اختبار الفصـــــل الأول
في: مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة ثانوي – شعبة علوم تجريبية — الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

المدة: 2 سا — يوم: 05 ديسمبر 2022

ملاحظة: تؤخذ بعين الاعتبار فقط لا غير الإجابات الدقيقة والواضحة

كما يُمنع منعا باتا استعمال القلم الأحمر

التمرين الأول [03 نقاط]

أجب بصحيح أو خطأ مع التبريـــــــــــــــر في كل حالة مما يلي:

❶ حلول المعادلة $\ln^2 x - \ln x^2 = 0$ ذات المتغير الحقيقي x هي: $S = \{1; e\}$

❷ الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' + y\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ الذي يحقق $f(2) = 6$ هو الدالة: $f(x) = 2^x - 2$

❸ الدالة العدديـــة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$، تمثيلها البياني (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = -x$ بجوار $-\infty$

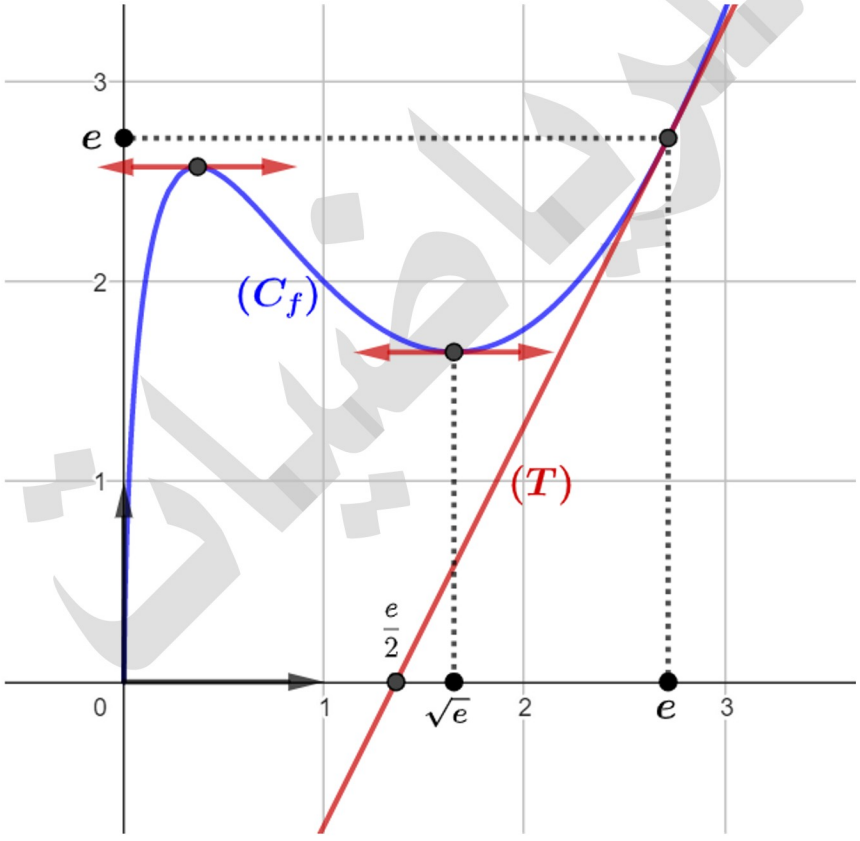
التمرين الثاني [07 نقاط]

a، b و c أعداد حقيقية و f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = x(a\ln^2 x + b\ln x + c)$$

المستوي منســـــــــوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

مثلنا في هذا المعلمالسابق، المنحنى (C_f) الممثل للدالة f و(T) مماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e حيث (T) يقطع حامل محور الفواصل في الفاصلة $\frac{e}{2}$ كما هو موضح في الشكل المقابل:



❶ احسب $f'(x)$ بدلالة a، b و c

❷ بقراءة بيانية عيّن $f'(\sqrt{e})$، $f(e)$ و $f'(e)$

❸ مما سبق بيّن أنه من أجل كل $x > 0$:

$$f(x) = x(2\ln^2 x - 3\ln x + 2)$$

اقلب الورقة

التمرين الثالث [10 نقاط]

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 1$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.28; -1.27[$

❸ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (x+2)(1-e^{-x})$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = g(x)e^{-x}$

ب/ استنتج اتجاه تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

❸ عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا

❹

أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

❺

أ/ أثبت أنه يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي (Δ)

ب/ تحقق أن معادلة المماس (T) هي: $y_{(T)} = x + 2 - e$

❻

أ/ بيّن أنّ $f(\alpha) = \dfrac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$، ثم جد حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب/ جد نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات

ج/ مثل بيانيا كل من (Δ)، (T) و (C_f)

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد حلول المعادلة:

$$\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x}$$

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = (|x|+2)(e^{-|x|}-1)$$

❶ بيّن أنّ الدالة h زوجية

❷ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f)، ثم أنشئه

تأمل معي ... مرّ شهرين ونصف منذ الدخول المدرسي.... ماذا تنتظر!؟

يقول نابليون بونابرت:

"أحسن وسيلة للتغلب على الصعاب، اختراقها"

إنتهى ✓

تصحيح مقترح لاختبار الفصل الثاني
في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة ثانوي – شعبة علوم تجريبية — الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

التمرين الأول [03 نقاط]

[01ن] ❶ خطأ، لأنّ

$$\ln^2 x - \ln x^2 = 0 \Longrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x = 0$$
$$\Longrightarrow \ln x\,(\ln x - 2) = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \text{أو} \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ \ln x = 2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = e^2 \end{cases}$$

إذن $S = \{1; e^2\}$

[01ن] ❷ خطأ، لأنّ

لدينا:

$$y' + y\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Longrightarrow y' = -y\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\Longrightarrow y' = y\ln(2) - \ln(4)$$
$$\Longrightarrow y = ce^{x\ln 2} - \frac{-\ln 4}{\ln 2}$$
$$\Longrightarrow y = ce^{\ln 2^x} + \frac{2\ln 2}{\ln 2}$$
$$\Longrightarrow y = c2^x + 2$$

ولدينا:

$$f(2) = 6 \Longrightarrow c2^2 + 2 = 6$$
$$\Longrightarrow 4c = 4$$
$$\Longrightarrow c = 1$$

إذن: $f(x) = 2^x - 2$

[01ن] ❸ صحيح ، لأنّ:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x) - (-x)] = \lim_{x\to-\infty}[\ln(1 + e^{-x}) + x]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^{-x}(e^x + 1)\right) + x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[\ln(e^{-x}) + \ln(e^x + 1) + x]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[-x + \ln(e^x + 1) + x]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[\ln(e^x + 1)]$$
$$= \ln 1 = 0$$

إذن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = -x$ بجوار $-\infty$

التمرين الثاني [07 نقاط]

[01ن] ❶ حساب $f'(x)$ بدلالة a، b و c:

$$f'(x) = a\ln^2 x + b\ln x + c + x\left(2a\frac{1}{x}\ln x + \frac{b}{x}\right)$$
$$= a\ln^2 x + b\ln x + c + 2a\ln x + b$$
$$= a\ln^2 x + (2a+b)\ln x + b + c$$

[03ن] ❷ بقراءة بيانية تعيين $f'(\sqrt{e})$ ، $f(e)$ و $f'(e)$:

- $f'(\sqrt{e}) = 0$
- $f(e) = e$
- $f'(e) = \dfrac{e-0}{e-\frac{e}{2}} = \dfrac{e}{\frac{1}{2}e} = 2$

[03ن] ❸ تبيين أنّ: $f(x) = x(2\ln^2 x - 3\ln x + 2)$:

لدينا:

$$f'(\sqrt{e}) = 0 \Rightarrow f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$
$$\Rightarrow a\left(\ln e^{\frac{1}{2}}\right)^2 + (2a+b)\ln e^{\frac{1}{2}} + b + c = 0$$
$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2 + (2a+b)\frac{1}{2}\ln e + b + c = 0$$
$$\Rightarrow \frac{a}{4} + a + \frac{b}{2} + b + c = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{5a + 6b + 4c = 0} \ldots (01)$$

ولدينا:

$$f(e) = e \Rightarrow e(a\ln^2 e + b\ln e + c) = e$$
$$\Rightarrow \boxed{a + b + c = 1} \ldots (02)$$

ولدينا:

$$f'(e) = 2 \Rightarrow a(\ln e)^2 + (2a+b)\ln e + b + c = 2$$
$$\Rightarrow a + 2a + b + b + c = 2$$
$$\Rightarrow \boxed{3a + 2b + c = 2} \ldots (03)$$

إذن:

$$\begin{cases} 5a + 6b + 4c = 0 \ldots (01) \\ a + b + c = 1 \ldots (02) \\ 3a + 2b + c = 2 \ldots (03) \end{cases}$$

بطرح (03) من (02) نجد:

$$2a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2a \ldots (04)$$

نعوض قيمة (04) في كل من(01) و(02) نجد:

$$\begin{cases} 5a + 6(1-2a) + 4c = 0 \\ a + 1 - 2a + c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} 7a - 4c = 6 \ldots (05) \\ -7a + 7c = 0 \ldots (06) \end{cases}$$

بجمع (05) و(06) نجد:

$$3c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

نعوض قيمة c في (06) نجد: $-7a + 14 = 0$

إذن: $\boxed{a = 2}$

نعوض قيمة a في (04) نجد: $\boxed{b = -3}$

التمرين الثالث [10 نقاط]

(I)

[01ن] ❶ دراسة تغيرات الدالة g:

- النهايات:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$f'(x) = e^x + 1 > 0$

لدينا: $f'(x) > 0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

[0.5ن] ❷ تبيين أنّ $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

• لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-1.28; -1.27[$

• ولدينا: $g(-1.28) \times g(-1.27) < 0$

لأنّ $\begin{cases} g(-1.28) \approx -0.001 \\ g(-1.27) = 0.01 \end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α في المجال $]-1.28; -1.27[$

[0.5ن] ❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

[0.5ن] ❶ حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\underbrace{(x+2)}_{-\infty}\underbrace{(1-e^{-x})}_{-\infty}\right] = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\underbrace{(x+2)}_{+\infty}\underbrace{(1-e^{-x})}_{1}\right] = +\infty$

[0.75ن] ❷

أ/ تبيين أن: $f'(x) = g(x)e^{-x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - e^{-x} - (-e^{-x})(x+2) \\ &= 1 - e^{-x} + xe^{-x} + 2e^{-x} \\ &= 1 + e^{-x} + xe^{-x} \\ &= (e^x + 1 + x)e^{-x} \\ &= g(x)e^{-x} \end{aligned}$$

[0.75ن] ب/ استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f:

لدينا: $e^{-x} > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$ ↗		$+\infty$

[0.25ن] ❸ تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right) &= f'(\alpha) \\ &= g(\alpha)e^{-\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[0.25ن] التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة α معادلته $y = f(\alpha)$

❹

[0.5ن] أ/ تبيين أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f):

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x+2)] \\ &= \lim_{x\to+\infty}[(x+2)(1-e^{-x}) - (x+2)] \\ &= \lim_{x\to+\infty}[(x+2)(1-e^{-x}-1)] \\ &= \lim_{x\to+\infty}[-e^{-x}(x+2)] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{-xe^{-x}}_{0} - 2e^{-x}\right] \end{aligned}$$

[0.5ن] ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ):

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Longrightarrow -e^{-x}(x+2) = 0 \\ &\Longrightarrow -(x+2) = 0 \\ &\Longrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$+$		0		$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2;0)$		(C_f) تحت (Δ)

❺

[0.5ن] أ/ اثبات أنه يوجد مماس (C_f) يوازي (Δ):

يوجد مماس وحيد يوازي (Δ) معناه يوجد عدد حقيقي وحيد a يحقق: $f'(a) = 1$

$$\begin{aligned} f'(a) = 1 &\Longrightarrow e^{-a}(e^a + a + 1) = 1 \\ &\Longrightarrow e^a + a + 1 = e^a \\ &\Longrightarrow a + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

اذن يوجد مماس (T) وحيد لـ (C_f) يوازي (Δ) عند الفاصلة -1

[0.5ن] ب/ التحقق أن $y_{(T)} = x + 2 - e$:

$$y_{(T)} = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1)$$
$$= x + 1 + 1 - e$$
$$= x + 2 - e$$

❻

[0.5ن] أ/ تبيين أنّ $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$:

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$

إذن: $e^{\alpha} = -(\alpha + 1)$

ولدينا:

$$f(\alpha) = (\alpha+2)(1-e^{-\alpha})$$
$$= (\alpha+2)\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right)$$
$$= (\alpha+2)\left(1 - \frac{1}{-(\alpha+1)}\right)$$
$$= (\alpha+2)\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)$$
$$= \boxed{\frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}}$$

[0.25ن] - حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.28 < \alpha < -1.27$

ولدينا: $f(\alpha) = \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$

ومنه: $-1.97 < f(\alpha) < -1.85$

[0.5ن] ب/ ايجاد تقاطع (C_f) مع المحورين:

- مع حامل محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(1-e^{-x}) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ 1 - e^{-x} = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 0 \end{cases}$$

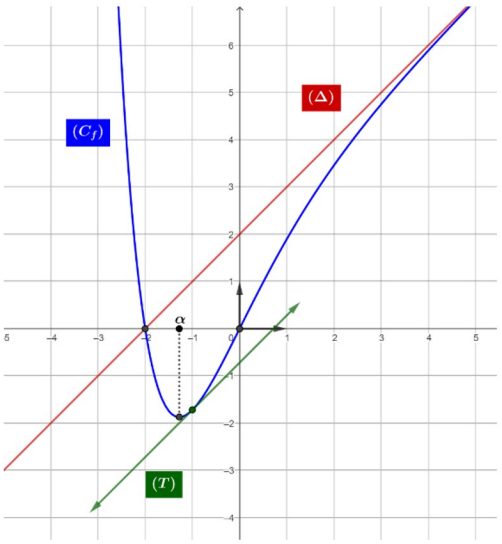
إذن: $(C_f) \cap (xx') = \{(-2;0);(0;0)\}$

- مع حامل محور التراتيب:

$f(0) = 0$

إذن: $(C_f) \cap (yy') = \{0\}$

[0.75ن] ج/ التمثيل البياني:



[0.5ن] ❼ المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x} \Rightarrow m - 2 = -e^{-x}(x+2)$$
$$\Rightarrow m = -e^{-x}(x+2) + 2$$
$$\Rightarrow m + x$$
$$= -e^{-x}(x+2) + 2 + x$$
$$\Rightarrow m + x$$
$$= (x+2)(1-e^{-x})$$
$$\Rightarrow m + x = f(x)..(E)$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = x + m$ وهي:

- لما $m < 2 - e$ (E) لا تقبل حلول
- لما $m = 2 - e$ (E) تقبل حل وحيد
- لما $2 - e < m < 2$ (E) تقبل حلين متمايزين
- لما $m \geq 2$ (E) تقبل حل وحيد

(III

[0.5ن] ❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

لدينا: $D_h = \mathbb{R}$ لأن $(-x) \in D_h$ ، ولدينا:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية

[0.5ن] ❶ شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) :

لدينا:

$$h(x) = f(|x|)$$
$$= \begin{cases} f(x) & ; \ x > 0 \\ f(-x) & ; \ x < 0 \end{cases}$$

لما $x > 0$ (C_h) ينطبق على (C_f)، وبما أنّ الدالة h زوجية، فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.