الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية المسيلة

امتحان البكالوريا التجريبي — ثانوية الشهيد مرزوك دحمان–سيدي عامر–

الشعبة: رياضيات — دورة: ماي 2023

إختبار في مادة : الرياضيات — المدة :04 سا و30د

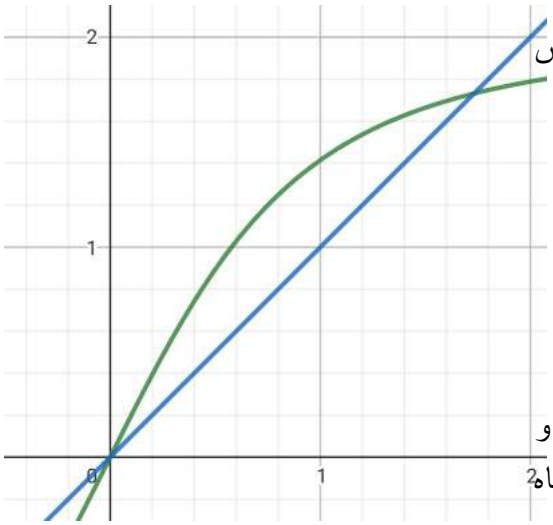
على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمـرين الأول: (05 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

ليكن (C_f) التمثل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل)



1)- أ)- أدرس إتجاه تغير الدالة f .

ب)- بين أنه إذا كان $x\in[1;\sqrt{3}]$ فإن $f(x)\in[1;\sqrt{3}]$

2)- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ)- برر وجود المتتالية (u_n) .

ب)- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

ج)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\leq u_n<\sqrt{3}$

3)- أ)- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير (u_n) $u_{n+1}-u_n$

ب)- استنتج أنها متقاربة

4)- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ)- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب)- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

ج)- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : S_n $\frac{1}{3-u_0^2}+\frac{1}{3-u_1^2}+\cdots+\frac{1}{3-u_n^2}$

د)- أحسب بدلالة n المجموع P_n حيث : P_n $\frac{1}{2}v_0\times\frac{1}{2}v_1\times\cdots\times\frac{1}{2}v_n$

التمـرين الثاني: (04 نقاط)

1)- نعتبر المعادلة : (E) ..... $9x-4y=22$. ذات المجهول (x,y) حيث x و y عددان صحيحان

2)- أ)- بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا .

ب)- بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 2\,[4]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

3)- N عدد طبيعي يكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في نظام التعداد ذي الأساس 4 ويكتب $\overline{56\alpha0}$ في النظام ذي الأساس 7 حيث α و β عددان طبيعيان

⋆ عين α و β ، ثم أكتب N في النظام العشري .

4)- نضع $a=88n+22$ و $b=198n+44$ ، حيث n عدد طبيعي .

أ)- تحقق أن الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) .

ب)- باستعمال مبرهنة بيزو بين أن العددين $4n+1$ و $9n+2$ أوليان فيما بينهما.

ج)- جد $\text{pgcd}(a,b)$

التمـرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون جمعية من 8 رجال و 4 نساء من بينهم رجل واحد اسمه محمد وامرأة واحدة اسمها فاطمة ،
نريد تشكيل لجنة مكونة من : رئيس ، نائب وكاتب .

1)- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها

2)- احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A " اللجنة تتكون من أعضاء من نفس الجنس "

B " اللجنة تضم رجلين وامرأة "

C " اللجنة تضم محمد في منصب الرئيس "

3)- علما أن اللجـ ة تضم رجلين وامرأة ، ماهو احتمال أن يكون فيها محمد في منصب الرئيس ؟

4)- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة

أ)- عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي ثم عرف قانون احتماله

ب)- أحسب $E(X)$

د)- أحسب الاحتمال $P\left(\ln X(3e^X-3) \quad 0\right)$

التمـرين الرابع: (07 نقاط)

I)- نعتبر الدّالة العدديّة f المُعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) \quad \sqrt{x+1}e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند -1 بقيم أكبر ، ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .

2)- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

3)- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4)- نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x \quad y$

- بين أن (Δ) يقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \in]-\frac{1}{2};+\infty[$ ، ثم تحقق أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

5)- أُكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

6)- أُرسم (Δ) ، (T) و (C_f).

7)- أ)- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ، $x+1 \le e^x$.

ب)- استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ، $f(x) \le e^{-\frac{x}{2}}$

8)- نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda \ge 1$ ، ولتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحى (C_f) والمستقيـ ات التي معادلاتها $1 \quad x$ ، $\lambda \quad x$ و $0 \quad y$.

- بين أن $0 \le S(\lambda) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$.

II)- ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر الدّالة العدديّة f المُعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) \quad \sqrt{x+1}e^{-\frac{x}{n}}$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)- بين ان جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين احداثيتيهما .

2)- أ)- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، المنحنيات (C_n) تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في نقطة M_n فاصلتها α_n

ب)- ادرس طبيعة المتتالية (α_n) .

3)- أُدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

الموضوع الثاني

التمـرين الأول: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام -1 ، -1 ، 0 و 1 وكريتان خضراوين تحملان الرقمين -1 و 0 وكرية سوداء تحمل الرقم 1 (كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس).

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من هذا الصندوق

1)- احسب احتمال الحوادث الآتية :

A " الحصول على كريتين من نفس اللون " .

B " الحصول على كريتين تحمل نفس الرقم " .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداءء الرقمان الظاهران في الكريتان المسحوبتان من الصندوق .

2)- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

3)- احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ، ثم استنتج $E(1444X+2023)$.

II) نعيد كل الكريات المسحوبة إلى الصندوق ونضيف له n كرية سوداء كلا منها تحمل الرقم 1 ، ثم نسحب منه كريتين على التوالي بدون إرجاع

1)- ماهو عدد الحالات الممكنة ؟

2)- احسب احتمال الحوادث الآتية :

C " الحصول على كريتين من نفس اللون " .

D " الحصول على كريتين تحمل كلا منهما رقم موجب تماما "

E " الحصول على كريتين تحملان رقمين مختلفين تماما في الإشارة " .

التمـرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب 1 ، Z_A ، $1+2i$ ، Z_B ، $1+\sqrt{3}+i$ ، Z_C و $\overline{Z_C}$ Z_D

1) أ)- أكتب $\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم فسر النتيجة هندسيا $\arg\left(\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)$

ب)- استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج)- استنتج طبيعة التحويل R الي مركزه A ويحول النقطة B إلى C ، يطلب تعيين عبارته المركبة

2)- حدد طبيعة الرباعي ABCD ، ثم احسب مساحته .

3)- لتكن Z_K لاحقة النقطة K صورة النقطة E ذات اللاحقة i Z_E بواسطة التحويل R .

- بين أن : $1+\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})}$ Z_K ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

4)- أكتب العبارة المركبة للتحاكي H الذي مركزه A ونسبته -3 .

5)- أ)- أكتب العبارة المركبة للتحويل $R\circ H$ S محددا طبيعته وعناصره المميزة.

ب)- ليكن $AB'CD$ صورة الرباعي ABCD بالتحويل S .

- بين أن مساحة الرباعي $AB'CD$ هي $18\sqrt{3}$ (مقدرة بوحدة المساحات) .

التمـرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) و المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

1)- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 1$

2)- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3)- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{4}{1-u_n}$

أ)- بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 4 ، ثم احسب حدها الأول.

ب)- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4)- أ)- ادرس حسب قيم العددالطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب)- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $2023^{v_n} + 1444^{2023} + 2023^{1444}$ على 5 .

ج)- عين مجموعة قيم العدد الطبعي n التي تحقق الجملة: $\begin{cases} n \equiv 2023[4] \\ v_n - 3^n \equiv 1444[5] \end{cases}$

التمـرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$

1) أ)- تحقق أنه من أجل كل من $]0;+\infty[$ ، $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$

ب)- أحسب نهاية الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ)- أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ب)- استنتج من أجل كل x من $]0;+\infty[$ إشارة $g(x)$.

II)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = x - 1 + \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2)- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3)- بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

4)- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

5)- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1 .

6)- ارسم المستقيم (Δ) و المماس (T) والمنحنى (C_f) .

7)- لتكن (d_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ $y = mx - m$ حيث m وسيط حقيقي.

أ)- تحقق أن جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A

ب)- عين قيم الوسيط m حتى يكون للمعادلة $f(x) = mx - m$ حلان متمايزان .

III) 1)- بإستعمال التكامل بالتجزئة، بين أن: $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$

2)- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$

(يجب تقديم قيم مضبوطة لمساحة الحيز)

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا 2023