الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية 1600 مسكن – عين بنيان –

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: 2023

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

يحتوي كيس على 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 حيث الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

1) نسحب من الكيس عشوائيا وفي آن واحد كريتين.

أ- احسب احتمال الحصول على كريتين تحملان الرقم 10 .

ب- احسب احتمال الحصول على كرية واحدة على الأقل تحمل الرقم 15.

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع رقمي الكريتين المسحوبتين.

أ- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

ب- احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

ج- احسب الاحتمال $p(X \geq 25)$.

3) نسحب الآن من الكيس ثلاث كريات على التوالي ودون إرجاع.

أ- احسب احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم.

ب- احسب احتمال الحصول على كرية واحدة تحمل الرقم 10.

التمرين الثاني: (04 نقط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = -6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

1) احسب كلا من u_1، u_2 و u_3.

2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$ فإن: $u_n > 0$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 4$ فإن: $u_n > 2n - 3$.

3) عين نهاية المتتالية (u_n).

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $v_n = u_n - 4n + 10$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$.

ج- اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

www.dzexams.com

التمرين الثالث: (05 نقط)

أجب بصحيح أو خطأ في كل حالة مع التعليل:

1) النقطة M صورة العدد المركب z حيث $z=\frac{2+4i}{2-i}$ تنتمي للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

2) حلول المعادلة $3^{2x}-3^{x+1}+2=0$ في $\Re$ هي: $\left\{0;\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

3) $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2023}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2023}=1$.

4) إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ و $v_n=u_{2n}$ فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

5) القيمة المتوسطة للدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x+2}}$ هي 2.

التمرين الرابع: (07 نقط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-2+\ln x$.

1) أ- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1<\alpha<1.5$، استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+1-\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f)، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3) بين أن $f(\alpha)=2\alpha-\frac{1}{\alpha}$، استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) انشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

5) أ- جد الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto(1-\ln x)\frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل $x=e$.

ب- احسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=x$، $x=1$ و $x=\alpha$، ثم تحقق أن $S(\alpha)=\frac{\alpha^2(2-\alpha^2)}{2}$.

انتهى الموضوع الأول

www.dzexams.com

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$.

1) أ- ادرس اتجاه تغيرات الدالة f على $]1;+\infty[$.

ب- بين أنه إذا كان $x\geq 1$ فإن $f(x)\geq 1$.

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq 1$.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عين نهايتها.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n}\right)$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها 2 .

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقط)

يحتوي صندوق u_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ، ويحتوي صندوق آخر u_2 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين، حيث الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس. نختار عشوائيا صندوقا واحدا ونسحب منه كريتين في آن واحد . نعتبر الحوادث التالية: A " الكريتان المسحوبتان حمراوان " ، B " الكريتان المسحوبتان سوداوان " و C " الكريتان المسحوبتان من لونين مختلفين ".

1) شكل شجرة الإحتمالات الموافقة للمعطيات.

2) احسب الاحتمالات $p(A)$، $p(B)$ و $p(C)$.

3) احسب احتمال الحصول على كريتين من الصندوق u_1 علما أنهما من لونين مختلفين.

4) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد السحب.

أ- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

ب- احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

التمرين الثالث: (05 نقط)

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z: $z^4-4z^3+6z^2-4z+5=0$...(I).

1) أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (I) فإن $\bar{z}$ حل لها .

ب- تحقق أن العدد المركب i حل للمعادلة (I)، ثم استنتج حلا آخر للمعادلة (I).

2) أ- عين العددين الحقيقيين a و b حيث: $z^4-4z^3+6z^2-4z+5=(z^2+1)(z^2+az+b)$

www.dzexams.com

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (I).

3) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $Z_A=i$ ، $Z_B=-i$ ، $Z_C=2-i$ و $Z_D=2+i$ على الترتيب.

أ- علم النقط A ، B ، C و D.

ب- عين z_Ω لاحقة النقطة Ω مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,2);(D,2)\}$.

ج- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=4$.

4) ليكن الدوران R الذي مركزه Ω ويحول النقطة A إلى النقطة B.

أ- عين θ قيس زاوية الدوران R.

ب- بين أن النقطة D هي صورة النقطة C بالدوران R.

التمرين الرابع: **(07 نقط)**

I) g الدالة العددية المعرفة على $\Re$ كما يلي: $g(x)=e^{-x}(x-1)+1$.

1) أ- احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\Re$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ كما يلي: $f(x)=x-2-xe^{-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x-2$.

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ).

2) أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f من أجل كل عدد حقيقي x ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث $-1.1\prec\alpha\prec-1$ و $2.2\prec\beta\prec2.3$.

4) أ- عين النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس (T) للمنحنى (C_f) موازيا لـ (Δ)، اكتب معادلة (T).

ب- احسب $f(-2)$ ، ثم انشئ المستقيم (Δ) ، المماس (T) و المنحنى (C_f).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{x}{e^x}+m=-2$.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا **انتهى الموضوع الثاني**

www.dzexams.com

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي

ع.ت 3 — 2023

الموضوع الأول

التمرين الأول:

1- عدد السحبات الممكنة: $C_8^2 = 28$

أ- A: "كريتان تحملان رقم 10"

$$P(A) = \frac{C_5^2}{28} = \frac{5}{14}$$

ب- B: "كرية واحدة على الأقل تحمل رقم 15"

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{9}{14}$$

2- أ- $x \in \{20, 25, 30\}$.

$$P(x=20) = P(A) = \frac{5}{14}$$

$$P(x=25) = \frac{C_5^1 \times C_3^1}{28} = \frac{15}{28}$$

$$P(x=30) = \frac{C_3^2}{28} = \frac{3}{28}$$

x_i	20	25	30
$P(x=x_i)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

ب- $E(x) = 20\left(\frac{5}{14}\right) + 25\left(\frac{15}{28}\right) + 30\left(\frac{3}{28}\right)$

$$E(x) = \frac{95}{4}$$

ج- $P(x \geq 25) = \frac{15}{28} + \frac{3}{28} = \frac{9}{14}$

3- عدد السحبات الممكنة: $A_8^3 = 336$

أ- C: "الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم"

$$P(C) = \frac{(A_5^2 \times A_3^1 + A_3^2 \times A_5^1) \times 3}{336} = \frac{45}{56}$$

ب- D: "كرية واحدة تحمل رقم 10"

$$P(D) = \frac{A_5^1 \times A_3^2 \times 3}{336} = \frac{15}{56}$$

التمرين الثاني:

1- $u_1 = \frac{1}{2}(-6) + 2(0) - 1 = -4$

$u_2 = \frac{1}{2}(-4) + 2(1) - 1 = -1$

$u_3 = \frac{1}{2}(-1) + 2(2) - 1 = \frac{5}{2}$

2- أ- لدينا: $u_3 = \frac{5}{2} > 0$.

- نفرض أنه من أجل عدد طبيعي n: $u_n > 0$
- نبرهن أن: $u_{n+1} > 0$
- لدينا: $u_n > 0$ إذن $\frac{1}{2}u_n > 0$ وبما أن: $n \geq 3$ فإن $2n \geq 6$ وبالتالي: $\frac{1}{2}u_n + 2n > 6$

ومنه: $u_{n+1} > 5 > 0$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: فإنه

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

ب- لدينا: $n \geq 4$ ومنه $n-1 \geq 3$ من

السؤال السابق: $u_{n-1} > 0$ إذن $\frac{1}{2}u_{n-1} > 0$

وبالتالي: $\frac{1}{2}u_{n-1} + 2(n-1) - 1 > 2(n-1) - 1$

أي: $u_n > 2n - 3$

3- لدينا: $u_n > 2n - 3$ و $\lim_{n \to +\infty} 2n - 3 = +\infty$

إذن: $\lim u_n = +\infty$

4- $v_n = u_n - 4n + 10$

أ- $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10$

$= \frac{1}{2}u_n - 2n + 5$

$= \frac{1}{2}[u_n - 4n + 10] = \frac{1}{2}v_n$

(v_n) م.هـ أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول:

$v_0 = u_0 + 10 = 4$

ب- لدينا: $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه

$u_n = v_n + 4n - 10$

أي: $u_n = \frac{2^2}{2^n} + 4n - 10$

$u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

www.dzexams.com

ج- $u_n = v_n + w_n$ حيث $w_n = 4n - 10$

ومنه: $S_n = 4\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right] + \frac{n+1}{2}[4n-10]$

$$S_n = 8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)(2n-5)$$

التمرين الثالث:

1- صحيح أم خطأ: $|z| = 2$

2- صحيح: بعد تغيير المتغير نجد:

$\begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t = 3^x \end{cases}$ ومنه: إما $t=1$ أو $t=2$

وبالتالي: $x=0$ أو $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

3- خطأ: $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2023} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2023} = 0$

4- خطأ: $u_{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2$

$u_{2n} = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ومنه (u_{2n}) م.ه أساسها $\frac{1}{4}$.

5- خطأ:

$$m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{2x+2}}\,dx$$

$$= \left[2\sqrt{2x+2}\right]_0^1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

التمرين الرابع:

I- $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1- أ- $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ب- $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$

ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2- g مستمرة ومتزايدة تماما على $]1;1,5[$

و $g(1)\times g(1,5) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 1,5$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-\quad 0 \quad +$	

II- $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$

1- أ- $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$

ب- $f'(x) = \frac{\left(2x - \frac{1}{x}\right)x - x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 2 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

ج-

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-\quad 0 \quad +$	

f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-\quad 0 \quad +$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$

2- $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = 0$

- لدينا: $f(x) - y = \frac{1 - \ln x}{x}$

x	0	e	$+\infty$
$f(x)-y$	$\|$	$+\quad 0 \quad -$	
الوضع النسبي	$\|$ (C_f) يقع فوق (Δ)	نقطة تقاطع	(C_f) يقع تحت (Δ)

www.dzexams.com

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: [04 نقاط]

1- أ- $f'(x) = \dfrac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2}$

$= \dfrac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} \geqslant 0$

ومنه f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$.

ب- لدينا $x \geqslant 1$ ومنه $f(x) \geqslant f(1)$

لأن f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ أي:

$f(x) \geqslant 1$

2- أ- لدينا: $u_0 = 2 \geqslant 1$ ، نفرض أنه من أجل عدد طبيعي n: $u_n \geqslant 1$ ، ونبرهن أن: $u_{n+1} \geqslant 1$

لدينا: $u_n \geqslant 1$ وبما أن f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ فإن $f(u_n) \geqslant f(1)$

أي: $u_{n+1} \geqslant 1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geqslant 1$

ب- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n$

$= \dfrac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \dfrac{-u_n(u_n - 1)}{2u_n - 1}$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ وبالتالي (u_n) متناقصة.

ج- بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

- نضع $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ومنه $\ell \in \mathbb{R}$

$2\ell^2 - \ell = \ell^2$ أي: $\dfrac{\ell^2}{2\ell - 1} = \ell$

إذن $\ell(\ell - 1) = 0$ إما $\ell = 0$ أو $\ell = 1$

وبالتالي: $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

3- أ- $v_{n+1} = \ln\left[\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right]$

$= \ln\left[\dfrac{\frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right]$

3- $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + 1 - \ln\alpha}{\alpha}$

وبما أن: $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$ فإن:

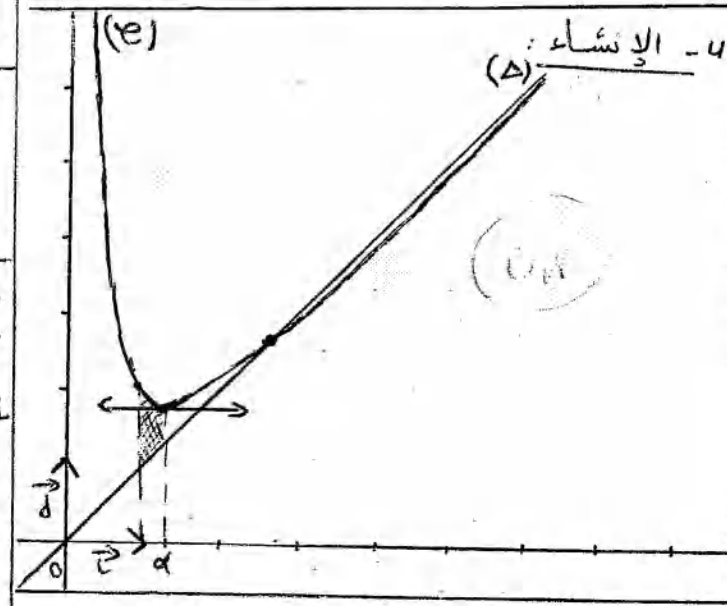
$f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 - 1}{\alpha} = 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$

لدينا: $1 < \alpha < 1{,}5$ ، $2 < 2\alpha < 3$

و $-1 < -\dfrac{1}{\alpha} < -0{,}67$ وبالتالي:

$1 < f(\alpha) < 2{,}33$

4- الإنشاء:



5- أ- h الدالة الأصلية لـ $x \mapsto (1 - \ln x)\dfrac{1}{x}$ التي تنعدم من أجل: $x = e$ إذن:

$c \in \mathbb{R}$; $h(x) = -\dfrac{(1 - \ln x)^2}{2} + c$

$h(e) = 0 + c = 0$; $c = 0$

إذن $h(x) = -\dfrac{1}{2}(1 - \ln x)^2$

ب-

$S(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(x) - x \, dx$

$= \int_1^{\alpha} \dfrac{1 - \ln x}{x} dx = \left[h(x)\right]_1^{\alpha}$

$= h(\alpha) - h(1) = -\dfrac{(1 - \ln\alpha)^2}{2} + \dfrac{1}{2}$

$S(\alpha) = \dfrac{-(1 - \ln\alpha)^2 + 1}{2}$

بما أن $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$ فإن:

$S(\alpha) = \dfrac{-(1 - 2 + \alpha^2)^2 + 1}{2} = -\dfrac{(\alpha^2 - 1)^2 - 1}{2}$

$= -\dfrac{(\alpha^2 - 1 + 1)(\alpha^2 - 1 - 1)}{2} = -\dfrac{\alpha^2(\alpha^2 - 2)}{2}$

$= \dfrac{\alpha^2(2 - \alpha^2)}{2}$

www.dzexams.com

$v_{n+1} = \ln\left[\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}\right]$

$= \ln\left[\frac{(u_n-1)^2}{u_n^2}\right] = \ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2$

$= 2\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right) = 2v_n$

إذن (v_n) م هـ أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0 = -\ln 2$

ب-

$v_n = -\ln 2 (2)^n$

$v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$

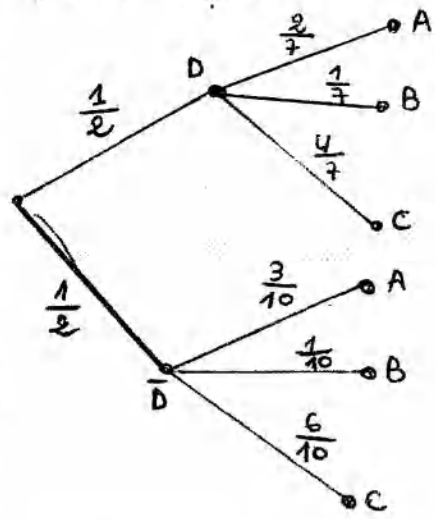
$1 - \frac{1}{u_n} = e^{v_n}$, $\frac{1}{u_n} = 1 - e^{v_n}$

$u_n = \frac{1}{1-e^{v_n}} = \frac{1}{1-e^{-\ln 2 (2)^n}}$

ج- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

التمرين الثاني:

1- لتكن الحادثة D : " السحب من الصندوق U_1"



2- $P(A) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{10} = \frac{41}{140}$

$P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{10} = \frac{17}{140}$

$P(C) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\times\frac{6}{10} = \frac{41}{70}$

3- $P_C(D) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)}$

$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}}{\frac{41}{70}} = \frac{10}{41}$

4- $X \in \{1; 2; 3; 4\}$.

$P(X=2) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\times\frac{6}{10} = \frac{31}{70}$

$P(X=3) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{10} = \frac{47}{140}$

$P(X=4) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{7} = \frac{1}{14}$

$P(X=1) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{10} = \frac{3}{20}$

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{31}{70}$	$\frac{47}{140}$	$\frac{1}{14}$

ب- $E(X) = \frac{3}{20} + \frac{62}{70} + \frac{141}{140} + \frac{4}{14}$

$= \frac{163}{70}$

التمرين الثالث:

1- أ- $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$

$\bar{z}^4 - 4\bar{z}^3 + 6\bar{z}^2 - 4\bar{z} = 0$

ومنه:

أي $\bar{z}$ حل للمعادلة (I)

ب- $i^4 - 4i^3 + 6i^2 - 4i + 5 = 0$

إذن i حل لـ (I) وبالتالي $-i$ حل أيضا.

2- أ- $(z^2+1)(z^2+az+b) =$

$z^4 + az^3 + bz^2 + z^2 + az + b =$

$z^4 + az^3 + (b+1)z^2 + az + b =$

$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5$

بالمطابقة نجد: $a=-4$ ، $b=5$

ب- إذا كان $z^2+1=0$ فإن $z=i$ أو $z=-i$

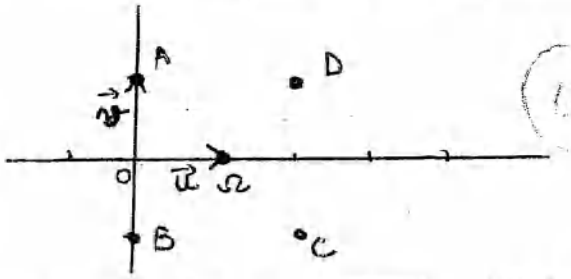
أو: $z^2 - 4z + 5 = 0$ ، فإن $\Delta = -4$

إذا $z = 2+i$ أو $z = 2-i$

$S = \{-i, i, 2-i, 2+i\}$

3- أ-

www.dzexams.com



ب- $z_{\Omega} = \dfrac{2i - 2i + 4 - 2i + 4 + 2i}{8}$ 0,5

$z_{\Omega} = 1$

ج- $M\Omega = 1$ ؛ (Γ) دائرة مركزها Ω ونصف قطرها 1 0,5

د- $z_B - z_{\Omega} = a(z_A - z_{\Omega})$

$a = \dfrac{z_B - z_{\Omega}}{z_A - z_{\Omega}} = \dfrac{-1-i}{-1+i} = \dfrac{1+i}{1-i}$

$a = \dfrac{2i}{2} = i$ 0,75

ومنه $\theta = Arg\, i = \dfrac{\pi}{2}$

ب- $z_D - z_{\Omega} = 1 + i$ 0,5

$i(z_C - z_{\Omega}) = i(-1-i) = 1+i$

ومنه $D = R(C)$

التمرين الرابع:

I- $g(x) = (x-1)e^{-x} + 1$

1- أ- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ 0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x} + 1\right] = 1$

ب- $g'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-1)$

$= e^{-x}(1 - x + 1) = (2-x)e^{-x}$ 0,25

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

0,25

g متزايدة تماما على $]-\infty; 2]$ و

متناقصة تماما على $[2; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$1+e^{-1}$	↘	1

0,25

ج- $g(0) = 0$ و منه $g(x) \geq 0$ 0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

II- $f(x) = x - 2 - xe^{-x}$

1- أ- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(1 - \dfrac{2}{x} - e^{-x}\right)\right] = +\infty$ 0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - 2 - \dfrac{x}{e^x}\right] = +\infty$

ب- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\dfrac{x}{e^x}\right] = 0$ 0,25

ج- $f(x) - (x-2) = -xe^{-x}$ 0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)		تقاطعهما		(C_f) يقع تحت (Δ)

0,5

2- أ- $f'(x) = 1 - (e^{-x} - xe^{-x})$

$= 1 + (x-1)e^{-x} = g(x)$ 0,5

ب-

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

0,25

f متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$ و

متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

0,25

www.dzexams.com

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

0,25

3 - مبرهنة القيم المتوسطة 1

4- أ - $f'(x) = 1$ و منه :

$(x-1)e^{-x} = 0$ أي $x = 1$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = x - 1 - e^{-1}$

(T) : $y = x - 2 - e^{-1}$ 0,5

ب - $f(-2) = -4 + 2e^{2}$ 0,25

(C_f)

(Δ)

(T)

0,5

5- تكافئ: $m + \frac{x}{e^x} = -2$

و منه $m = -2 - xe^{-x}$

أي : $x + m = x - 2 - xe^{-x}$

$f(x) = x + m$

• حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات $y = x + m$ حيث $m \in \mathbb{R}$ 0,5

- $m < -2 - e^{-1}$: المعادلة لا تقبل حلولا .
- $m = -2 - e^{-1}$: المعادلة تقبل حلا واحد موجبا تماما .
- $-2 - e^{-1} < m < -2$: المعادلة تقبل حلين موجبين تماما
- $m = -2$: المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .
- $m > -2$: المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

www.dzexams.com