

التدريب الأول

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير :

① مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x+1) + \ln(3-x) \leq \ln(2x+1) + \ln 3$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ $S = [0, \ln 3[$ ب $S = [0, 3[$ ج $S = [0, \ln 3[$ د $S = [0, 3[$

② g دالة معرفة على $]-\infty, 0]$ ب : $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3}$ ، (C_g) تمثيلها البياني يقبل مستقيما مقاربا معادلته :

أ $y = 0$ ب $y = -1$ ج $y = 1$ د $y = 0$

③ حل المعادلة التفاضلية : $y - y' = 1$ و الذي يحقق $y(0) = e$ هو الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

أ $h(x) = e^{x+1} + 1$ ب $h(x) = e^{x+1} - e^x + 1$ ج $h(x) = e^{x+1}$ د $h(x) = e^{x+1} + 1$

④ مجموعة حلول المعادلة : $2e^x - 3e^{-x} - 1 = 0$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ ب $S = \emptyset$ ج $S = \left\{ \ln \left(\frac{3}{2} \right) \right\}$ د $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} \right)$ تساوي :

أ $\frac{e^2}{5}$ ب e^2 ج 0 د $\frac{e^2}{5}$

التدريب الثاني

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^2 e^{-x+2} - 4$

① ادرس تغيرات الدالة g .

② بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 2 و الآخر α حيث $-0.6 < \alpha < -0.5$.

③ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (-x^3 + 2x^2) e^{-x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا و احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4) e^{-x+1}$

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

④ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.

⑤ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + \frac{4}{e}(x-2) = \frac{1}{e}(2-x) \times g(x)$

◀ حدد الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المماس (T) .

⑥ ارسم (T) و (C_f) ، يعطى $f(\alpha) \approx 3.76$.

⑦ عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : $me^x = e(-x^3 + 2x^2)$ ثلاث حلول متمايضة.

⑧ لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (-|x^3| + 2x^2) e^{-|x|+1}$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

◀ بين أن h دالة زوجية.

◀ بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) .

إجابة مختصرة

التمرين الأول

❶ الجواب (ب) التبرير : لدينا $x+1 > 0$ و $3-x > 0$ و $2x+1 > 0$ ومنه مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D =]-\frac{1}{2}, 3[$

نحل المتراجحة : $\ln(x+1) + \ln(3-x) \leq \ln(2x+1) + \ln 3$ يكافئ $\ln[(x+1)(3-x)] \leq \ln[3(2x+1)]$
يكافئ $-x^2 - 4x \leq 0$ نحل المعادلة $-x^2 - 4x = 0$ نجد $x = 0$ أو $x = -4$ (مرفوض لا ينتمي الى مجال التعريف)

x	$-\frac{1}{2}$	0	3
$-x^2 - 4x$		+	-

ومنه $S = [0, 3[$

❷ الجواب (ب) التبرير : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{2}{x})}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{(1 - \frac{2}{x})}}{x(1 - \frac{3}{x})} = \frac{-1}{1} = -1$

❸ الجواب (ب) التبرير : حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $y = Ce^x + 1$ حيث $C \in \mathbb{R}$ و لدينا $h(0) = e$

و بالتالي : $Ce^{(0)} + 1 = e$ أي $C = e - 1$ إذن : $h(x) = (e - 1)e^x + 1 = e \cdot e^x - e^x + 1$ أي $h(x) = e^{x+1} - e^x + 1$

❹ الجواب (ج) التبرير : $2e^x - 3e^{-x} - 1 = 0$ تكافئ $e^x(2e^x - 3e^{-x} - 1) = 0$ تكافئ $2e^{2x} - e^x - 3 = 0$ نضع $t = e^x$

أي $2t^2 - t - 3 = 0$ نحل المعادلة نجد : $t = e^x = -1$ (لا تقبل حل) أو $t = e^x = \frac{3}{2}$ أي $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ إذن : $S = \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$

❺ الجواب (أ) التبرير : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{(x-2)(x+3)} = \underbrace{\left[\frac{e^x - e^2}{x-2}\right]}_{\substack{f(x)=e^x \\ f'(2)=e^2}} \times \underbrace{\frac{1}{x+3}}_{\frac{1}{5}} = \frac{e^2}{5}$

التمرين الثاني

❶ I دراسة تغيرات الدالة g : حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{e^{-x+2}}_{+\infty} - 4 = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^2}_{0} e^{-x+2} - 4 = -4$

حساب المشتقة : $g'(x) = 2xe^{-x+2} - x^2e^{-x+2} = (-x^2 + 2x)e^{-x+2}$: $e^{-x+2} > 0$ لأن $-x^2 + 2x$ إشارة

$-x^2 + 2x = 0$ يكافئ $x = 0$ أو $x = 2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-

• الدالة g متناقصة تماما على المجالين : $]-\infty, 0[$ و $[2, +\infty[$ و متزايدة تماما على المجال : $[0, 2]$.

• جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-
$g(x)$	$+\infty$	-4	0	-4

② • $g(2) = 0$

• بمأن g مستمرة و متناقصة تماما على $[-0.6, -0.5]$ و $\underbrace{g(-0.6)}_{\approx 0.85} \times \underbrace{g(-0.5)}_{\approx -0.95} < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.6, -0.5[$.

③ اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	-

① ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2) e^{-x+1} = \underbrace{-x^3 e^{-x+1}}_0 + 2 \underbrace{x^2 e^{-x+1}}_0 = 0$ ، التفسير : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$

معادلته : $y = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(-x^3 + 2x^2)}_{+\infty} \underbrace{e^{-x+1}}_{+\infty} = +\infty$

② حساب المشتقة : $f'(x) = (-3x^2 + 4x) e^{-x+1} - (-x^3 + 2x) e^{-x+1} = (x^3 - 5x^2 + 4x) e^{-x+1} = x(x^2 - 5x + 4) e^{-x+1}$

③ اتجاه تغير الدالة f : $f'(x) = 0$ يكافئ $x(x^2 - 5x + 4) = 0$ لأن $e^{-x+1} > 0$

$x(x^2 - 5x + 4) = 0$ معناه $x = 0$ أو $x^2 - 5x + 4 = 0$ نحل المعادلة الأخيرة نجد $x = 1$ أو $x = 4$ و بالتالي :

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$			
x		$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x^2 - 5x + 4$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

• الدالة f متناقصة تماما على المجالين : $]-\infty, 0]$ و $[1, 4]$ و متزايدة تماما على المجالين : $[0, 1]$ و $[4, +\infty[$.

• جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			1			≈ -1.6	0

④ معادلة المماس (T) : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = -\frac{4}{e}(x - 2)$ ومنه : $y = -\frac{4}{e}x + \frac{8}{e}$

⑤

$\frac{1}{e}(2 - x) \times g(x) = e^{-1} \cdot (2 - x)(x^2 e^{-x+2} - 4) = (2e^{-1} - e^{-1}x) \cdot (x^2 e^{-x+2} - 4)$

$= 2x^2 e^{-x+2-1} - x^3 e^{-x+2-1} - 8e^{-1} + 4xe^{-1} = (-x^3 + 2x^2) e^{-x+1} + \frac{4}{e}(x - 2) = f(x) + \frac{4}{e}(x - 2)$

◀ الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المماس (T) : لدينا : $f(x) - y_{(T)} = \frac{1}{e}(2 - x) \cdot g(x)$ ومنه اشارة الفرق من اشارة الجداء : $(2 - x) \cdot g(x)$ لأن $\frac{1}{e} > 0$.

x	$-\infty$	α	2	$+\infty$
$(2-x)$	+	+	0	-
$g(x)$	+	0	-	0
$f(x) - y$	+	0	-	0
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

٧ قيم الوسيط الحقيقي m : $me^x = e(-x^3 + 2x^2)$ تكافئ $m = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$ تكافئ $f(x) = m$ ومنه : $0 < m < 1$.

٨ h دالة زوجية : من أجل كل x و $-x$ من D_h :

$$h(-x) = \left(-|(-x)^3| + 2x^2\right) e^{-|-x|+1} = (-|x^3| + 2x^2) e^{-|x|+1} = h(x)$$

◀ من أجل $x > 0$: (C_h) ينطبق فوق (C_f) و من أجل $x < 0$ (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

♣ رسم (T) ، (C_f) و (C_h) :

