الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية.

مديرية التربية لولاية الوادي — امتحان البكالوريا التجريبية

الشعبة: تقني رياضي — دورة ماي 2023

ثانويات: التجاني امحمد+ لقرع م الضيف+ باهي الطاهر+ كركوبية خليفة + خوازم الطاهر + شرفي ابراهيم

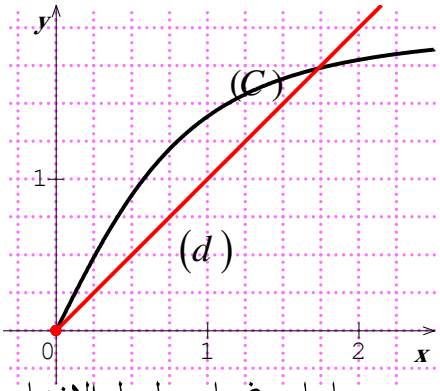
اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 4 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

في الشكل المقابل (C) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$، والمستقيم (d) معادلته: $y=x$.



(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1- أ) انقل الشكل المقابل ومثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1 و u_2 دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1\le u_n<\sqrt{3}$

ب) بين من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير (u_n).

3- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$، ماذا تستنتج؟

4- احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$ ، ثم استنتج المجموع T_n حيث:

$$T_n=\frac{3}{3-u_0^2}+\frac{3}{3-u_1^2}+.....+\frac{3}{3-u_n^2}.$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 2^n و 3^n على 5

2- استنتج باقي قسمة العدد $2023^{2023}+1962^{1954}$ على 5.

3- عين قيم n التي تحقق: $2^n+3^n\equiv 0[5]$

4- برهن من أجل كل عدد طبيعي n أن: $4^{2n}\times 2n+9^{2n+1}\equiv 2n+4[5]$، ثم عين n بحيث:

$4^{2n}\times 2n+9^{2n+1}\equiv 0[5]$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 6 كريات كل منها تحمل الرقم 1، منها 2 سوداء و4 بيضاء، و5 كريات كل منها مرقمة بالرقم 2 منها 3 سوداء وواحدة بيضاء وواحدة خضراء.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات، ونعتبر الحوادث التالية: A " الحصول على كريات لها نفس اللون"

B " الحصول على كريات تحمل نفس الرقم" و C " الحصول على كريات مختلفة في اللون مثنى مثنى".

1- احسب احتمالات الحوادث: A، B و C.

2- بين أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{33}$

3- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المتحصل عليها

أ- عرف قانون المتغير العشوائي X.

ب- احسب الأمل الرياضي $E(X)$، ثم استنتج $E(990X+13)$.

4- نسحب الآن من الكيس 3 كريات على التوالي دون إرجاع، ما احتمال سحب على الأقل كرية بيضاء؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x+2+e^{x}$

1- ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- استنتج من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ إشارة $g(x)$

II - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$، C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2- أثبت من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ أن: $f'(x)=e^{-x}g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

3- بين أن المنحنى C_f يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته: $y=x$

- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمنحنى C_f.

4- تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5\le\alpha\le0.3$.ثم استنتج إشارة $f(x)$.

5- بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين احداثياها.

6- أنشئ C_f و (Δ).

7- أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي x أن: $f(x)-x=1+e^{-x}-f'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto f(x)-x$ على $\mathbb{R}$.

ب) نرمز بـ $S(\alpha)$ لمساحة الحيز المحدد بـ C_f و (Δ) والمستقيمين معادلتيهما $x=\alpha$ و $x=1$.

- بين أن: $S(\alpha)=\alpha-e^{-\alpha}+e^{-1}$

8- h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=[f(x)]^2$، عين اتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04.5 نقطة).

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n}$.

1) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$

2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1 < u_n \leq 2$.

3) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها، ثم احسب نهايتها.

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3 + \dfrac{1}{u_n - 1}$.

1- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

2- اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

3- أ) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \dfrac{u_1}{3} + \dfrac{u_2}{8} + \dfrac{u_3}{15} + \ldots\ldots + \dfrac{u_n}{n(n+2)}$. حيث $n \in \mathbb{N}^*$

التمرين الثاني: (05 نقاط).

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل فيما يلي:

1- نعتبر المعادلة التفاضلية: $2y' + y = 0$ ..... (E)

- الدالة f حيث $f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}$ والتي تحقق: $f(\ln 4) = 1$ هي حل للمعادلة التفاضلية (E)

2- نعتبر العدد المركب $z = \dfrac{1}{2 + i\alpha}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

- من أجل كل عدد حقيقي α لدينا: $z + \overline{z} = 4z\,\overline{z}$

3- توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الطبيعية $(a;b)$ حيث $a < b$ تحقق:

$PPCM(a;b) - PGCD(a;b) = 1$

4- λ عدد حقيقي موجب تماما، لدينا: $\displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(2\lambda + 1) - 1$

5- (u_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $u_0 = 3$

نعتبر المجموع: $S_n = u_0 C_n^0 + u_1 C_n^1 + u_2 C_n^2 + \ldots\ldots + u_n C_n^n$

- $S_n = 3 \times 5^n$ (يمكن استعمال دستور ثنائي الحد)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1- احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و180

2- نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $225x-180y=90$ .....(1)

أ) بين أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة $5x-4y=2$ .....(E)

ب) بين أن المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، ثم حلها إذا علمت أن الثنائية $(2;2)$ حل خاص لها.

جـ) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $|x+y-1|<7$.

3- N عدد طبيعي يكتب $\overline{52}$ في النظام ذي الأساس α، و $\overline{44}$ في النظام ذي الأساس β حيث $\alpha<10$

- عين α و β، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=2x^2+4x+1+\ln(x+1)$،

1- ادرس تغيرات الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.3\le\alpha\le-0.2$.

3- عين من أجل كل عدد حقيقي من $]-1;+\infty[$ إشارة $h(x)$.

II) f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{\ln(x+1)}{2(x+1)}$ (φ) تمثيلها البياني في معلم م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أن المستقيم (Δ) معادلته $y=x$ مقارب لـ (φ)، ثم حدد الوضع النسبي لـ (φ) و (Δ)

2- بين من أجل كل $x>-1$ أن: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{2(x+1)^2}$، استنتج اتجاه تغير f ،ثم شكل جدول تغيراتها.

3- اكتب معادلة المماس (d) الموازي لـ (Δ)

4- بين أن: $f(\alpha)=2\alpha+1-\dfrac{1}{2(\alpha+1)}$، ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

5- أ) أثبت أن (φ) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها β حيث: $-0.4<\beta<-0.3$.

ب) ارسم (φ) والمماس (d) والمستقيم المقارب (Δ)

6- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

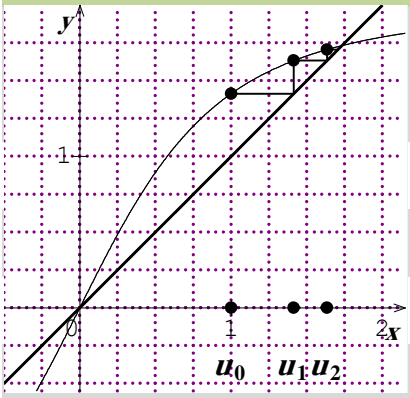
7- F دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $F(x)=\dfrac{1}{2}[\ln(x+1)]^2$.

أ) أثبت أن الدالة F دالة أصلية للدالة : $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (φ) والمستقيم (Δ) والمستقيمين معادلتيهما $x=e-1$ و $x=0$.

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04.5 نقطة)



1- أ) انقل الشكل ومثل على محور الفواصل: u_0، u_1 و u_2 دون حسابها

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

المتتالية متزايدة و متقاربة

2- أ) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1<u_n\leq\sqrt{3}$

$u_0=\frac{1}{2}$ ومنه: $1<u_0\leq\sqrt{3}$ ومنه $P(0)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n كيفي

نبرهن صحة $P(n+1)$: لدينا: $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\times 2x}{x^2+1}=\dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$

من فرض التراجع $1<u_n\leq\sqrt{3}$ والدالة f متزايدة إذن: $f(1)<f(u_n)\leq f(\sqrt{3})$ ومنه: $\frac{2}{\sqrt{2}}<u_{n+1}\leq\sqrt{3}$

لدينا: $1<\frac{2}{\sqrt{2}}$ بالتعدي نجد المطلوب $1<u_{n+1}\leq\sqrt{3}$

ب) بين من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير (u_n).

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}-u_n=\frac{2u_n-u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}}=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

المقام موجب و $1<u_n\leq\sqrt{3}$ ومنه ندرس إشارة $2-\sqrt{u_n^2+1}$

لدينا: $1<u_n\leq\sqrt{3}$ ومنه: $2<u_n^2+1\leq 4$ ومنه: $\sqrt{2}<\sqrt{u_n^2+1}\leq 2$ ومنه: $-2<-\sqrt{u_n^2+1}\leq-\sqrt{2}$

ومنه: $0<2-\sqrt{u_n^2+1}\leq 2-\sqrt{2}$ ومنه: $2-\sqrt{u_n^2+1}>0$ وبالتالي المتتالية متزايدة تماما.

3- أ) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}=\frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}=\frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{3-\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}=\frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{\frac{3u_n^2+3-4u_n^2}{u_n^2+1}}=\frac{4u_n^2}{3-u_n^2}=4v_n$$

ومنه المتتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول: $v_0=\frac{u_0^2}{3-u_0^2}=\frac{1}{2}$

ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$، ماذا تستنتج؟

$v_n=\frac{1}{2}(4)^n$ و لدينا: $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ ومنه: $3v_n-v_nu_n^2=u_n^2$ ومنه: $-v_nu_n^2-u_n^2=-3v_n$

ومنه: $u_n^2(-v_n-1)=-3v_n$ ومنه: $u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{v_n+1}}$ بالتعويض نجد:

$u_n=\sqrt{\frac{3\times4^n}{4^n+2}}$ ومنه: $u_n=\sqrt{\frac{3\times\frac{1}{2}\times4^n}{\frac{1}{2}\times4^n+1}}=\sqrt{\frac{\frac{3\times4^n}{2}}{\frac{4^n+2}{2}}}=\sqrt{\frac{3\times4^n}{4^n+2}}$

لدينا: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3\times4^n}{4^n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3\times4^n+6-6}{4^n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3-\frac{6}{4^n+2}}=\sqrt{3}$ نستنتج (u_n) متقاربة.

4- احسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+v_2+.....+v_n$ ، ثم استنتج المجموع T_n حيث:

$$T_n=\frac{3}{3-u_0^2}+\frac{3}{3-u_1^2}+.....+\frac{3}{3-u_n^2}.$$

لدينا: $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ ومنه: $v_n+1=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}+1=\frac{u_n^2+3-u_n^2}{3-u_n^2}=\frac{3}{3-u_n^2}$

ومنه: $T_n=(v_0+1)+(v_1+1)+.....+(v_n+1)$

ومنه: $T_n=1(n+1)+\frac{1}{2}\times\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=n+1+\frac{4^{n+1}-1}{6}$ ومنه: $T_n=n+1+\frac{4^{n+1}-1}{6}$

التمرين الثاني: (4.5 نقط)

1- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من 2^n و 3^n على 5

$2^0\equiv1[5]$ ، $2^1\equiv2[5]$ ، $2^2\equiv4[5]$ ، $2^3\equiv3[5]$ ، $2^4\equiv1[5]$

ومنه بواقي قسمة 2^n على 5 دورية دورها 4 ومنه:

$n.$	$4k.$	$4k+1.$	$4k+2.$	$4k+3.$
بواقي قسمة 2^n على 5	1	2	4	3

$3^0\equiv1[5]$ ، $3^1\equiv3[5]$ ، $3^2\equiv4[5]$ ، $3^3\equiv2[5]$ ، $3^4\equiv1[5]$

ومنه بواقي قسمة 3^n على 5 دورية دورها 4 ومنه:

$n.$	$4k.$	$4k+1.$	$4k+2.$	$4k+3.$
بواقي قسمة 3^n على 5	1	3	4	2

2- استنتج باقي قسمة العدد $2023^{2023}+1962^{1954}$ على 5

لدينا: $2023=5\times404+3$ ومنه: $2023\equiv3[5]$ و $1962=5(392)+2$ ومنه: $1962\equiv2[5]$

و لدينا: $2023=4k+3$ ومنه: $2023\equiv 3[4]$ و $1962=5k'+2$ ومنه: $1962\equiv 2[4]$

ومنه: $2023^{2023}+1962^{1954}\equiv 3^{4k+3}+2^{4k'+2}[5]$ ومنه: $2023^{2023}+1962^{1954}\equiv 7[5]$

ومنه: $2023^{2023}+1962^{1954}\equiv 2[5]$ إذن باقي القسمة هو 2

3- عين قيم n التي تحقق: $2^n+3^n\equiv 0[5]$

n.	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
بواقي قسمة 2^n على 5	1	2	4	3
بواقي قسمة 3^n على 5	1	3	4	2
$2^n+3^n\equiv....[5]$	2	5	8	5

ومنه قيم n التي تحقق: $2^n+3^n\equiv 0[5]$ هي: $n=\{4k+1;4k+3/k\in\mathbb{N}\}$

4- برهن من أجل كل عدد طبيعي n أن: $4^{2n}\times 2n+9^{2n+1}\equiv 2n+4[5]$، ثم عين n بحيث:

$4^n\times 2n+3^{2n+1}\equiv 0[5]$

لدينا: $4^{2n}\equiv\left(2^2\right)^{2n}[5]$ ومنه: $4^{2n}\equiv 2^{4n}[5]$ ونعلم أن: $2^{4n}\equiv 1[5]$ مهما كان n ومنه: $4^{2n}\equiv 1[5]$

و $9^{2n+1}\equiv\left(3^3\right)^{2n+1}[5]$ ومنه: $9^{2n+1}\equiv 3^{2(2n+1)}[5]$ ومنه: $9^{2n+1}\equiv 3^{4n+2}[5]$

ونعلم أن: $3^{4n+2}\equiv 4[5]$ مهما كان n ومنه: $9^{2n+1}\equiv 4[5]$ بالتعويض: $4^{2n}\times 2n+9^{2n+1}\equiv 2n+4[5]$

- لدينا: $4^n\times 2n+3^{2n+1}\equiv 0[5]$ تكافئ $2n+4\equiv 0[5]$

ومنه: $2n\equiv -4[5]$ ومنه: $2n\equiv 1[5]$ نضرب في 3 نجد: $6n\equiv 3[5]$ ومنه: $n\equiv 3[5]$

إذن: $n\equiv 5k+3$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1- احسب احتمالات الحوادث A، B و C.

$$P(A)=\frac{C_5^2+C_5^2}{C_{11}^3}=\frac{20}{165}\quad ،\quad P(B)=\frac{C_6^3+C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{30}{165}\quad ،\quad P(C)=\frac{C_1^1C_5^1C_5^1}{C_{11}^3}=\frac{25}{165}$$

2- بين أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{33}$

$$P(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_{11}^3}=\frac{5}{165}=\frac{1}{33}$$

3- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المتحصل عليها

أ- عرف قانون المتغير العشوائي X.

$X=\{1;2;3\}$ ومنه: $P(X=1)=\frac{20}{165}$ ، $P(X=2)=\frac{C_1^1C_5^2+C_1^1C_5^2+C_5^1C_5^2+C_5^2C_5^1}{165}=\frac{120}{165}$

$$P(X=3)=\frac{C_1^1C_5^1C_5^1}{165}=\frac{25}{165}$$

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{165}$	$\frac{120}{165}$	$\frac{25}{165}$

ب-احسب الأمل الرياضي $E(X)$، ثم استنتج $E(990X+13)$.

$$E(X)=1\times\frac{20}{165}+2\times\frac{120}{165}+3\times\frac{25}{165}=\frac{335}{165}=2.03$$

$$E(990X+13)=990E(X)+13=2023$$

4- نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع، ما احتمال سحب على الأقل كرية بيضاء

نعتبر هذه الحادثة D ومنه: الحادثة العكسية لها هي: عدم سحب كرية بيضاء

إذن: $P(\overline{D})=\frac{A_6^3}{A_{11}^3}=\frac{120}{990}=\frac{4}{33}$ ومنه: $P(D)=\frac{29}{33}$

طريقة ثانية: $P(D)=\frac{3A_5^1A_6^2+3A_5^2A_6^1+A_5^3}{A_{11}^3}=\frac{450+360+60}{990}=\frac{870}{990}=\frac{29}{33}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x+2+e^x$

1- ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

$g'(x)=-1+e^x$ ومنه: $g'(x)<0$ تعني أن: $-1+e^x<0$ ومنه: $e^x<1$ ومنه: $x<0$

إذن: g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}-x+2+e^x=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(-1+\frac{2}{x}^{0}+\frac{e^x}{x}^{+\infty}\right)=+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

2- استنتج من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ إشارة $g(x)$

من جدول التغيرات: $g(x)>0$

II - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$، C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty+(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\cancel{xe^{-x}}^{0}-\cancel{e^{-x}}^{0}=+\infty$

2- أثبت من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ أن: $f'(x)=e^{-x}g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

$f'(x)=1+1\times e^{-x}+(-e^{-x})(x-1)=1+(-x+2)e^{-x}$

نضرب ونقسم على e^x نجد: $f'(x)=\frac{e^x+-x+2}{e^x}$ ومنه: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}=e^{-x}g(x)$

3- بين أن المنحنى C_f يقبل مستقيما مقاربا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته: $y=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{-x}}^{0}-\frac{1}{e^{-x}}^{0}=0$$

- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمنحنى C_f.

$f(x)-y=(x-1)e^{-x}$ إشارته من إشارة $(x-1)$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$

ومنه: C_f تحت (Δ) في المجال $]-\infty;1[$ و C_f فوق (Δ) في المجال $]1;+\infty[$

4- تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3\le\alpha\le0.5$.

الدالة مستمرة و رتيبة على المجال $]0.3;0.5[$ و $f(0.3)\simeq-0.22$ و $f(0.5)=0.2$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.3\le\alpha\le0.5$.

5- أ) أثبت أن المنحنى C_f يقبل النقطة A نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.

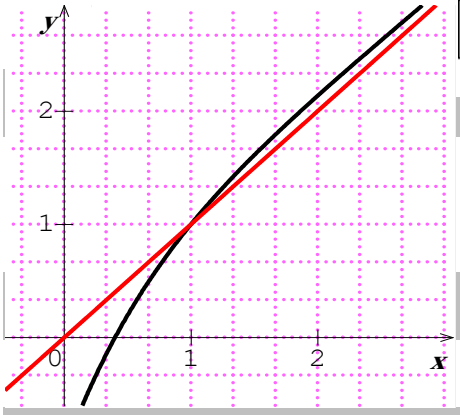
$f'(x)=e^{-x}\left(e^{x}+-x+2\right)$

ومنه: $f''(x)=-e^{-x}(-x+2+e^{x})+(-1+e^{x})e^{-x}=e^{-x}\left(x-2-e^{x}-1+e^{x}\right)=(x-3)e^{-x}$

إشارته من إشارة $(x-3)$ ومنه:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

إذن نقطة الانعطاف احداثياها: $(3;3+2e^{-3})$



ب) اكتب معادلة المماس (T) لـ C_f عند النقطة A.

لدينا: $(T):y=f'(3)(x-3)+f(3)=(1-e^{-3})(x-3)+3+2e^{-3}$

ومنه: $(T):y=(1-e^{-3})x+5e^{-3}$

6- أنشئ C_f و (Δ).

7- أ) تحقق أن: $f(x)-x=1+e^{-x}-f'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية لـ $x\mapsto f(x)-x$ على $\mathbb{R}$.

$f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ ومنه: $f(x)-x=(x-1)e^{-x}$

و $1+e^{-x}-f'(x)=1+e^{-x}-\left(1+(-x+2)e^{-x}\right)=1+e^{-x}-1+(x-2)e^{-x}=(x-1)e^{-x}$

الدالة الأصلية: $x\mapsto x-e^{-x}+f(x)=x-e^{-x}+x+(x-1)e^{-x}=2x+(x-2)e^{-x}$

ب) نرمز بـ $S(\alpha)$ لمساحة الحيز المحدد بالمنحنى C_f و (Δ) والمستقيمين معادلتيهما $x=\alpha$ و $x=1$.

- بين أن: $S(\alpha)=\alpha-e^{-\alpha}+e^{-1}$

نعتبر F دالة أصلية للدالة $x\mapsto f(x)-x$ ومنه: $F(x)\mapsto x-e^{-x}+f(x)$

لدينا: على المجال $[\alpha;1]$ C_f تحت (Δ) ومنه:

$$S(\alpha)=-\int_{\alpha}^{1}\left(f(x)-x\right)dx=-\left[x-e^{-x}+f(x)\right]_{\alpha}^{1}=\alpha-e^{-\alpha}+f(\alpha)-\left(1-e^{1}+f(1)\right)$$

لدينا: $f(\alpha)=0$ و $f(1)=1$ ومنه: $S(\alpha)=\alpha-e^{-\alpha}-1+e^{-1}+1$ إذن: $S(\alpha)=\alpha-e^{-\alpha}+e^{-1}$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04.5 نقطة).

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{u_n}$.

1) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_{n+1}=2-\dfrac{1}{u_n}$

$$u_{n+1}=2-\frac{1}{u_n}=\frac{2u_n}{u_n}-\frac{1}{u_n}=\frac{2u_n-1}{u_n}$$

2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1<u_n\leq 2$.

$u_0=2$ ومنه $1<u_0\leq 2$ محققة

نفرض أن $1<u_n\leq 2$ صحيحة من أجل n عدد طبيعي كيفي

نبرهن أن: $1<u_{n+1}\leq 2$: من فرض التراجع لدينا $1<u_n\leq 2$ ومنه: $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{u_n}\leq 1$ ومنه: $-1<-\dfrac{1}{u_n}\leq -\dfrac{1}{2}$

ومنه: $2-1<2-\dfrac{1}{u_n}\leq 2-\dfrac{1}{2}$ ومنه: $1<u_{n+1}\leq \dfrac{3}{2}$ لدينا: $\dfrac{3}{2}\leq 2$ بالتعدي نجد: $1<u_{n+1}\leq 2$.

3) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها، ثم احسب نهايتها.

لدينا: $u_{n+1}-u_n=2-\dfrac{1}{u_n}-u_n$ ومنه: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^{\,2}+2u_n-1}{u_n}=\dfrac{-(u_n-1)^2}{u_n}>0$

ومنه المتتالية متزايدة تماما

المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة.

نهايتها حل المعادلة $L=2-\dfrac{1}{L}$ ومنه: $L^2-2L+1=0$ ومنه: $(L-1)^2=0$ ومنه: $L=1$

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=3+\dfrac{1}{u_n-1}$.

1- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1}=3+\frac{1}{u_{n+1}-1}=3+\frac{1}{2-\dfrac{1}{u_n}-1}=3+\frac{1}{\dfrac{u_n-1}{u_n}}=3+\frac{u_n}{u_n-1}=\frac{4u_n-3}{u_n-1}$$

ومنه: $v_{n+1}-v_n=\dfrac{4u_n-3}{u_n-1}-\left(3+\dfrac{1}{u_n-1}\right)=\dfrac{4u_n-3}{u_n-1}-\dfrac{3u_n-2}{u_n-1}=\dfrac{u_n-1}{u_n-1}=1$

المتتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول: $v_0=3+\dfrac{1}{2-1}=4$

2- اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n=\dfrac{n+2}{n+1}$.

ولدينا: $v_n=3+\dfrac{1}{u_n-1}$ ومنه: $v_n-3=\dfrac{1}{u_n-1}$ ومنه: $u_n-1=\dfrac{1}{v_n-3}$ $v_n=4+n$

ومنه: $u_n = \frac{1}{v_n - 3} + 1$ بالتعويض: $u_n = \frac{1}{4+n-3} + 1 = \frac{1}{1+n} + 1 = \frac{n+2}{n+1}$ ومنه: $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

3- أ) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{8} + \frac{u_3}{15} + \ldots\ldots + \frac{u_n}{n(n+2)}$.

لدينا: $\frac{u_n}{n(n+2)} = \frac{\frac{n+2}{n+1}}{n(n+2)} = \frac{1(n+2)}{(n+1)n(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ومنه: $S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

التمرين الثاني: (05 نقاط).

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل فيما يلي:

1- نعتبر المعادلة التفاضلية: $2y' + y = 0$ ..... (E)

- الدالة f حيث $f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}$ هي حل للمعادلة التفاضلية (E) والتي تحقق: $f(\ln 4) = 1$

الإجابة خاطئة لأن: $2y' + y = 0$ تكافئ $y' = -\frac{1}{2}y$ حلها من الشكل: $f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$

ولدينا: $f(\ln 4) = 1$ يكافئ $f(\ln 4) = Ce^{-\frac{1}{2}\ln 4} = 1$

ومنه: $Ce^{-\frac{1}{2}\ln 4} = Ce^{\ln 4^{-\frac{1}{2}}} = Ce^{\ln \frac{1}{\sqrt{4}}} = Ce^{\ln \frac{1}{2}} = 2C = 1$ إذن: $C = \frac{1}{2}$ ومنه: $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

2- نعتبر العدد المركب $z = \frac{1}{2+i\alpha}$ حيث: $\alpha \in \mathbb{R}$ ، من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ لدينا: $z + \overline{z} = 4z\overline{z}$

الإجابة صحيحة لأن: $z + \overline{z} = \frac{1}{2+i\alpha} + \overline{\left(\frac{1}{2+i\alpha}\right)} = \frac{1}{2+i\alpha} + \frac{1}{\overline{2+i\alpha}} = \frac{1}{2+i\alpha} + \frac{1}{2-i\alpha}$

$$= \frac{2-i\alpha+2+i\alpha}{(2+i\alpha)(2-i\alpha)} = \frac{4}{4+\alpha^2}$$

$$4z\overline{z} = 4\left(\frac{1}{2+i\alpha}\right)\overline{\left(\frac{1}{2+i\alpha}\right)} = 4 \times \frac{1}{2+i\alpha} \times \frac{1}{\overline{2+i\alpha}} = 4 \times \frac{1}{2+i\alpha} \times \frac{1}{2-i\alpha}$$

و

$$= \frac{4}{(2+i\alpha)(2-i\alpha)} = \frac{4}{4+\alpha^2}$$

ومنه: $z + \overline{z} = 4z\overline{z}$

3- توجد ثنائية وحيدة طبيعية $(a;b)$ حيث $a < b$ تحقق: $PPCM(a;b) - PGCD(a;b) = 1$

الإجابة صحيحة لأن:

بوضع: $PGCD(a;b)=d$ ومنه توجد ثنائية $(a';b')$ حيث: $a=a'\times d$ و $b=b'\times d$

بالتعويض: $PPCM(a'\times d;b'\times d)-PGCD(a'\times d;b'\times d)=1$

ومنه: $d\times PPCM(a';b')-d\times PGCD(a';b')=1$.....(1)

نعلم أن أوليان فيما بينهما إذن: $PGCD(a';b')=1$ و $PPCM(a';b')=a'\times b'$

بالتعويض نجد: $d\times a'b'-d=1$ ومنه: $d\times(a'b'-1)=1$

يؤول حل التمرين إلى ايجاد عددين طبيعيين جداؤهما 1 إذن كل منها يساوي 1 ومنه: $\begin{cases}d=1\\a'b'-1=0\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}d=1\\a'b'=1\end{cases}$ ومنه: $a'=1$ و $b'=1$ ومنه: $a=1\times1=1$ و $b=1\times1=1$

ومنه توجد ثنائية وحيدة هي: $(1;1)$

4- α عدد حقيقي موجب تماما، لدينا: $\int_0^{\lambda}\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(2\lambda+1)-1$

الإجابة خاطئة لأن: $\int_0^{\lambda}\frac{1}{2x+1}dx=\int_0^{\lambda}\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\times\int_0^{\lambda}\frac{2}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(2x+1)\right]_0^{\lambda}$

$=\frac{1}{2}\ln(2\lambda+1)-\frac{1}{2}\ln(2(0)+1)=\frac{1}{2}\ln(2\lambda+1)$

ومنه: $\int_0^{\lambda}\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(2\lambda+1)$

5- (u_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $u_0=3$

نعتبر المجموع: $S_n=u_0C_n^0+u_1C_n^1+u_2C_n^2+.....+u_nC_n^n$ حيث: $S_n=3\times5^n$

الإجابة صحيحة لأن: $S_n=u_0C_n^0+u_1C_n^1+u_2C_n^2+.....+u_nC_n^n$

$=3\times4^0C_n^0+3\times4^1C_n^1+3\times4^2C_n^2+.....+3\times4^nC_n^n$

$=3\left(4^0C_n^0+4^1C_n^1+4^2C_n^2+.....+4^nC_n^n\right)$

لدينا: $=3\left(1^n\times4^0C_n^0+1^{n-1}\times4^1C_n^1+1^{n-2}\times4^2C_n^2+.....+1^0\times4^nC_n^n\right)$

$=3\sum_{i=0}^{n}1^{n-i}\times4^iC_n^i=3(1+4)^n$

ومنه: $S_n=3(5)^n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1- احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و180

لدينا: $225=5^2\times3^2$ و $180=2^2\times3^2\times5$ ومنه: $PGCD(225;180)=5\times3^2=45$

2- نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $225x-180y=90$ ..... (1)

أ) بين أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة $5x-4y=2$ ..... (E)

لدينا: $225x-180y=90$ نقسم على 45 نجد: $5x-4y=2$ ومنه المعادلتان متكافئتان.

ب) بين أن المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، ثم حلها إذا علمت أن الثنائية $(2;2)$ حل خاص لها.

في المعادلة (E) لدينا: $PGCD(4;5)=1$ و 1 يقسم 2 إذن المعادلة تقبل حلولا.

لدينا: $(2;2)$ حل خاص للمعادلة إذن: $\begin{cases}5x-4y=2\\5(2)-4(2)=2\end{cases}$

بالطرح طرفا لطرف نجد: $5(x-2)-4(y-2)=0$ ومنه: $5(x-2)=4(y-2)$ .....(2)

4 يقسم $5(x-2)$ و $PGCD(4;5)=1$ ومنه: 4 يقسم $x-2$ إذن: $x-2=4k$ ومنه: $x=4k+2$

بالتعويض في (2) نجد: $5(4k)=4(y-2)$ ومنه: $y-2=5k$ ومنه: $y=5k+2$

حلول المعادلة هي جميع الثنائيات $(4k+2;5k+2)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

جـ) عين الثنائيات $(x_0;y_0)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $|x_0+y_0-1|<4$.

لدينا: $|x_0+y_0-1|<2$ ومنه: $-4<x_0+y_0-1<4$ ومنه: $-4<4k+2+5k+2-1<4$

ومنه: $-4<9k+3<4$ ومنه: $-7<9k<1$ ومنه: $-\frac{7}{9}<k<\frac{1}{9}$ ومنه: $-0.77<k<0.11$

ومنه: $k=0$ بالتعويض في الحلول: $(2;2)$

3- N عدد طبيعي يكتب $\overline{52}$ في النظام ذي الأساس α، و $\overline{44}$ في النظام ذي الأساس β حيث $\alpha<10$

- عين α و β، ثم اكتب N في النظام العشري.

$N=\overline{52}^{(\alpha)}=\overline{44}^{(\beta)}$ ومنه: $2\times\alpha^0+5\times\alpha^1=4\times\beta^0+4\times\beta^1$ ومنه: $2+5\alpha=4+4\beta$

ومنه: $5\alpha-4\beta=2$ وهي تكافئ المعادلة (E) ومنه حلولها: $(\alpha;\beta)=(4k+2;5k+2)$

لدينا: $N=\overline{52}^{(\alpha)}$ إذن: $\alpha>5$ وحسب معطيات التمرين: $\alpha<10$ ومنه: $5<\alpha<10$

إذن: $\alpha=\{6;7;8;9\}$ بالتعويض: $\alpha=6$ إذن: $4k+2=6$ ومنه: $k=1$ إذن: $(\alpha;\beta)=(6;7)$

$\alpha=7$ إذن: $4k+2=7$ ومنه: $k=\frac{5}{4}$ مرفوض لأن k غير طبيعي

$\alpha=8$ إذن: $4k+2=8$ ومنه: $k=\frac{6}{4}$ مرفوض لأن k غير طبيعي

$\alpha=9$ إذن: $4k+2=9$ ومنه: $k=\frac{7}{4}$ مرفوض لأن k غير طبيعي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) h دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=2x^2+4x+1+\ln(x+1)$،

1- ادرس تغيرات الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$h'(x)=4x+4+\frac{1}{x+1}=\frac{4x^2+8x+5}{x+1}$$

$\Delta=8^2-4(4)(5)=-16<0$ ومنه إشارة البسط والمقام موجبة

ومنه: $h'(x)>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$+$		
$h(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ ومنه:

2- بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.2\le\alpha\le-0.3$.

الدالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-0.3;-0.2]$ و $h(-0.3)\simeq-0.37$ و $h(-0.2)\simeq0.06$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا

x	-1		α		$+\infty$
$h(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	

3- عين من أجل كل عدد حقيقي من $]-1;+\infty[$ إشارة $h(x)$.

من جدول التغيرات:

II) f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}$ (φ) تمثيلها البياني في معلم م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1} x-\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\overset{+\infty}{=}-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\overset{0}{=}+\infty$$

ب) بين أن المستقيم (Δ) معادلته $y=x$ مقارب لـ (φ)، ثم حدد الوضع النسبي لـ (φ) و (Δ)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\overset{0}{=}0$$ ومنه المطلوب

الوضع النسبي: $f(x)-y=-\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}$

المقام موجب و $-\ln(x+1)>0$ على المجال $]-1;0[$ و $-\ln(x+1)<0$ على المجال $]0;+\infty[$

ومنه (φ) فوق (Δ) على المجال $]-1;0[$ و (φ) تحت (Δ) على المجال $]0;+\infty[$

2- بين من أجل كل $x>-1$ أن: $f'(x)=\frac{h(x)}{2(x+1)^2}$، استنتج اتجاه تغير f ،ثم شكل جدول تغيراتها.

$$f'(x)=1-\left(\frac{\frac{1}{x+1}\times2(x+1)-2\ln(x+1)}{4(x+1)^2}\right)=1-\frac{2-2\ln(x+1)}{4(x+1)^2}=1-\frac{1-\ln(x+1)}{2(x+1)^2}$$

$$=\frac{2(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{2(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x+1+\ln(x+1)}{2(x+1)^2}=\frac{h(x)}{2(x+1)^2}$$

3- اكتب معادلة المماس (d) الموازي لـ (Δ)

المماس (d) موازٍ لـ(Δ) يعني أن: $f'(x)=1$ ومنه: $\frac{2x^2+4x+1+\ln(x+1)}{2(x+1)^2}=1$

ومنه: $2x^2+4x+1+\ln(x+1)=2x^2+4x+2$ ومنه: $\ln(x+1)=1$ ومنه: $x+1=e$

ومنه: $x=e-1$ إذن المعادلة:

$$y=1(x-(e-1))+f(e-1)=x-e+1+\left(e-1-\frac{\ln(e-1+1)}{2(e-1+1)}\right)=x-e+1+e-1-\frac{1}{2e}$$

ومنه: $y=x-\frac{1}{2e}$

4- بين أن: $f(\alpha)=-1+\frac{1}{2(\alpha+1)}$، ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا: $h(\alpha)=0$ ومنه: $2\alpha^2+4\alpha+1+\ln(\alpha+1)=0$ ومنه: $\ln(\alpha+1)=-2\alpha^2-4\alpha-1$

من جهة أخرى: $f(\alpha)=\alpha-\frac{\ln(\alpha+1)}{2(\alpha+1)}$ بالتعويض نجد: $f(\alpha)=\alpha-\frac{-2\alpha^2-4\alpha-1}{2(\alpha+1)}$

$$=\frac{4\alpha^2+6\alpha+1}{2(\alpha+1)}=\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)-1}{2(\alpha+1)}=2\alpha+1-\frac{1}{2(\alpha+1)}$$

لدينا: $-0.2\le\alpha\le-0.3$ ومنه: $1.4\le2(\alpha+1)\le1.6$ ومنه: $-\frac{1}{1.4}\le-\frac{1}{2(\alpha+1)}\le-\frac{1}{1.6}$

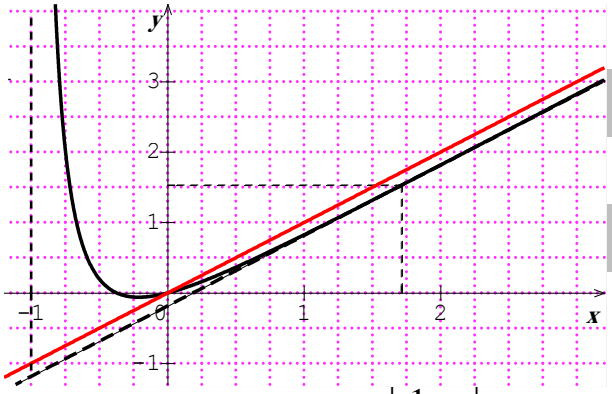
ومن جهة أخرى: $0.4\le2\alpha+1\le0.6$ ومنه: $0.11\le f(\alpha)\le0.23$

5- أ) أثبت أن (φ) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها β حيث: $-0.4<\beta<-0.3$.

الدالة مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-0.4;-0.3]$ و $f(-0.3)\simeq-0.05$ و $h(-0.4)\simeq0.03$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا

ب) ارسم (φ) والمماس (d) والمستقيم (Δ)

الرسم:



6- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

- من أجل $m\in\left]-\infty;\frac{1}{2e}\right[$ لايوجد حلول للمعادلة
- من أجل $m=\frac{1}{2e}$ للمعادلة حل مضاعف
- من أجل $m=0$ للمعادلة حل معدوم
- من أجل $m\in\left]\frac{1}{2e};0\right[$ للمعادلة حلان
- من أجل $m\in]0;+\infty[$ للمعادلة حل وحيد

7- أ) أثبت أن الدالة F دالة أصلية للدالة: $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$.

$$F'(x)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{x+1}\ln(x+1)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (φ) والمستقيم (Δ) والمستقيمين معادلتيهما $x=e-1$ و $x=0$.

(Δ) فوق (φ) إذن المساحة: $\int_0^{e-1}(y-f(x))dx$ ومنه: $\int_0^{e-1}(y-f(x))dx=\int_0^{e-1}\left(\frac{\ln(x+1)}{2(x+1)}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx=\frac{1}{2}\left[F(x)\right]_0^{e-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]^2\right]_0^{e-1}=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}ua$$