الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2022

شعبة: العلوم التجريبية — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي+ثانوية بوكميش الحواس اولاد سي سليمان

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = \ln(2) \\ u_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-u_n}\right) \end{cases}$.

1. أ) تحقق أن: $u_2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ و $u_3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n > 0$.

2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{-u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)^2$ ثم استنتج أن: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقارنة.

3. برهن بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. نعتبر الجداء P بحيث: $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times \ldots\ldots \times e^{u_{2021}}$.

✓ بين أن: $P = 2022$

التمرين الثاني: 04 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = 1443 - 2022x$.

✓ الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = 2x\ln(x)$.

✓ الدالة الأصلية للدالة h والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = x^2\ln(x)$.

3. المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$ متقاربة.

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

✓ الدالة g زوجية.

3as.ency-education.com

التمرين الثالث: 05 نقاط

يحتوي كيس على سبع كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء.

I. نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

1. احسب احتمال كل من الحادثتين A و B بحيث A: عدد الكريات البيضاء المسحوبة أكبر تماما من عدد الكريات الخضراء المسحوبة و B: الحصول على كريتين بالضبط من نفس اللون.

2. احسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج كلا من $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

II. نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.

1. عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

2. احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X، ثم استنتج $E(1743X - 1962)$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = 2e^{x-1} - x - 1$.

1. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α بحيث $-0,6 < \alpha < -0,5$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 2 + (x+2)e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{1-x} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = xe^{1-x}$، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها.

2. بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + \dfrac{2}{\alpha + 1}$، ثم اعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

4. أ) أنشئ كلا من (Δ)، (T) ثم مثل (C_f). نقبل أن $f(\beta) = 0$ بحيث $-1,63 < \beta < -1,61$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = 2(x-1) + m$ حلين مختلفين في الإشارة.

5. أ) بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x-3)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+2)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ: (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -2$ و $x = 1$.

انتهـــــــــى الموضوع الأول

3as.ency-education.com

الموضـــوع الثانـــي

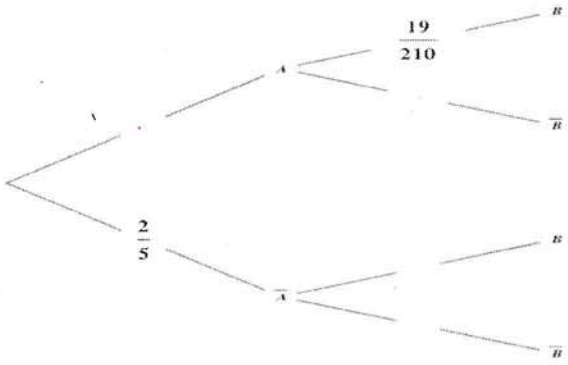
التمرين الأول: 5 نقاط

يحتوي وعاء U على 10 كريات منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1 ، 0 ، 1 و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1 ، 1 و يحتوي وعاء V على 9 كريات موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: $2,2,2,1,1$ و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $-3,2,3$ و كرية سوداء مرقمة بـ: -1 ، و يحتوي وعاء W على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء و كريتين صفراوين.

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كريات من أحد الوعاءين U أو V بالكيفية التالية:

نقوم بسحب كرية واحدة عشوائيا من الوعاء W، إذا تحصلنا على كرية بيضاء نسحب الكريات الأربعة من U و إذا تحصلنا على كرية صفراء نسحب الكريات الأربعة من V.

نسمي A الحدث: الحصول على كرية بيضاء، و نسمي B الحدث الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم.



1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب.
2. استنتج $P(B)$ ثم احسب $P_{\overline{B}}(A)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .
   - عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول: $u_0 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 1$.
2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

   ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln(u_n)$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.
2. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$.
3. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $D = [0; \ln 2]$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ ، $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ، وليكن

3as.ency-education.com

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

نضع $I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx$ و $J=\int_0^{\ln 2} g(x)dx$.

---

1. (ن) بين أنه من أجل $x\in D$: $\frac{1}{3}\le g(x)\le\frac{1}{2}$، ثم أعط حصرا للتكامل J.

2. (ن) أثبت أن $I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\ln 2$ و $x=0$.

3. (ن) أ) تحقق أنه من أجل $x\in D$: $f(x)=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$، ثم احسب التكامل I.

(ن) ب) استنتج قيمة التكامل J، ثم فسر النتيجة هندسيا.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$.

1. (ن 1,5) احسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2. (0,25) احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$..

II. الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x+\frac{2+\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. (0,5) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

(ن) ب) بين أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

(0,5) ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها.

2. ليكن (P) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln x$.

(0,5) أ. احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

(0,5) ب. ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (P).

(0,75) 3. أ) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث $0,17<\alpha<0,19$، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

(0,5) ب) ارسم (P) ثم ارسم (C_f).

(ن) 4. ادرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=[f(x)]^2$ دون تعيين عبارتها.

انتهـــــــى الموضـــــوع الثاني

3as.ency-education.com

التصحيح النموذجي لاختبار الثلاثي في مادة الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية

الإجابة

الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

لدينا $\begin{cases} u_1 = \ln 2 \\ u_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-u_n}\right) \end{cases}$

1) أ/ التحقق أن $u_2 = \ln\frac{3}{2}$ و $u_3 = \ln\frac{4}{3}$

لدينا: $u_2 = \ln\left(2 - e^{-u_1}\right) = \ln\left(2 - e^{-\ln 2}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2}$

$u_3 = \ln\left(2 - e^{-u_2}\right) = \ln\left(2 - e^{-\ln\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \ln\frac{4}{3}$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$

لدينا $u_1 = \ln\frac{3}{2}$ و $\ln\frac{3}{2} > 0$ ومنه $u_1 > 0$ أي الخاصية محققة

من أجل $n = 1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 1$: $u_n > 0$ ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_n > 0$ أي $-u_n < 0$ ومنه $e^{-u_n} < 1$ ومنه $-e^{-u_n} > -1$

ومنه $2 - e^{-u_n} > 1$ وعليه $\ln\left(2 - e^{-u_n}\right) > 0$

وبالتالي $u_{n+1} > 0$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: $u_n > 0$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.

ج/ f تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{-u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)^2$

لدينا $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{-u_n}\left(-\frac{2}{e^{-u_n}} + 1 + \frac{e^{u_n}}{e^{-u_n}}\right)$

ومنه: $= -e^{-u_n}\left(e^{2u_n} - 2e^{u_n} + 1\right)$

وبالتالي: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{-u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)^2$.

المستنتج أن: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$

بما أن $-e^{-u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)^2 < 0$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} < 0$

وبالتالي: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$

3as.ency-education.com

د) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

لدينا $2-e^{-u_n} < e^{u_n}$ وهذه $\ln(2-e^{-u_n}) < u_n$

وهذه $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي (u_n) متناقصة تماما.

استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما وهي مصدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

3) البرهان بالترجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $P(n)$: $u_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

لدينا $u_1 = \ln 2$ و $\ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \ln 2$ وهذه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 1$: $u_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ونبرهن أن $u_{n+1} \geq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

لدينا $u_{n+1} = \ln\left(2-e^{-u_n}\right) \geq \ln\left(2-e^{-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right)$

وهذه $u_{n+1} \geq \ln\left(2-\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right) = \ln\left(2-\frac{n}{n+1}\right)$

وهذه $u_{n+1} \geq \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

وهذه $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالترجع

$u_n \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

4) نعتبر الجداء P حيث $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times \cdots \times e^{u_{2021}}$

لتبيان أن : $P = 2022$

لدينا: $P = e^{\ln 2} \times e^{\ln\frac{3}{2}} \times e^{\ln\frac{4}{3}} \times \cdots \times e^{\ln\frac{2022}{2021}}$

وهذه: $P = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{2022}{2021} = 2022$

وبالتالي: $P = 2022$

3as.ency-education.com

حل التمرين الثاني:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدالة $x \mapsto e^{\ln(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ خطأ لأن:

الدالة $x \mapsto e^{\ln(x)}$ عبارة عن مركب دالتين متعاكستين في الرتبة أحداهما متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

2) خطأ لأن:

$$H(x) = \int_1^{2x} h(t)\,dt = \int_1^{2x} (2t \ln t)\,dt$$

نضع $u(t) = \ln t$ ، $v'(t) = 2t$ ومنه $u'(t) = \frac{1}{t}$ ، $v(t) = t^2$

ومنه:

$$H(x) = \left[t^2 \ln t\right]_1^x - \int_1^x t\,dt$$

ومنه:

$$H(x) = \left[t^2 \ln t\right]_1^x - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x =$$

وبالتالي:

$$H(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

3) صحيح لأن:

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{e^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n} \to 0}{\frac{e^n}{n} \to +\infty} = 0$$

4) خطأ لأن: من أجل $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$g(-x) = -x - \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

و

$$g(-x) = -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

ومنه:

$$= -\left(x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

ومنه $g(-x) = -g(x)$ وعليه الدالة g فردية وليست زوجية.

3as.ency-education.com

حل التمرين الثالث:

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس:

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$.

$$P(A)=\frac{C_4^2\times C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\frac{18+4}{35}=\frac{22}{35}$$

$$P(B)=\frac{C_4^2\times C_3^1+C_4^1\times C_3^2}{C_7^3}=\frac{18+12}{35}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$$

2) حساب $P(A\cap B)$:

$$P(A\cap B)=\frac{C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$$

استنتاج كل من $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{22}{35}+\frac{30}{35}-\frac{18}{35}=\frac{34}{35}$$

II)

1) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

لدينا: $X\in\{1;2;3;4\}$ ومنه:

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$P(X=1)=\frac{A_4^3}{A_7^3}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}\quad,\quad P(X=2)=\frac{3A_4^2\times A_3^1}{210}=\frac{108}{210}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{3A_4^1\times A_3^2}{210}=\frac{72}{210}=\frac{12}{35}\quad,\quad P(X=4)=\frac{A_3^3}{210}=\frac{6}{210}=\frac{1}{35}$$

حساب $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}p_i x_i=\frac{4+36+36+4}{35}=\frac{80}{35}=\frac{16}{7}$$

استنتاج $E(1743X-1962)$:

$$E(1743X-1962)=1743\times E(X)-1962=1743\times\frac{16}{7}-1962$$

ومنه:

$$E(1743X-1962)=2022$$

3as.ency-education.com

حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x) = 2e^{x-1} - x - 1$

1) حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2e^{x-1} - x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x}\left(2e^{-1} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2e^{x-1} - 1$

ومنه $g'(x) = 0$ تكافئ $2e^{x-1} - 1 = 0$ أي $x = 1 - \ln 2$

وعليه إشارة $g'(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		$1-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty, 1-\ln 2]$ ومتزايدة على المجال $[1-\ln 2; +\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	α		$1-\ln 2$		1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$	0	$+$		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|$	$\ln(2)-1$	$\nearrow$	$\|$	$+\infty$

$$g(1-\ln 2) = 2e^{-\ln 2} \cdot 1 + \ln 2 - 1 = 1 - 1 + \ln 2 - 1 = \ln(2) - 1$$

2) أ) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,5$

لدينا $g(1) = 0$ ... ①

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty, 1-\ln 2]$ وبالأخص على المجال $]-0,6; -0,5[$ و $g(-0,6) \times g(-0,5) < 0$

3as.ency-education.com

لأن : $g(-0,6) \times 0,004$ و $g(-0,5) \times -0,05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$-0,6 < \alpha < -0,5 \quad \text{---} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,5$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) لدينا $f(x)=2x-2+(x+2)e^{1-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

1) أ) تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x-2+e\,\frac{x}{e^x}+2e^{1-x} = +\infty$$

($x\to+\infty$: $2x-2\to+\infty$, $\frac{x}{e^x}\to 0$, $2e^{1-x}\to 0$)

حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x-2+(x+2)e^{1-x} = -\infty$$

($x\to-\infty$: $2x-2\to-\infty$, $(x+2)e^{1-x}\to+\infty$)

ب) تبيان أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{1-x}g(x)$

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=2+e^{1-x}-(x+2)e^{1-x}$$

ومنه

$$f'(x)=e^{1-x}\left(2e^{x-1}-x-2+1\right)$$

ومنه

$$f'(x)=e^{1-x}\left(2e^{x-1}-x-1\right)=e^{1-x}g(x)$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	3	↗	$+\infty$

$f(1)=2-2+3\cdot e^0=3$

3as.ency-education.com

ج) تبيان أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = xe^{1-x}$

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$:

$f''(x) = -e^{1-x} g(x) + g'(x) e^{1-x}$

$= e^{1-x}\left(g'(x) - g(x)\right) = e^{1-x}\left(2e^{x-1} - 1 - 2e^{x-1} + x + 1\right)$

وبالتالي : $f''(x) = xe^{1-x}$

استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها :

لدينا $f''(x) = 0$ تكافئ $x = 0$ وعليه لاشارة $f''(x)$ نلخص في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن $f''(x)$ انعدم من أجل $x = 0$ وغير اشارته فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $A(0, f(0))$ أي $A(0, 2e-2)$.

ج) تبيان أن $f(a) = 2a + \frac{2}{a+1}$

لدينا $f(a) = 2a - 2 + (a+2)e^{1-a}$ وحسب الجزء الأول $g(a) = 0$

أي $e^{1-a} = \frac{1}{2}(a+1)$ ومنه : $\frac{1}{e^{1-a}} = \frac{a+1}{2}$

وعليه $e^{1-a} = \frac{2}{a+1}$

ومنه $f(a) = 2a - 2 + \frac{2a+2}{a+1}$

ومنه $f(a) = 2a - 2 + \frac{2(a+1)}{a+1} + \frac{2}{a+1}$.

وبالتالي : $f(a) = 2a + \frac{2}{a+1}$

اعطاء حصر لـ $f(a)$:

لدينا $-0,6 < a < -0,5$ ومنه $-1,2 < 2a < -1$ ... ①

ومنه $0,4 < a+1 < 0,5$ ومنه $2 < \frac{1}{a+1} < 2,5$

ومنه $4 < \frac{2}{a+1} < 5$ ... ②

بجمع ① و ② طرفا لطرف نجد : $2,8 < f(a) < 4$

3as.ency-education.com

3) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=2x-2$ مقارب مائل لـ (Cf) عند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ex}{e^x}+2e^{1-x}=0$

وهذا المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (Cf) في جوار $+\infty$.

- إشارة الوضع النسبي لـ (Cf) و (Δ) :

لدينا $f(x)-(2x-2)>0$ تكافئ $x<-2$ وهذا الوضع النسبي يكون كالتالي :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(Cf) أسفل (Δ)		(Cf) يقطع (Δ)		(Cf) أعلى (Δ)

ب) تبيان أن (Cf) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له

لدينا $f'(x)=2$ تكافئ $e^{1-x}g(x)=2$ أي $g(x)=2e^{x-1}$

وهذا $2e^{x-1}-x-1=2$ أي $x-1=0$ وعليه $x=1$

وهذا (Cf) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$

أي $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي $y=2x+2+e^2-4$

أي $y=2x+e^2-2$ معادلة لـ (T)

4) إنشاء (Δ) و (T) ثم تمثيل (Cf) .

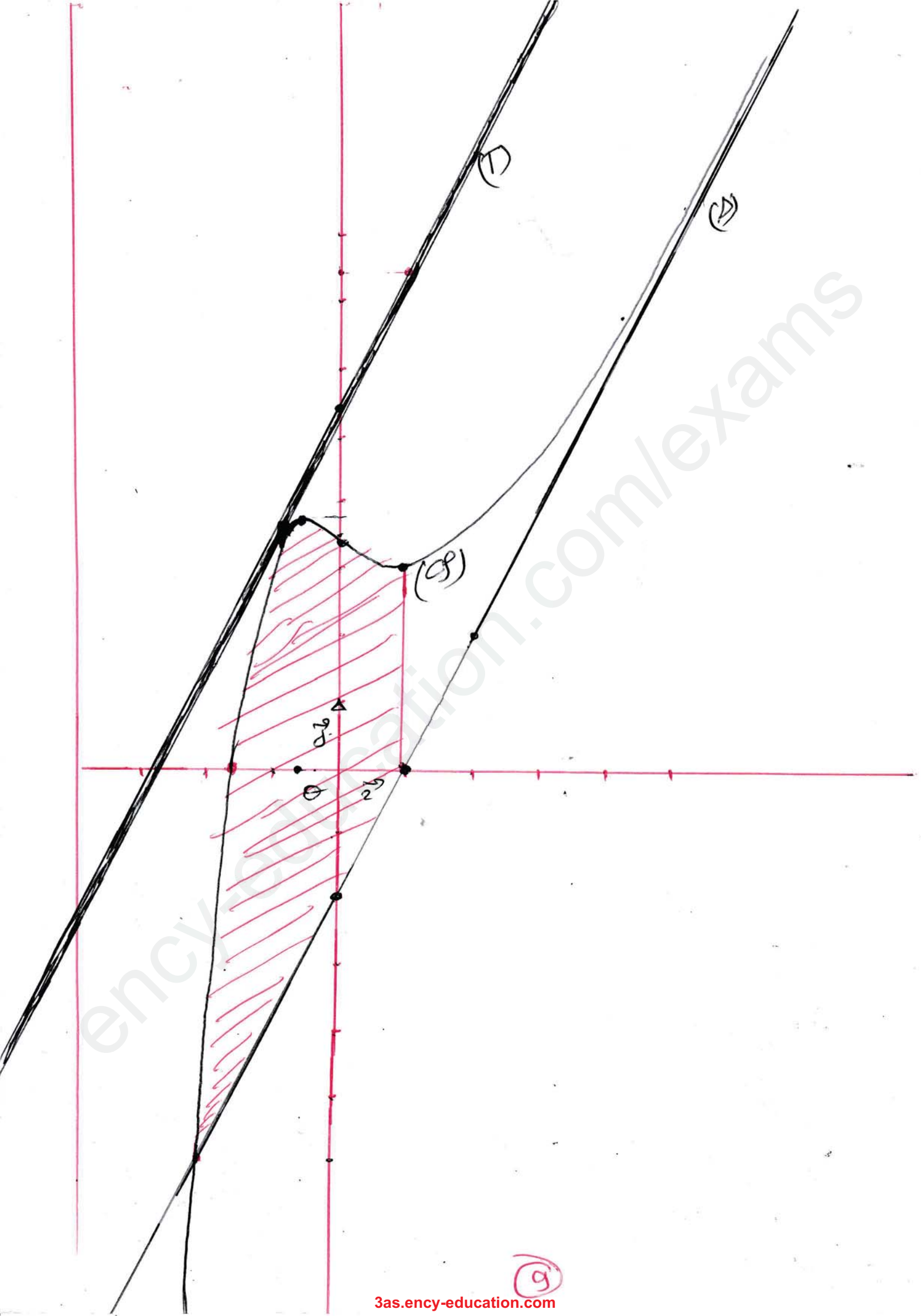
(Δ) : $y=2x-2$

x	0	1
y	-2	0

(T) $y=2x+e^2-2$

x	0	1
y	e^2-2	e^2

3as.ency-education.com



ency-education.com/exams

3as.ency-education.com

ب) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m الذي من أجلها المعادلة $f(x)=2(x-1)+m$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة:

لدينا $f(x)=2(x-1)+m$ تكافئ $f(x)=2x+m-2$

وعليه من أجل $m-2\in]-2,2e-2[$ أي $m\in]0,2e[$

فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

f(5) تبيان أن الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+2)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.

$$H(x)=(-x-3)e^{1-x}$$

لدينا

$$H'(x)=-e^{1-x}-e^{1-x}(-x-3) \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$$

ومنه من أجل

$$H'(x)=(x+2)e^{1-x}$$

ومنه

وعليه H أصلية للدالة $x\mapsto(x+2)e^{1-x}$.

ب) استنتاج المساحة A:

$$A=\int_{-2}^{1}(x+2)e^{1-x}dx=\Big[H(x)\Big]_{-2}^{1}=H(1)-H(-2)$$

ومنه:

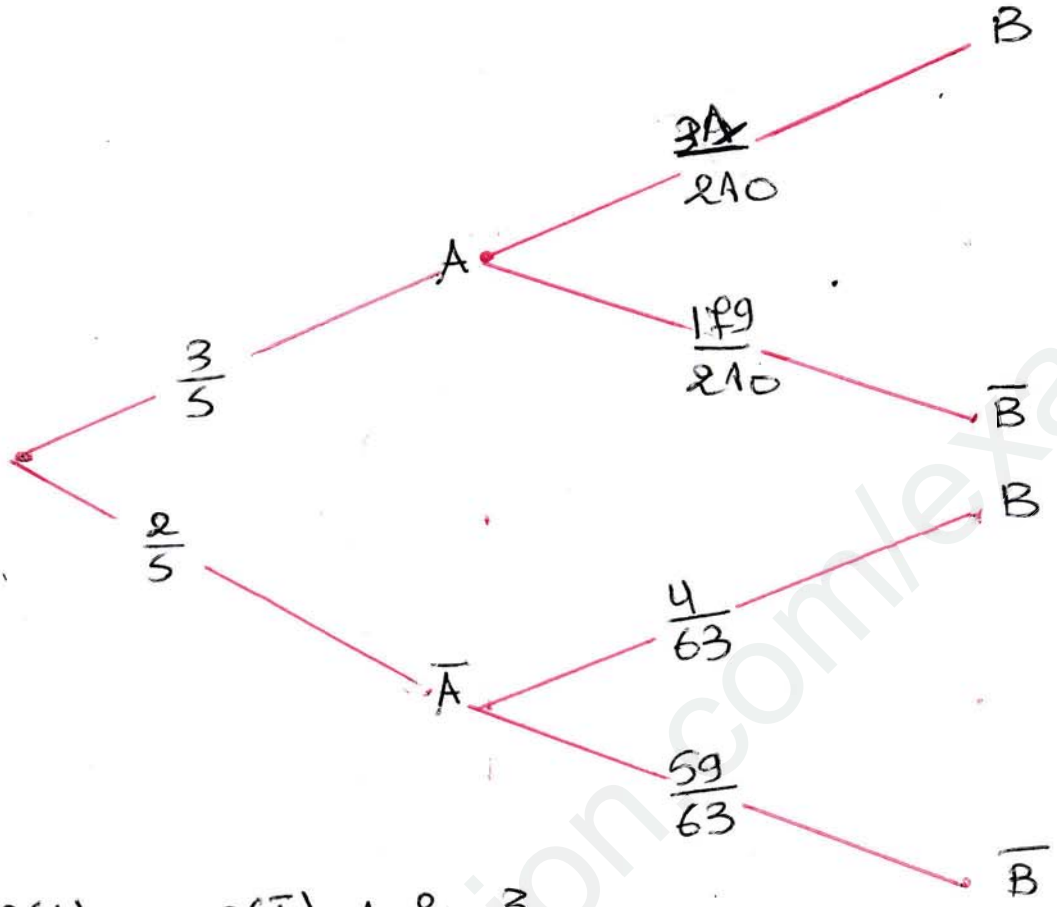
$$A=-4+e^3=e^3-4$$

3as.ency-education.com

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:

1) نقل و اكمال شجرة الاحتمالات ~ حدد تركيب قانونية الحساب.



$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{31}{210} = \frac{179}{210}$

$P_{\bar{A}}(B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_9^4} = \frac{276}{126} = \frac{8}{126} = \frac{4}{63}$

$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - \frac{4}{63} = \frac{59}{63}$

2) استنتاج $P(B)$:

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{31}{210} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{63} = \frac{31}{5 \times 70} + \frac{8}{5 \times 63}$

$= \frac{1953 + 560}{5 \times 70 \times 63} = \frac{2513}{22050} = \frac{359}{3150}$

3as.ency-education.com

حل التمرين الثاني

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n} \\ u_0 = e^{-1} \end{cases}$$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

1) البرهان بالترجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$ $P(n)$

لدينا $P(0)$ محققة لأن $0 < u_0 < 1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 0$: $0 < u_n < 1$ ونبرهن أن $0 < u_{n+1} < 1$

لدينا $0 < u_n < 1$ ومنه $0 < \sqrt{u_n} < 1$ ومنه

$0 < u_n\sqrt{u_n} < 1$ وعليه $P(n+1)$ محققة

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالترجع فإن $0 < u_n < 1$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.

2) إثبات أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n\sqrt{u_n}}{u_n} = \sqrt{u_n}$ ولما أن $0 < u_n < 1$ فإن $0 < \sqrt{u_n} < 1$

وعليه $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لما أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فإن $u_{n+1} < u_n$ لأن $u_n > 0$ ومنه

المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

لما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لما أن (u_n) متقاربة فإنها تقبل نهاية منتهية ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$ حيث

f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ $f(x) = x\sqrt{x}$ فإن $x \in [0;1]$

لدينا $f(\ell) = \ell$ تكافئ $\ell\sqrt{\ell} = \ell$ تكافئ $\ell^3 = \ell^2$

أي $\ell^3 - \ell^2 = 0$ ومنه $\ell^2(\ell - 1) = 0$ أي $\ell = 0$ أو $\ell = 1$

ولما أن (u_n) متناقصة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3as.ency-education.com

II) لدينا $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln u_n$

1) تبيان أن (v_n) حسابية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول:

لدينا: $v_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \ln u_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} \times \ln u_n^{\frac{3}{2}}$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \ln u_n^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \ln u_n$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ وبالتالي (v_n) حسابية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول:

$v_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \ln e^{-1} = -1$

2) كتابة v_n بدلالة n:

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

لدينا $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln u_n$ ومنه $\ln u_n = \frac{v_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ومنه $u_n = e^{\frac{v_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$

ومنه $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$ ومنه $u_n = e^{\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$ ومنه $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \cdots + \ln u_n$

لدينا نضع من أجل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \ln u_n$

لدينا (w_n) حسابية هندسية أساسها $q' = \frac{3}{2}$ وحدها الأول $w_0 = -1$

وعليه: $S_n = w_0 \left(\frac{1 - (q')^{n+1}}{1 - q'}\right) = -\left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}}\right)$

ومنه $S_n = -\left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right) = 2\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$

3as.ency-education.com

حل التمرين الثاني:

لدينا $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$ ، $g(x)=\frac{1}{e^x+1}$ حيث $D_f=D_g=D=[0;\ln 2]$

1) تبيان أنه من أجل $x\in D$: $\frac{1}{3}\leq g(x)\leq\frac{1}{2}$

لدينا $x\in D$ معناه $0\leq x\leq\ln 2$ ومنه $1\leq e^x\leq 2$ ومنه $2\leq e^x+1\leq 3$

ومنه $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}$ وبالتالي من أجل $x\in D$

فإن: $\frac{1}{3}\leq g(x)\leq\frac{1}{2}$

اعطاء حصر للتكامل J:

لدينا من أجل $\frac{1}{3}\leq g(x)\leq\frac{1}{2}$ ، $x\in D$ ومنه $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{3}dx\leq J\leq\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}dx$

ومنه $\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{\ln 2}\leq J\leq\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\ln 2}$ وعليه

وبالتالي $\frac{1}{3}\ln 2\leq J\leq\frac{1}{2}\ln 2$ ومنه $\ln\sqrt[3]{2}\leq J\leq\ln\sqrt{2}$

2) اثبات أن: $I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$:

لدينا: $I-J=\int_0^{\ln 2}f(x)dx-\int_0^{\ln 2}g(x)dx=\int_0^{\ln 2}(f(x)-g(x))dx$

ومنه $I-J=\int_0^{\ln 2}\left[\frac{e^{2x}}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}\right]dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

ومنه $I-J=\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^x+1)}dx=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$

استنتاج A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) المستقيمين $x=0$ و $x=\ln 2$:

لدينا من أجل $x\in D$ ومنه $f(x)-g(x)\geq 0$

$A=I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 2}$

ومنه $A=2-\ln 2-1=(1-\ln 2)u.a$

3as.ency-education.com

3) أ/ التحقق أنه من أجل كل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x+1}$

لدينا $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1)}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

ومنه من أجل كل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x+1}$

حساب التكامل I :

$$I = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = \left[e^x - \ln(e^x+1)\right]_0^{\ln 2}$$ لدينا

ومنه $I = 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2 = 1 + \ln 2 - \ln 3$

وبالتالي $I = 1 + \ln\frac{2}{3}$

ب) استنتاج قيمة التكامل J :

لدينا $I - J = 1 + \ln 2$ ومنه $J = I - 1 + \ln 2$

ومنه $J = 1 + \ln\frac{2}{3} - 1 + \ln 2$

وبالتالي : $J = \ln\frac{2}{3} + \ln 2 = \ln\frac{4}{3}$

تفسير النتيجة هندسياً :

لما أنه من أجل كل $x \in D$ فإن $g(x) > 0$ و $J = \ln\frac{4}{3}$

فإن مساحة الحيز المحدد بـ (C) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \ln 2$ هي $\ln\frac{4}{3}$ u.a

3as.ency-education.com

حل التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x) = x - 1 - \ln x$ حيث $D_g =]0, +\infty[$

1) حساب $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x - 1 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من أجل $x > 0$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

وهذه $g'(x)$ تكافئ $x = 1$ مع $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

وهذه الدالة g متناقصة على المجال $]0,1]$ ومتزايدة على المجال $[1,+\infty[$

لتكملة الجدول نحسب نهايات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$ ‖	↘	0	↗	$+\infty$

2) حساب $g(1)$:

$$g(1) = 0$$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$+$	

II) لدينا $f(x) = \ln x + \frac{2 + \ln x}{x}$ حيث $D_f =]0, +\infty[$

1) أ) حساب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x + \frac{2 + \ln x}{x} = -\infty$$

3as.ency-education.com

ب) بيان أنه من أجل $x>0$; $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

لدينا من أجل $x>0$:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1-2-\ln x}{x^2}=\frac{x-1-\ln x}{x^2}$$

وبالتالي :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

ج) استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها :

لما أن $g(x)$ انعدمت من أجل $x=1$ ولم تغير اشارتها فإن النقطة ذات الاحداثيات $(1,2)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

د) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}=0+0$$

تفسير النتيجة هندسيا :

نقول أن (C_f) و (P) متقاربان في جوار $+\infty$.

ه) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (P) :

لدينا $f(x)-\ln x=\frac{2+\ln x}{x}$ ومنه $f(x)-\ln x=0$ معناه $x=e^{-2}$ حيث $x>0$

وعليه الوضع النسبي نلخصه في جدول التالي :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖ (C_f) أسفل (P)		(C_f) يقطع (P)		(C_f) أعلى (P)

ency-education.com/exams
3as.ency-education.com

ج) 4/ تبيان أن (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,17 < \alpha < 0,19$

لدينا الدالة g مستمرة وتزايدية على المجال $]0,17 ; 0,19[$ و $g(0,17) \times g(0,19) < 0$

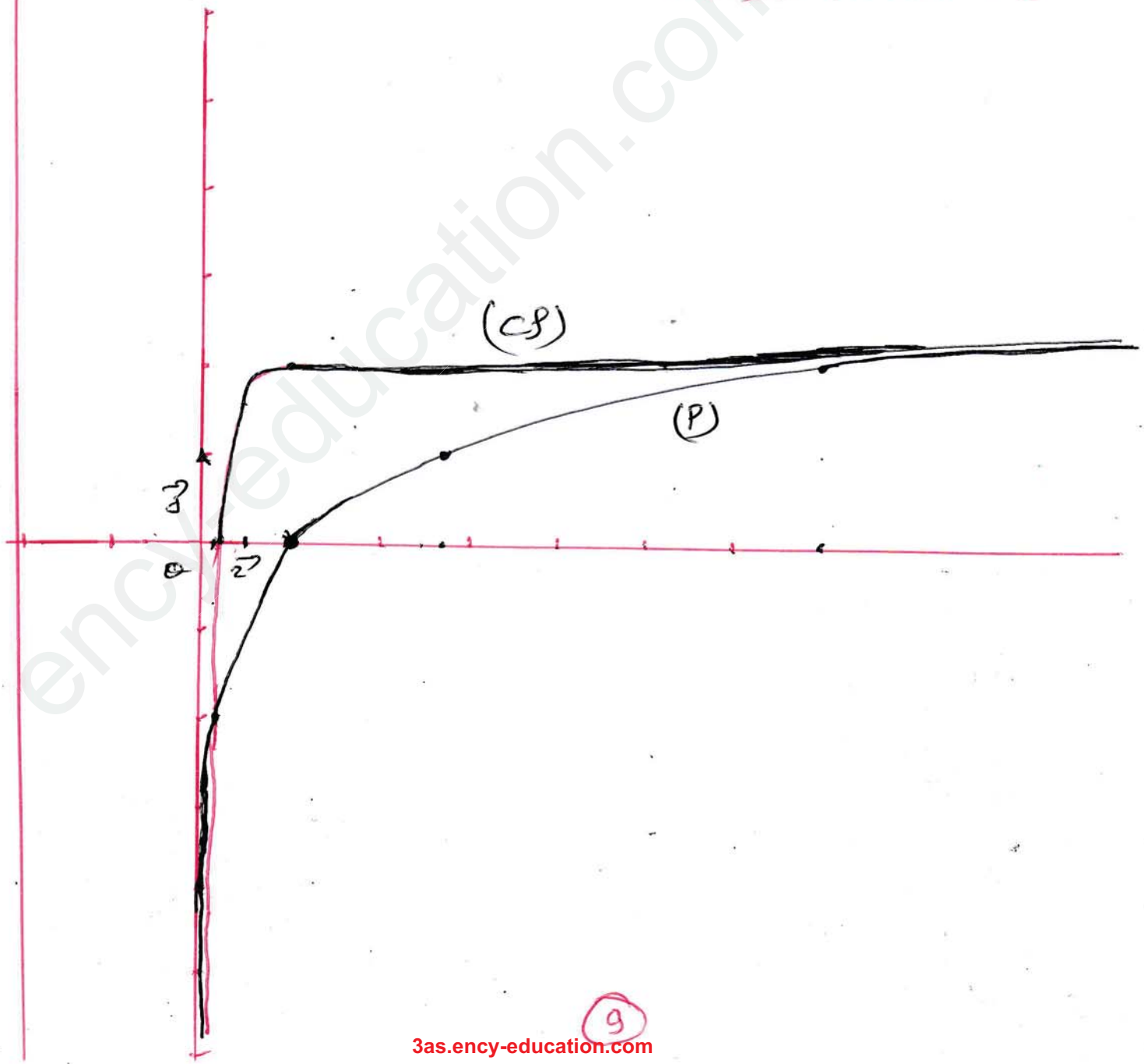
لأن $g(0,17) < 0$ و $g(0,19) > 0$ وحسب حل المعادلة

الحل الوحيد للمعادلة فإن (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,17 < \alpha < 0,19$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب) رسم (P) ثم رسم (C_g):



ency-education.com/exams

3as.ency-education.com

4) دراسة اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$h(x)=[f(x)]^2$

$h'(x)=2f'(x)f(x)$ لدينا من أجل $x>0$:

ومنه إشارة $h'(x)$ تكون كالتالي:

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+		+	
$f(x)$	‖	−	0	+		+	
$h'(x)$	‖	−	0	+	0	+	

ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0,\alpha]$

ومتزايدة على المجال $[\alpha,+\infty[$.

ency-education.com/exams

3as.ency-education.com