الجمهورية الجزائرية الديـمقراطية الشعبية

ثانوية: مؤذن بوزيان — دورة: ماي 2023

الشعبة: علوم تجريبية — الـمدة: 3 ساعات ونصف

امتحان شهادة البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها :

$z_A=-\sqrt{3}i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}i$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(\overline{z}-\sqrt{3}i)(z^2-2z+4)=0$

2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

3) اكتب العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل المثلثي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) بين أن: $\frac{z_B}{z_C}=\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{1444}=\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{2023}$.

5) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون: $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ عددا تخيليا صرفا.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4}{\alpha}u_n+1$ ، حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية.

فيما يلي نأخذ $\alpha=9$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n<\frac{9}{5}$.

3) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = \sqrt{u_{n+1} - u_n}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n.

4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2$.

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على n كرة حمراء و 3 كرات بيضاء و كرتين سوداوتين. (الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس) و n عدد طبيعي.

1) نسحب من الصندوق كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة.

- عين قيمة n حتى يكون احتمال الحصول على كرتين حمراوتين يساوي $\frac{1}{4}$.

2) نضع $n = 5$ و نسحب من الصندوق ثلاث على التوالي بدون إرجاع الكرة المسحوبة.

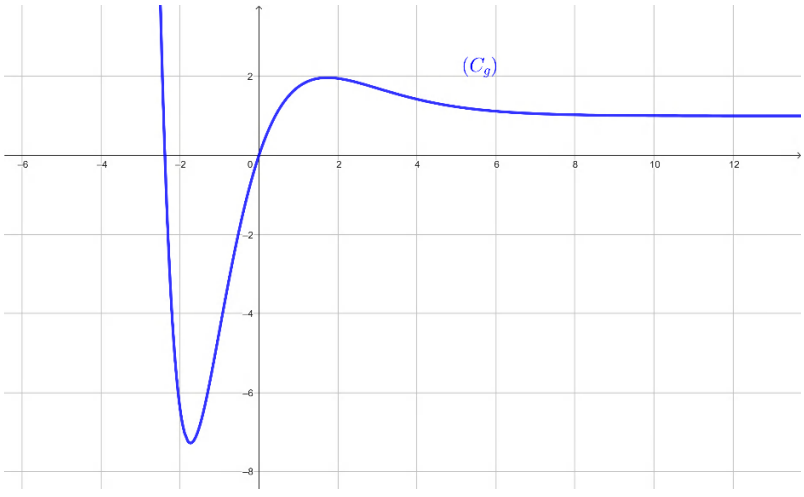
- علما أن الكرة الأولى المسحوبة حمراء احسب احتمال الحصول على آخر كرتين من نفس اللون.

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الشكل المقابل هو (C_g) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = a + (x^2 + 2x - b)e^{-x}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1) عين a و b حتى يقبل (C_g) مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ و يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند المبدأ.

فيما يلي نضع $a = b = 1$:

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الثاني α حيث: $-2 < \alpha < -2.5$.

3) بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-\frac{x^2+4x+3}{e^x}$ و ليكن (C_f) منحناها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها x_0 و x_1 و x_2 بحيث: $-3<x_0<-2.9$.

$-1.3<x_1<-1.1$ $2<x_2<2.1$.

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y=x$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

5) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f). نأخذ $(f(\alpha)=6)$

6) احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_g) و (Δ) و المستقيمات ذات المعادلات التالية: $x=-2$ ، $x=2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

1) الدالة h حل المعادلة التفاضلية $y''+8e^{-2x}=0$ و التي تحقق $h(0)=2023$ و $h'(0)=1444$ معرفة بـ: $h(x)=1442x+2024-e^{-2x}$.

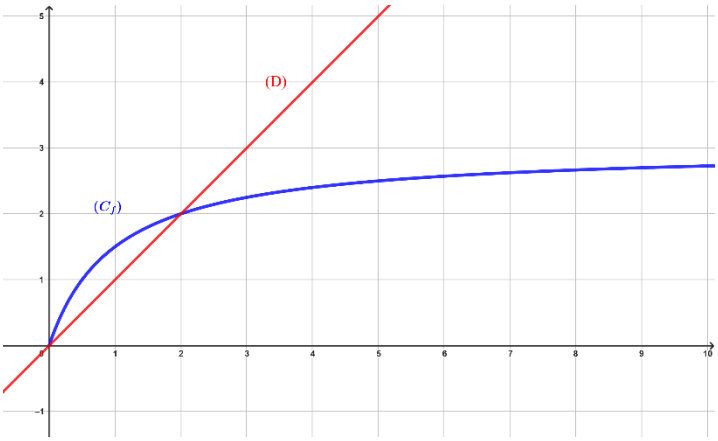
2) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=\int_n^{n+1}5^x\,dx$ هي متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول $u_0=\frac{1}{\ln 5}$.

3) يفتح قفل بتشكيل حرفين من المجموعة $\{A\,,\,B\,,\,C\}$ ثم يتبع بعدد مكون ثلاث أرقام مختلفة من المجموعة $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7;\,8\,;\,9\}$، عدد الطرق الممكنة لفتح القفل هي 3024 .

4) العدد المركب $z=-3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ، عمدته $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

5) المعادلة $\ln(2x-1)+\ln(x-1)=2\ln(x+1)$ ، تقبل حلين متمايزين.

التمرين الثاني: (04 نقاط)



نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x}{x+1}$.

الشكل المقابل يمثل (C_f) المنحنى الممثل للدالة f والمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$.

نعتبر (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=8$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ) انقل الشكل على ورقة مليمترية ثم مثل على حامل محور الفاصل أول أربع حدود من المتتالية (u_n).

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2\le u_n\le 8$.

3) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=\ln\left(1-\frac{2}{u_n}\right)$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين عبارة حدها العام v_n بدلالة n .

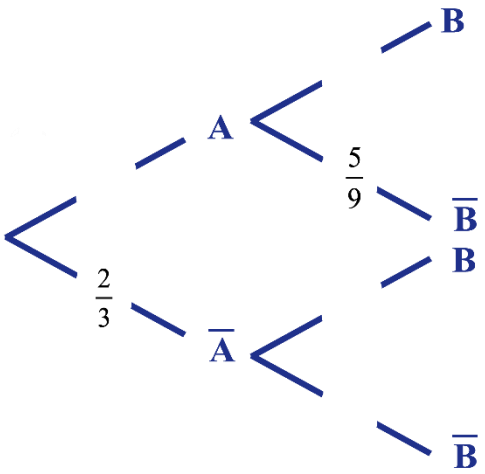
ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n = \dfrac{2}{1-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

5) اكتب الجداء P_n بدلالة n حيث: $P_n = \left(\dfrac{u_0}{u_0-2}\right)\times\left(\dfrac{u_1}{u_1-2}\right)\times\ldots\times\left(\dfrac{u_n}{u_n-2}\right)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

U_1 ، U_2 صندوقان متماثلان يحتوي U_1 على 5 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء و يحتوي U_2 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء. (الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نرمي زهر نرد غير مزيف ، إذا تحصلنا رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 ، و في باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة من U_2.



نسمي الحدث A " الحصول على رقم مضاعف لـ 3 " ،

نسمي الحدث B " الحصول على كرتين من نفس اللون".

1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

2) احسب $P(B)$.

3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس الون ، احسب احتمال أن يكونا من الصندوق U_2.

4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد 2 في حال كانت الكرتين من نفس اللون و العدد 1- في حال كانت الكرتين مختلفتين في اللون.

أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم بين أن $E(X) = \dfrac{205}{441}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$.

2) أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x \in]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

وليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x-1+\ln x$

أ) أدرس إتجاه تغير الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) احسب $h(1)$، استنتج إشارة $h(x)$ من أجل $x\in]0;+\infty[$.

4) بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y=x-1$ ، ثم حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة لـ (Δ).

5) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة $A(1;0)$.

6) أنشئ كلا من (Δ) و (T) ، ثم مثل المنحنى (C).

7) لتكن (D_m) مجموعة المستقيمات التي معادلتها $y=mx-m$ ، حيث m وسيط حقيقي.

أ) بين أن جميع المستقيمات (D_m) تمر بالنقطة $A(1;0)$.

ب) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان.

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية لموضوع البكالوريا التجريبي رياضيات

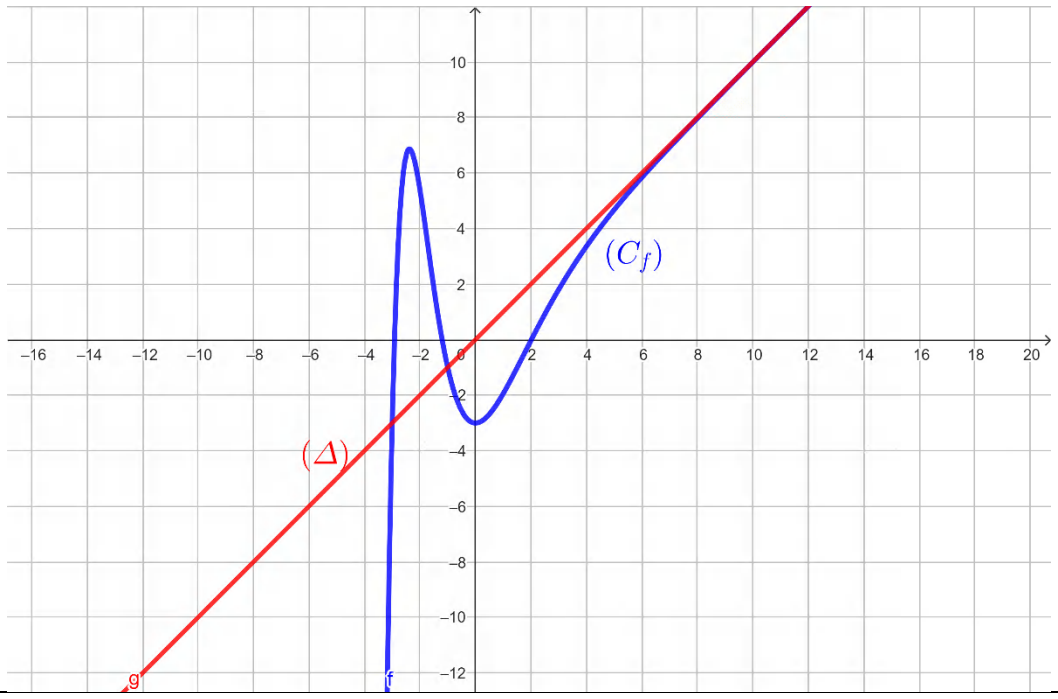
عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجمعة
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(\overline{z}-\sqrt{3}i)(z^2-2z+4)=0$ معناه: $z^2-2z+4=0$ أو $\overline{z}-\sqrt{3}i=0$ $\Delta=12i^2$ إذن حلول المعادلة هي $S=\{-\sqrt{3}i\ ;1+\sqrt{3}i\ ;1+\sqrt{3}i\}$	0.25 0.25 0.5	01
2) أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الجبر: $\frac{z_B}{z_A}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i}\times\frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}=\frac{-3+\sqrt{3}i}{3}=-1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$ كتابة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسي: $z_B=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $z_A=\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ إذن: $\frac{z_B}{z_A}=\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{3}i+\frac{\pi}{2}i}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{5\pi}{6}i}$ ب) استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$: من السؤال السابق: $\frac{z_B}{z_A}=-1+\frac{\sqrt{3}}{3}i=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{5\pi}{6}i}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ إذن: $\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{cases}$	0.25 0.25 0.5	01
3) كتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل المثلثي: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ استنتاج طبيعة المثلث ABC: بما أن $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=-\frac{\pi}{2}$ فإن المثلث ABC قائم في C.	0.5 0.25	0.75

0.75		**4) تبيين أن:** $\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{2023} = \left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{1444} = \frac{Z_B}{Z_C}$:
	0.25	$\frac{Z_B}{Z_C} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
	0.25	$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{2023} = e^{2023\times\frac{2\pi}{3}i} = e^{\left(1348\pi+\frac{2\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$
	0.25	$\left(\frac{Z_B}{Z_C}\right)^{1444} = e^{1444\times\frac{2\pi}{3}i} = e^{\left(962\pi+\frac{2\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$
0.5		**5) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون:** $\frac{Z-Z_A}{Z-Z_B}$ **عددا تخيليا صرفا:**
	0.5	(E) هي الدائرة التي قطرها [AB] باستثناء النقطة B.
		التمرين الثاني: (05 نقاط)
0.5		**1) تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية:**
		(u_n) متتالية حسابية يعني: يوجد عدد حقيقي ثابت r حيث: $u_{n+1}-u_n = r$
		لدينا: $u_{n+1}-u_n = \frac{4}{\alpha}u_n + 1 - u_n = u_n\left(\frac{4}{\alpha}-1\right)+1 = 0$
	0.5	إذن $\frac{4}{\alpha}-1=0$ و منه $\alpha = 4$.
01		**2) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:** $u_n < \frac{9}{5}$:
		نسمي $u_n < \frac{9}{5}$ بالخاصية $P(n)$.
	0.5	لدينا $u_0 < \frac{9}{5}$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$
		نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n.

	0.5	لدينا $u_n < \frac{9}{5}$ أي $\frac{4}{9}u_n < \frac{9}{5}\times\frac{4}{9}$ و منه $\frac{4}{9}u_n + 1 < \frac{4}{5} + 1$ أي أن $u_{n+1} < \frac{9}{5}$ إذن $P(n+1)$ صحيحة. ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < \frac{9}{5}$.
01		**3)** دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n):
	0.25	$u_{n+1} - u_n = \frac{4}{9}u_n + 1 - u_n = -\frac{5}{9}u_n + 1$
	0.5	لدينا $u_n < \frac{9}{5}$ أي $-\frac{5}{9}u_n > -\frac{5}{9}\times\frac{9}{5}$ و منه $-\frac{5}{9}u_n + 1 > -1 + 1$ **إذن** $u_{n+1} - u_n > 0$ أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
	0.25	**استنتاج تقارب (u_n):** **بما أن** أن المتتالية (u_n) متزايدة و محودة من الأعلى فإنها متقاربة.
01		**4) أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$:**
	0.5	$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+2} - u_{n+1}} = \sqrt{\frac{4}{9}u_{n+1} + 1 - \frac{4}{9}u_n - 1}$ $= \sqrt{\frac{4}{9}(u_{n+1} - u_n)} = \sqrt{\frac{4}{9}}\sqrt{u_{n+1} - u_n} = \frac{2}{3}v_n$ **إذن** (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$. **تعيين الحد الأول v_0:**
	0.25	$v_0 = \sqrt{u_1 - u_0} = \sqrt{\frac{4}{9}u_0 + 1 - u_0} = \sqrt{\frac{4}{9} + 1 - 1} = \frac{2}{3}$
	0.25	**ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n:** $v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

0.75		**4) أ) حساب بدلالة n المجموع S_n:**
	0.5	$S_n = v_0^{\,2} + v_1^{\,2} + \ldots + v_n^{\,2} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^1\right]^2 + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 + \ldots + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]^2$ $= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^1 + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 + \ldots + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{n+1}$ $= \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$
	0.25	$\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$ هي عبارة متتالية هندسية أساسها $q = \frac{4}{9}$ ، إذن : $S_n = \frac{4}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}}\right) = \frac{4}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)$
0.75		**ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n:**
	0.5	$v_n = \sqrt{u_{n+1} - u_n}$ $v_n^{\,2} = u_{n+1} - u_n$ $v_n^{\,2} = \frac{4}{9}u_n + 1 - u_n$ $u_n = -\frac{9}{5}v_n^{\,2} + \frac{9}{5} = -\frac{9}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} + \frac{9}{5}$
	0.25	**حساب نهاية u_n:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{9}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} + \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$
		التمرين الثالث: (04 نقاط)
01		**1) تعيين قيمة n:**
	0.25	يكون احتمال الحصول على كرتين حمراوتين يساوي $\frac{1}{4}$ معناه: $\frac{n^2}{(n+5)^2} = \frac{1}{4}$
	0.25	إذن: $3n^2 - 10n + 25 = 0$
	0.5	المعادلة تقبل حلين $n = 5$ (حل مقبول) و $n = -\frac{10}{6}$ (حل مرفوض)
		إذن قيمة n يكون احتمال الحصول على كرتين حمراوتين يساوي $\frac{1}{4}$ هي 5.

01		**2) حساب احتمال الحصول على آخر كرتين من نفس اللون علما أن الكرة الأولى المسحوبة حمراء:** نسمي الحدث الحصول على آخر كرتين من نفس اللون بـ A و نسمي الحدث الحصول على الكرة الأولى حمراء بـ B: $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\dfrac{\dfrac{A_5^3+A_5^1\cdot A_3^2+A_5^1\cdot A_2^2}{A_{10}^3}}{\dfrac{A_5^1\cdot A_{10}^2}{A_{10}^3}}=\dfrac{2}{9}$
01	01	
02	**1.5**	**3) قانون احتمال المتغير العشوائي:** X_i: 0, 1, 2, 3 $P(X=X_i)$: $\frac{1}{120}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{21}{40}$, $\frac{7}{24}$
	0.5	**حساب الأمل الرياضياتي:** $E(X)=\dfrac{679}{328}$
		التمرين الرابع: (07 نقاط)
0.5		**1) تعيين قيمة a و b:** $g(x)=a+(x^2+2x-b)e^{-x}$ عين a و b حتى (C_g) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=2$ بجوار $(+\infty)$ معناه:
	0.25	$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ أي أن: $a=1$
	0.25	(C_g) يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند المبدأ معناه: $g'(0)=3$ أي أن: $g'(0)=2e^{-0}+b\,e^{-0}=3$ إذن $b=1$
0.25	**0.25**	**2)** تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الثاني α حيث: $-2.5<\alpha<-2$
0.5	**0.5**	**3) إشارة $g(x)$:** $g(x)$ موجبة على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$ و سالبة على المجال $[\alpha;0]$
0.5	0.25 0.25	**1) حساب النهايات:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
0.75	**0.75**	**2) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$**
01	0.5	**ب) استنتاج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها:** الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$.

		- جدول التغيرات.
0.5	0.5	**3)** تبيين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط :
0.5	0.5	**4)** أ) تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y=x$. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$
0.5	0.5	ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ): (C_f) فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-1;-3[$ و (C_f) يقطع المستقيم (Δ) عند -1 و -3 و (C_f) تحت المستقيم (Δ) على المجال $]-1;+\infty[\cup]-\infty;-3[$.
01	**0.75** **0.25**	**5)** إنشاء كلا من (Δ) و (C_f): 
01	0.25 0.75	**6)** حساب مساحة الحيز المحد بـ (C_g) و (Δ) و المستقيمات ذات المعادلات التالية: $x=-2$ ، $x=2$: $S=\int_{-2}^{0}x-g(x)+\int_{0}^{2}g(x)-x=\left[\frac{1}{2}x^2-f(x)\right]_{-2}^{0}+\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2}=2-\frac{15}{e^2}+e^2\simeq 7.35\,u.a$

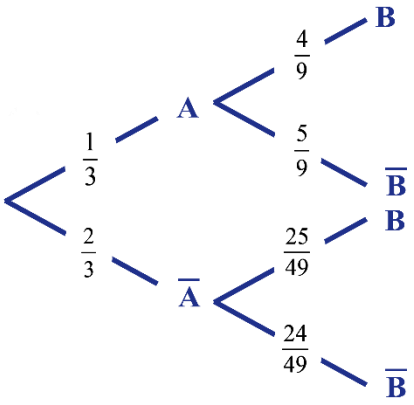
عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجمعة
التمرين الأول: (05 نقاط)		
1) الإقتراح صحيح **التعليل:** لدينا $h(0)=2013$ و $h'(0)=1444$ محققة و لدينا $h''(x)+8e^{-2x}=0$ إذن h حل للمعادلة التفاضلية $y''+8e^{-2x}=0$	0.25 0.75	01
2) الاقتراح خاطئ **التعليل:** $u_0=\int_0^1 5^x\,dx=\int_0^1 e^{x\ln 5}dx=\left[\frac{1}{\ln 5}e^{x\ln 5}\right]_0^1=\frac{5}{\ln 5}-\frac{1}{\ln 5}=\frac{4}{\ln 5}$	0.25 0.75	01
3) الإقتراح خاطئ. **التعليل:** عدد الطرق الممكنة لفتح القفل هي $3^2\times A_9^3=4536$.	0.25 0.75	01
4) الإقتراح خاطئ. **التعليل:** $z=-3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $=-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right)$ $=3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$	0.25 0.75	01

		إذن z عمدته $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.
01	0.25 0.75	5) الإقتراح خاطئ. **التعليل:** المعادلة $\ln(2x-1)+\ln(x-1)=2\ln(x+1)$ تكافئ : $x^2-5x=0$ إذن هي تقبل حلين $x=0$ (حل مرفوض) و $x=5$ (حل مقبول)
		التمرين الثاني: (04 نقاط)
0.5	0.25 0.25	**1) أ) تمثيل أول أربع حدود من المتتالية (u_n)** **ب) وضع تخمين حول أتجاه تغير وتقارب (u_n):** من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة و تتقارب نحو 2 فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)
0.75	 0.25 0.5	**2) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 \le u_n \le 8$:** نسمي $2 \le u_n \le 8$ بالخاصية $P(n)$. لدينا $2 \le u_n \le 8$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n. لدينا $2 \le u_n \le 8$ بما أن f متزايدة تماما فإن $f(2) \le f(u_n) \le f(8)$ **إذن** $2 \le u_{n+1} \le \frac{24}{9} \le 8$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 \le u_n \le 8$.
0.75	0.5 0.25	**3)** دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n): $u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n}{u_n+1}-u_n = \frac{3u_n-u_n^2-u_n}{u_n+1} = \frac{2u_n-u_n^2}{u_n+1} = \frac{u_n(2-u_n)}{u_n+1} < 0$ **إذن** $u_{n+1}-u_n < 0$ أي أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. **استنتاج تقارب (u_n):** **بما أن** أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

01		**4) أ) تبيين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $q=\frac{2}{3}$:**
	0.5	$v_{n+1}-v_n=\ln\left(1-\frac{2}{u_{n+1}}\right)-\ln\left(1-\frac{2}{u_n}\right)=\ln\left(1-\frac{2}{\frac{3u_n}{u_n+1}}\right)-\ln\left(1-\frac{2}{u_n}\right)$ $=\ln\left(1-\frac{2u_n+2}{3u_n}\right)-\ln\left(\frac{u_n}{u_n}-\frac{2}{u_n}\right)=\ln\left(\frac{u_n-2}{3u_n}\right)-\ln\left(\frac{u_n-2}{u_n}\right)=\ln\left(\frac{\frac{u_n-2}{3u_n}}{\frac{u_n-2}{u_n}}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ **إذن** (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$.
	0.25	**تعيين الحد الأول v_0:** $v_0=\ln\left(1-\frac{2}{u_0}\right)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$
	0.25	**كتابة عبارة v_n بدلالة n:** $v_n=\ln\left(\frac{3}{4}\right)+n\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\right)$
0.5		**ب) عبارة u_n بدلالة n:** معناه: $v_n=\ln\left(1-\frac{2}{u_n}\right)$ أي: $e^{v_n}=1-\frac{2}{u_n}$
	0.5	$u_n=\frac{2}{1-e^{v_n}}=\frac{2}{1-e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)+n\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\right)}}=\frac{2}{1-e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}e^{n\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\right)}}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$
0.5		**5) أ) حساب بدلالة n الجداء P_n:**
	0.5	$P_n=\left(\frac{u_0}{u_0-2}\right)\times\left(\frac{u_1}{u_1-2}\right)\times\ldots\times\left(\frac{u_n}{u_n-2}\right)$ $P_n=e^{-v_0}\times e^{-v_1}\times\ldots\times e^{-v_n}=e^{-(v_0+v_1+\ldots+v_n)}=e^{-\left(\frac{n+1}{2}\left(2\ln\left(\frac{1}{3}\right)+n\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right)}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) إكمال الشجرة:



2) حساب $P(B)$:

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap \overline{A})=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{25}{49}=\frac{646}{1323}$$

3) حساب احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من U_2 علما لأنهما من نفس اللون:

$$P_B(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{25}{49}}{\frac{646}{1323}}=\frac{225}{323}$$

4) قانون احتمال المتغير العشوائي:

X_i	2	-1
$P(X=X_i)$	$\frac{646}{1323}$	$\frac{677}{1323}$

حساب الأمل الرياضياتي: $E(X)=\frac{205}{441}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$.

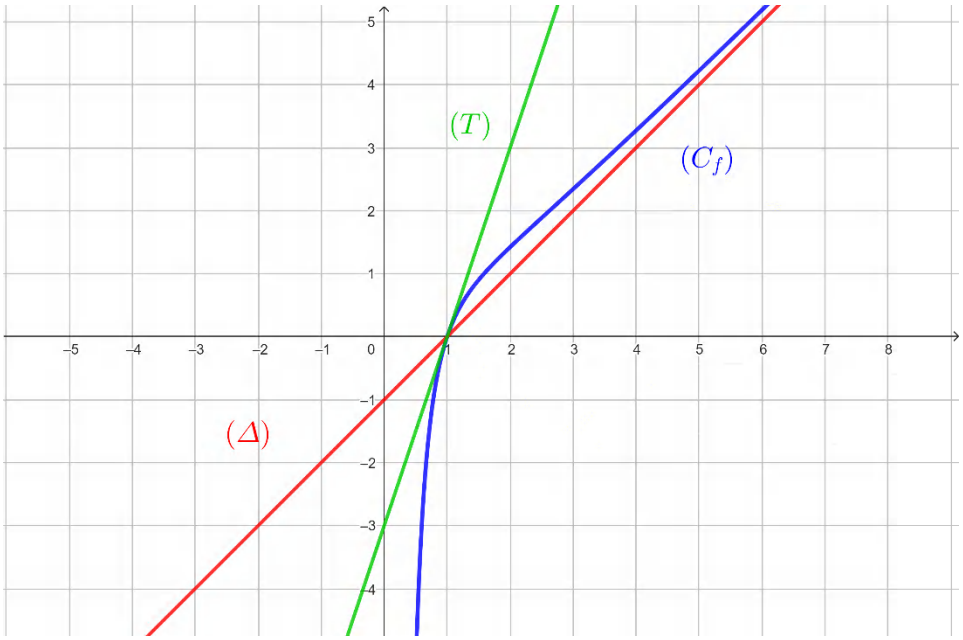
ب) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$.

2) أ) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0;1]$.

	0.25	- **جدول التغيرات**
	0.25	**ب) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x \in]0;+\infty[$:**
		من جدول التغيرات $g(x)>g(1)>0$ إذن $g(x)$ موجبة تماما من أجل $x \in]0;+\infty[$.
		II)
		1) حساب النهايات:
	0.5	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$ ،
	0.25	- **التفسير البياني:**
		(C) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$.
	0.5	**2) أ) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :** $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.
	0.25	ب) استنتاج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
	0.25	f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$
		- **جدول التغيرات**
		3)
	0.5	أ) دراسة إتجاه تغير الدالة h:
		h متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.
		ب) احسب $h(1)$: $h(1)=0$
	0.5	- **استنتاج إشارة $h(x)$ من أجل $x \in]0;+\infty[$:**
		$h(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$.
		4) تبيين أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y=x-1$:
	0.25	$\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$
		- **تحديد وضعية المنحنى (C) بالنسبة لـ (Δ):**
		لدينا: $f(x)-(x-1)=h(x)$
	0.25	(C_f) فوق المستقيم (Δ) على المجال $[1;+\infty[$ و (C_f) يقطع المستقيم (Δ) عند 1 و (C_f) تحت المستقيم (Δ) على المجال $]0;1[$.
		5) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة $A(1;0)$:
	0.25	$(T): y=3x-3$

	0.25 0.25 0.5	**6) الإنشاء:** 
	0.25	**7) أ) بين أن جميع المستقيمات (D_m) تمر بالنقطة $A(1;0)$:** بتعويض إحداثيي A في معادلة المستقيم نجد $m=m$ و هذه العبارة محققة من أجل أي قيمة لـ m أي أن جميع المستقيمات تمر بالنقطة $A(1;0)$.
	0.5	**ب) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان:** **تقبل المعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان من أجل $m\in]1;3[$**