حل وحيد سالبا تماما
$-1 \leq \ln m < 0$	$e^{-1} \leq m < 1$	لا توجد حلول للمعادلة $(*)$
$\ln m > 0$	$m > 1$	يوجد حل وحيد موجب تماما

التمرين الرابع

1) $g(x) = x^3 - x^2 + 7x - 3$

أ) إثبات أن g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$g'(x) = 3x^2 - 2x + 7$

$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(7)$

$= 4 - 84$

$= -80 < 0$

ومنه $g'(x) = 0$ ليس لها حل و

$g'(x) = 3x^2 - 2x + 7 > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

وبالتالي g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ب) إثبات $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$

g دالة معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على $]0,4 ; 0,5[$ ولدينا

$g(0,4) = (0,4)^3 - (0,4)^2 + 7(0,4) - 3 \simeq -0,3 < 0$

$g(0,5) = (0,5)^3 - (0,5)^2 + 7(0,5) - 3 \simeq 0,36 > 0$

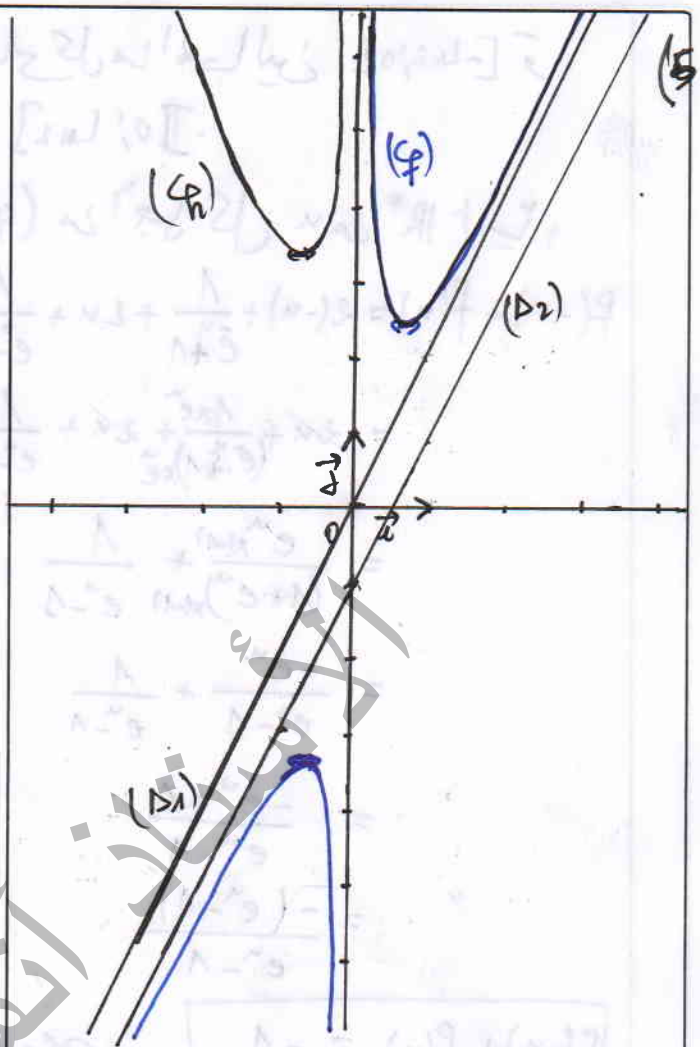
فحسب مبرهنة الدوال المستمرة والرتيبة تماما المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

- ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	



7) $D_h = \mathbb{R}^*$ / $h(x) = |f(x)|$

- شرح كيفية رسم منحنى الدالة h.

* إذا كان $f(x) \geq 0$ (أي (C_f) يقع فوق حامل محور الفواصل) فإن: $h(x) = f(x)$

ومنه: (C_h) ينطبق على (C_f)

* إذا كان $f(x) < 0$ (أي (C_f) يقع تحت حامل محور الفواصل) فإن $h(x) = -f(x)$

ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل.

(C_h) هو المنحنى الممثل للدالة h

استنتاج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$

$g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$

أي $\boxed{x=-\alpha}$

$g(-x)<0$ معناه $-x<\alpha$

أي $\boxed{x>-\alpha}$

$g(-x)>0$ معناه $-x>\alpha$

أي $\boxed{x<-\alpha}$

ومنه نلخص إشارة $g(-x)$ في الجدول التالي

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}(-x^2+2x+3)$

$=\frac{-x^3+2x^2+3x}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$ (1

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}$

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{\left(-1+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}$

$=-\infty$

2) 1) تعيين a و b حتى يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$f(x)=-x+2+\frac{ax+b}{x^2+1}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$-x+2+\frac{ax+b}{x^2+1}=\frac{-x^3-x+2x^2+2+ax+b}{x^2+1}$

$=\frac{-x^3+2x^2+(a-1)x+2+b}{x^2+1}$

$=\frac{-x^3+2x^2+3x+0}{x^2+1}$

بالمطابقة نجد

$\boxed{a=1+3=4}$

ومنه و $\begin{cases}a-1=3\\2+b=0\end{cases}$

$\boxed{b=-2}$

ومنه $\boxed{f(x)=-x+2+\frac{4x-2}{x^2+1}}$

ب) استنتاج معادلة المستقيم المقارب المائل لـ $(\mathcal{C}_f)$

لما أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{4x-2}{x^2+1}\right]=0$

فإن: $(\Delta): y=-x+2$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$ و $-\infty$

ج) دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لـ (Δ)

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f(x)-(-x+2)=\frac{4x-2}{x^2+1}$

إشارة $f(x)-(-x+2)$ من إشارة $4x-2$

لأن $x^2+1>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$4x-2=0$

$4x=2$

$x=\frac{2}{4}$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x-2$		$-$	0	$+$	
x^2+1		$+$		$+$	
$f(x)-(-x+2)=\frac{4x-2}{x^2+1}$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	$(\mathcal{C})$ يقع تحت (Δ)		$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ) في النقطة $(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$		$(\mathcal{C})$ يقع فوق (Δ)

3) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(x-1)\,g(-x)}{(x^2+1)^2}$$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{(-3x^2+4x+3)(x^2+1)-(2x)(-x^3+3x^2+3x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-3x^4-3x^2+4x^3+4x+3x^2+3+2x^4-4x^3-6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-x^4-6x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)\,g(-x)}{(x^2+1)^2}$$

لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$g(-x)=(-x)^3-(-x)^2+7(-x)+3$$
$$=-x^3-x^2-7x-3$$

و

$$(x-1)g(-x)=(x-1)(-x^3-x^2-7x-3)$$
$$=-x^4-x^3-7x^2-3x+x^3+x^2+7x+3$$
$$=-x^4-6x^2+4x+3$$

4) استنتاج إتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)g(-x)$

x	$-\infty$		$-\alpha$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(-x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-\alpha)\simeq -0,7$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	$-\infty$

$$f(1)=\frac{-(1)^3+2(1)^2+3(1)}{1^2+1}=\frac{-1+2+3}{2}=\frac{5}{2}$$

5) بما أن f قابلة للإشتقاق عند $-\alpha$ فإنه لدينا

$$\lim_{x\to-\alpha}\frac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}=\lim_{x\to-\alpha}\frac{f(x)-f(-\alpha)}{x-(-\alpha)}$$

$$=f'(-\alpha)$$
$$=\frac{(-\alpha-1)\,g(\alpha)}{(\alpha^2+1)^2}$$
$$=0$$

لأن: $g(\alpha)=0$ حسب الجزء (I)

التفسير البياني: $(\mathcal{C})$ يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$.

6) إيجاد نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع حامل محور الفواصل

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$

الأستاذ أنس معطيات

$$\frac{x}{x^2+1}\left(-x^2+2x+3\right)=0$$

إما $\boxed{x=0}$

أو $-x^2+2x+3=0$

$\Delta = 2^2-4(-1)(3)$

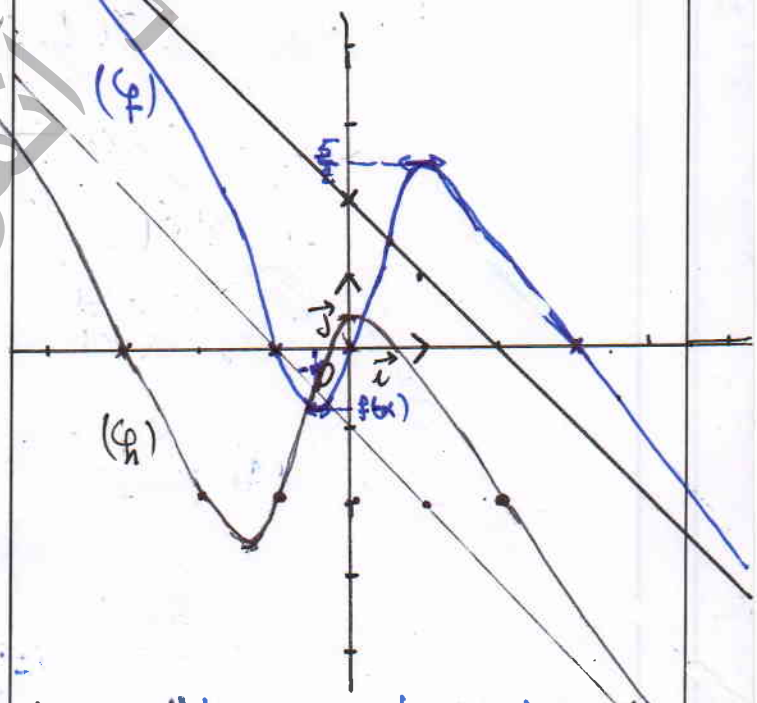
$= 4+12$

$= 16$

$x' = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = \boxed{3}$

$x'' = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = \boxed{-1}$

ومنه $(\mathcal{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقط $O(0;0)$ ، $A(3;0)$ و $B(-1;0)$



8) المناقشة: حلول المعادلة $f(x) = e^m$ (*) هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع المستقيم $y = e^m$

$e^m > 0$ نناقش حسب جزء $(\mathcal{C}_f)$ الواقع فوق حامل محور الفواصل

e^m قيم	m قيم	عدد وإشارة حلول المعادلة (*)
$0 < e^m < \frac{5}{2}$	$m < \ln\frac{5}{2}$	يوجد ثلاثة حلول: (حلين موجبين تماما وحل سالب تماما)
$e^m = \frac{5}{2}$	$m = \ln\frac{5}{2}$	يوجد حلان: (حل موجب تماما وحل سالب تماما)
$e^m > \frac{5}{2}$	$m > \ln\frac{5}{2}$	يوجد حل وحيد سالب تماما

III)

$$h(x) = -x-1+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

$$f(x) = -x+2+\frac{4x-2}{x^2+1}$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$h(x-1) = -(x-1)-1+\frac{4(x-1)+2}{(x-1)^2+2(x-1)+2}$$

$$= -x+1-1+\frac{4x-4+2}{x^2-2x+1+2x-2+2}$$

$$= -x+\frac{4x-2}{x^2+1}$$

$$= \left(-x+2+\frac{4x-2}{x^2+1}\right)-2$$

$$\boxed{h(x-1) = f(x)-2}$$

2) شرح كيفية رسم منحنى الدالة h

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$f(x) = h(x-1)+2$

$f(x+1) = h(x+1-1)+2$

ومنه $f(x+1) = h(x)+2$

إذن $\boxed{h(x) = f(x+1)-2}$

ومنه $(\mathcal{C}_h)$ هو صورة $(\mathcal{C}_f)$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$(\mathcal{C}_h)$ هو المنحنى الممثل للدالة h.

لا تنسونا بصالح
دعائكم

مع تحيات الأستاذ
"أنس معطيات"

الأستاذ أنس معطيات