المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) دورة: ماي 2022

الشعبة: علوم تجريبية إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1- الشكل الجبري للعدد المركب $\left[\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right]^{2022}$ هو: **أ)** 1 **ب)** -1 **ج)** $-i$.

2- الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$ هو: **أ)** $3e^{-i\frac{\pi}{12}}$ **ب)** $3e^{i\frac{\pi}{12}}$ **ج)** $3e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

3- الشكل المثلثي لـ $\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right]^2$ هو: **أ)** $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ **ب)** $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ **ج)** $2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$.

4- مجموعة حلول المعادلة $z^2-z.\bar{z}+2=0$ في $\mathbb{C}$ هي: **أ)** $S=\{-i;i\}$ **ب)** $S=\{-1;1\}$ **ج)** $S=\{i\}$.

5- مجموعة النقط M لاحقتها z التي تحقّق $|z+i|=1$ هي: **أ)** مستقيم **ب)** قطعة مستقيمة **ج)** دائرة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 9 كريات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 9، و6 كريات سوداء مرقّمة من 1 إلى 6، لا نفرق بين الكريات باللمس.

I- نسحب من هذا الكيس وبطريقة عشوائية أربع كريات في آن واحد.

1- احسب p_1 احتمال سحب أربع كريات تحمل كل واحدة منها رقما زوجيا.

2- احسب p_2 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما فرديا.

3- احسب p_3 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما زوجية أو أربع كريات تحمل أرقاما فردية.

4- احسب p_4 احتمال سحب أربع كريات تحمل أرقاما فردية ومن لونين مختلفين.

5- احسب p_5 احتمال سحب كرية واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيا أو كل الكريات من نفس اللون.

6- احسب p_6 احتمال سحب كريتين فقط تحمل كل منهما رقما فرديا إذا علمت أنّهما من نفس اللون.

7- ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الكيس.

أ) برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي هي: 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X. ثم بيّن أنّ $E(X)=\frac{22}{5}$، واحسب $p(X^2-3X\leq 0)$.

II- نسحب الآن كرية من الكيس، إذا كان ترقيمها من مضاعفات 3 نرجعها إلى الكيس ونسحب كرية ثانية، وإذا كانت غير ذلك نضعها جانبا ونسحب كرية ثانية من الكيس. الحدث A_1: سحب الكرية الأولى التي ترقيمها من مضاعفات 3، والحدث A_2: سحب الكرية الثانية التي ترقيمها من مضاعفات 3. أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم احسب $p(A_2)$ احتمال أن يكون في السحب الثاني كرية ترقيمها من مضاعفات 3.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 4}$.

1- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $u_n > 0$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}u_n$ ، وأنّ $u_n \leq 8\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{9}{8}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - 1}$. احسب مرّة أخرى نهاية u_n.

4- لتكن (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 1 + \dfrac{a}{u_n}$.

أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{4}{3}$.

ب) نضع $a = 1$، احسب بدلالة n: $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$ و $S'_n = v_0 + 3v_1 + \ldots + 3^n v_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f و g الدالتان المعرّفتان على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3x^2 - 6x(1-e^{-x})$ و $g(x) = 3x^2 - 6x$.

وليكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ تمثيلهما البياني على الترتيب في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- أ) بيّن أنّ $f'(x) = 6(x-1)(1-e^{-x})$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$ على $[-1;+\infty[$.

ب) شكّل جدول تغيرات كل من f و g على المجال $[-1;+\infty[$.

3- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[1;+\infty[$. تحقّق أنّ $1 < \alpha < 2$ ، ثم أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

4- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)]$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$، ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

5- بيّن أنّ معادلة المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $x_0 = \alpha$ هي $y = 3\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)$.

6- أ) عيّن العددين الحقيقيين a وb ، بحيث تكون الدالة $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ أصلية الدالة $x \mapsto xe^{-x}$.

ب) نضع $I_\alpha = \int_0^\alpha [f(x) - g(x)]dx$. بيّن أنّ $I_\alpha = 3\alpha(\alpha-1)$ ، ثم أعط تفسيرا بيانيا للعدد I_α .

7- h الدالة العددية المعرّفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $\begin{cases} h(x) = f(x) & -1 \leq x \leq 0 \\ h(x) = g(x) & x > 0 \end{cases}$ و $(\mathscr{H})$ تمثيلهما البياني.

أ) بيّن أنّ h غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$. ماذا تمثل النقطة O بالنسبة لـ$(\mathscr{H})$؟

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة h على $[-1;+\infty[$.

جـ) ارسم نصفي المماسين لـ$(\mathscr{H})$ عند $x_0 = 0$ ، والمنحني $(\mathscr{H})$ في معلم آخر.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

	السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1	المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x}{e^x+1}$، يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته:	$y=x-1$	$y=x+1$	$y=x$
2	الدالة الأصلية للدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)}$. والتي تنعدم عند $\frac{1}{e}$ هي:	$\frac{(\ln x+2)^2}{2}$	$\ln(\ln x+2)+1$	$\ln(\ln x+2)$
3	المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$ بالعبارة: $v_n=n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$، هي متتالية:	متزايدة تماما ومتباعدة	متناقصة تماما ومتباعدة	متزايدة تماما ومتقاربة
4	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرّفة بـ: $u_n=\int_n^{n+1}e^{2x}dx$. نضع $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$، عبارة S_n هي:	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-1\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}-e^{2n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(e^{2n+2}+1\right)$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x}-2x+3)-x]$ تساوي:	$-\infty$	$+\infty$	0
6	حلّ المعادلة التفاضلية $y'+y=(2x+1)e^{-x}$، الذي يحقّق $y(-1)=0$ هو:	$(x^2-1)e^{-x}$	$(x^2+x+1)e^{-x}$	$(x^2+x)e^{-x}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا ثلاثة أقفاص، في كل قفص عشرة طيور. القفص C_1 يحتوي على 6 من طائر الحسون (A) و4 من الكناري (B)، القفص C_2 يحتوي على 5 من طائر الحسون (A) و5 من الكناري (B)، القفص C_3 يحتوي على 7 من طائر الحسون (A) و3 من الكناري (B).

نرمي زهرة نرد مكعبة ومتوازنة لها ستة أوجه مرقّمة من 1 إلى 6. إذا ظهر الوجه الذي يحمل الرقم 3 نسحب طائرا واحدا من القفص C_1، وإذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما زوجيا نسحب طائرا واحدا من القفص C_2، وإذا ظهر غير ذلك نسحب طائرا واحدا من القفص C_3.

1- أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم بيّن أنّ احتمال سحب طائر الحسون $P(A)=\frac{7}{12}$.

2- إذا سحبنا طائر الحسون، ما احتمال أن يكون من القفص C_1؟

3- نضيف إلى القفص C_2، n طيرا من طائر الحسون (A) ثم نكرّر عملية السحب السابقة.

أ) بيّن أنّ احتمال سحب الكناري $P(B)=\frac{n+25}{6(n+10)}$، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث $P(B)>\frac{1}{4}$.

ب) عيّن قيمة n حتى تكون الحادثتان: السحب من C_2 وسحب الكناري (B) مستقلتين.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$.

1- عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نفرض في باقي التمرين أنّ المتتالية (u_n) غير ثابتة وأنّ $\alpha=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

2- أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $\sqrt{2}<u_n<2$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما. استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(u_n-\sqrt{2})$.

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها وحدها الأول.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n. تأكّد من النهاية المحصل عليها في **2- ب)**.

ج) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}$ ، $S_n=\frac{v_0}{2^0}+\frac{v_1}{2^1}+\frac{v_2}{2^2}+\ldots+\frac{v_n}{2^n}$. بيّن أنّ: $S_n=(-n-1)\ln 2$.

د) نضع من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}^*$ ، $S'_n=\frac{1}{v_0\times v_2}+\frac{1}{v_1\times v_3}+\ldots+\frac{1}{v_{n-1}\times v_{n+1}}$. احسب S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-e+e\ln x$

1- احسب $g'(x)$ ، ثم بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,54<\alpha<1,55$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(\frac{x-e}{x}\right)\ln x$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستو المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أثبت أنّه من أجل كل $x>0$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2- احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (أعط تفسيرا بيانيا) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$. ماذا يمكن قوله عن المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $\ln$ ؟

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\mathscr{C}')$، وكذلك وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور الفواصل.

4- أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=2-\left(\frac{\alpha}{e}+\frac{e}{\alpha}\right)$. باستخدام حصر العدد α، بيّن أنّ $-0,34<f(\alpha)<-0,32$.

ب) احسب $f(4)$ و $f(6)$ ثم ارسم $(\mathscr{C})$ و$(\mathscr{C}')$. $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$.

ج) باستعمال المنحني $(\mathscr{C})$ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين، كل منهما أكبر تماما من 1.

5- M_0 نقطة من $(\mathscr{C})$ فاصلتها x_0 و (T_{x_0}) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة M_0. بيّن أنّ (T_{x_0}) يشمل النقطة $A\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$ إذا تحقّق: $(x_0-2e)(-1+2\ln x_0)=0$. استنتج عدد المماسات لـ$(\mathscr{C})$ التي تشمل A.

6- λ عدد حقيقي أكبر من 1. احسب بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ لمجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $1\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le\ln x$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}$. (ضع $t=\ln\lambda$ وتذكّر أنّ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$)

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2022م

الموضوع الأول

تمرين 1:

1) الإجابة الصحيحة هي ب) لأن:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2022} = \left[e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right]^{2022} = e^{i\left(-\frac{2022\pi}{6}\right)} = e^{i(-\pi)} = -1$$

2) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$\frac{6e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{6}{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 3e^{i\frac{23\pi}{12}} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$$

3) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

4) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$(x+iy)^2 - (x+iy)(x-iy) + 2 = 0$$

$$\begin{cases} -2y^2+2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \leftarrow (-2y^2+2+2ixy=0)$$

نجد: $x=0$ و $y=1$ أو $y=-1$

ومنه: $S=\{-i;i\}$

5) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$|x+iy+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 1$$

(C) دائرة مركزها $\Omega(0,-1)$ و $r=1$، $x^2+(y+1)^2=1$

تمرين 2:

I-1) $P_1 = \frac{C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{39}$

2) $P_2 = 1 - P_1 = \frac{38}{39}$

3) $P_3 = \frac{C_8^4 + C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{13}$

4) $P_4 = \frac{C_5^1 \times C_3^3 + C_5^2 \times C_3^2 + C_5^3 \times C_3^1}{C_{15}^4} = \frac{1}{21}$

5) (الحادثة العكسية) $P_5 = 1 - P_4 = \frac{20}{21}$

6) $P_6 = \frac{C_5^2 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_3^2}{C_9^4 + C_6^4} = \frac{23}{47}$

7) $P(X=2) = \frac{C_6^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{91}$; $P(X=3) = \frac{C_9^1 \cdot C_6^3}{C_{15}^4} = \frac{12}{91}$

$P(X=4) = \frac{C_9^2 \times C_6^2}{C_{15}^4} = \frac{36}{91}$; $P(X=5) = \frac{C_9^3 \cdot C_6^1}{C_{15}^4} = \frac{24}{65}$

$P(X=6) = \frac{C_9^4}{C_{15}^4} = \frac{6}{65}$

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{91}$	$\frac{12}{91}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{24}{65}$	$\frac{6}{65}$

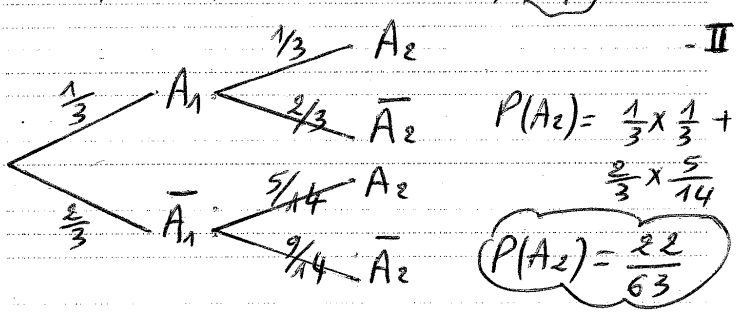
$E(X) = \frac{2}{91} + \frac{36}{91} + \frac{144}{91} + \frac{120}{65} + \frac{36}{65} = \frac{22}{5}$

$P(X^2-3X \le 0) = P(0 \le X \le 3) = P(X=2) + P(X=3)$

	0		3	
X^2-3X	+	0	−	0	+

$P(X^2-3X \le 0) = \frac{1}{7}$

II-



$P(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{14}$

$P(A_2) = \frac{22}{63}$

تمرين 3:

1) $u_0 = 8$ ، $n=0$: (محققة) ، $8>0$

نفرض أن $u_n > 0$ و نبرهن أن $u_{n+1} > 0$.

لدينا: $u_n > 0$: $3u_n > 0$ و $u_n + 4 > 0$ ومنه $\frac{3u_n}{u_n+4} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ، $u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$

ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n+4} - u_n = \frac{-u_n(u_n+1)}{u_n+4} < 0$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

2) (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = \frac{3u_n}{u_n+4} - \frac{3}{4}u_n = \frac{-3u_n^2}{4(u_n+4)} < 0$

$n=0$: $u_0 \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^0$ (محققة) ؛ $u_n \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$

نفرض أن $u_n \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و نبرهن أن $u_{n+1} \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

نجد: $\left(\frac{3}{4}\right) \times u_n \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)$ ، $\frac{3}{4}u_n \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

ولدينا: $u_{n+1} \le \frac{3}{4}u_n$ ومنه $u_{n+1} \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$0 < u_n \le 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، $\lim_{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{+\infty} u_n = 0$

(مبرهنة الحصر)

3) $u_0 = \frac{1}{\frac{9}{8}-1} = 8$: $n=0$ (محققة)

نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$: $u_n = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+4} = \frac{\frac{3}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}}{\frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1} + 4} = \frac{3}{4 \cdot \frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 3}$$

$$= \frac{3}{3\left(\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)} = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}$ ومنه

$\lim_{+\infty} u_n = 0$ ($\frac{4}{3} > 1$)

4) $V_n = 1 + a\left(\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = 1 - a + a\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

حتى تكون (V_n) هندسية: $1-a=0$ ومنه $a=1$

ب) $\frac{1}{u_n} = V_n - 1$ ومنه: $S_n = V_0 - 1 + V_1 - 1 + \cdots + V_{n-1}$

$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1} - 1 - 1 - \cdots - 1 = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) - (n+1)$

$S_n = \frac{9}{8}\left(\frac{1-(4/3)^{n+1}}{1-4/3}\right) - n - 1 = \frac{-27}{8}\left(1-(4/3)^{n+1}\right) - n - 1$

$w_n = \frac{9}{8} \cdot 4^n$ ، $w_n = 3^n v_n$ نضع

$w_0 = \frac{9}{8}$ و 4 أساسها "متتالية هندسية" w_n متتالية

$S'_n = \frac{9}{8}\left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1}\right) = \frac{3}{8}\left(4^{n+1}-1\right)$

تمرين 4 :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x\left(x - 2 + 2e^{-x}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ (أكبر حد)

2) $f'(x) = 6x - 6\left(1 - e^{-x} + xe^{-x}\right)$

$= 6x - 6 - 6e^{-x}(1+x) = 6(x-1)\left(1-e^{-x}\right)$

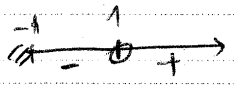
$1 - e^{-x} = 0$: $x = 0$ و

ب)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-3+6/e$	↘	0	↘	$9-6e$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

$g'(x) = 6x - 6$



3) f مستمرة ومتزايدة على $[1,+\infty[$

و $0 \in [-3+\frac{6}{e}, +\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ،

$1,5 < \alpha < 1,6$. $f(2) \simeq 1,6 > 0$ و $f(1) \simeq -0,8 < 0$

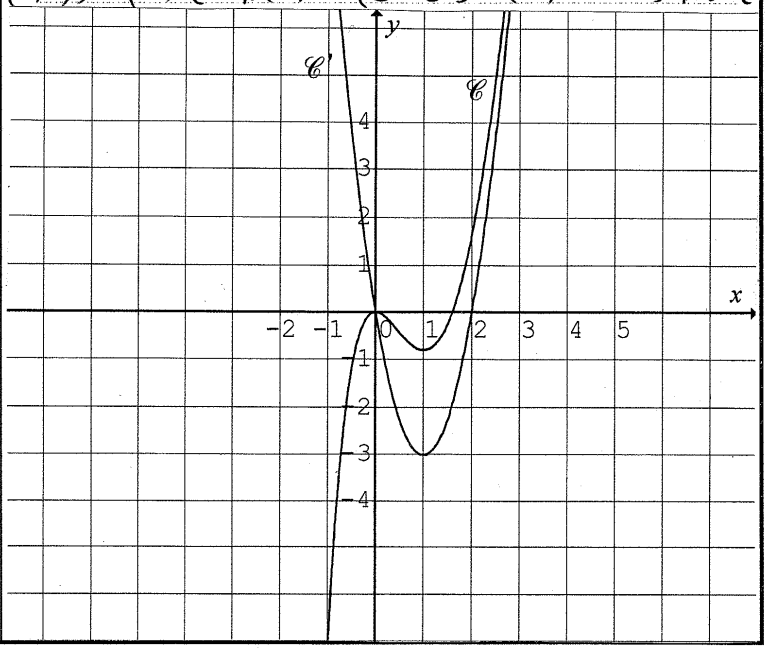
لأن $f(1,6) > 0$ و $f(1,5) < 0$.

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} 6xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 6\frac{x}{e^x} = 0$

ومنه $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ متقاربان بجوار $+\infty$

ب) إشارة $x \in [-1,0[$: $6xe^{-x}$: $(\mathcal{C})$ تحت $(\mathcal{C}')$.

$x \in]0,+\infty[$ ، $(\mathcal{C})$ فوق $(\mathcal{C}')$ ، $(\mathcal{C})$ يقطع $(\mathcal{C}')$ عند $(0,0)$



$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = 6(\alpha-1)(1-e^{-\alpha})(x-\alpha)$ (5

لدينا $f(\alpha)=0$ ، بمعنى : $1 - e^{-\alpha} = \frac{3\alpha^2}{6\alpha} = \frac{\alpha}{2}$

$y = 6(\alpha-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x-\alpha) = 3\alpha(\alpha-1)(x-\alpha)$

$\left[(ax+b)e^{-x}\right]' = xe^{-x}$ (P 16

$(a - b - ax)e^{-x} = xe^{-x}$

نجد $a=-1$ و $b=-1$ $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$

ومنه f : xe^{-x} هي $(-x-1)e^{-x}$

ب) $I_\alpha = \int_0^\alpha \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_0^\alpha 6xe^{-x}\,dx$

$I_\alpha = 6\left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^\alpha = 6(-\alpha-1)e^{-\alpha} + 6$

ولدينا سابقا من $f(\alpha)=0$: $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$I_\alpha = 6(-\alpha-1)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) + 6 = 3\alpha(\alpha-1)$

$x=\alpha$ و $x=0$، $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ بالوحدة u.a I_α تعبر عن المساحة بين

$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x}$ (P 7

$= \lim_{x\to0}\left(3x - 6\left(1-e^{-x}\right)\right) = 0 = f'_g(0)$

$\lim_{x\to0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{g(x)}{x}$

$= \lim_{x\to0}(3x-6) = -6 = g'_d(0)$

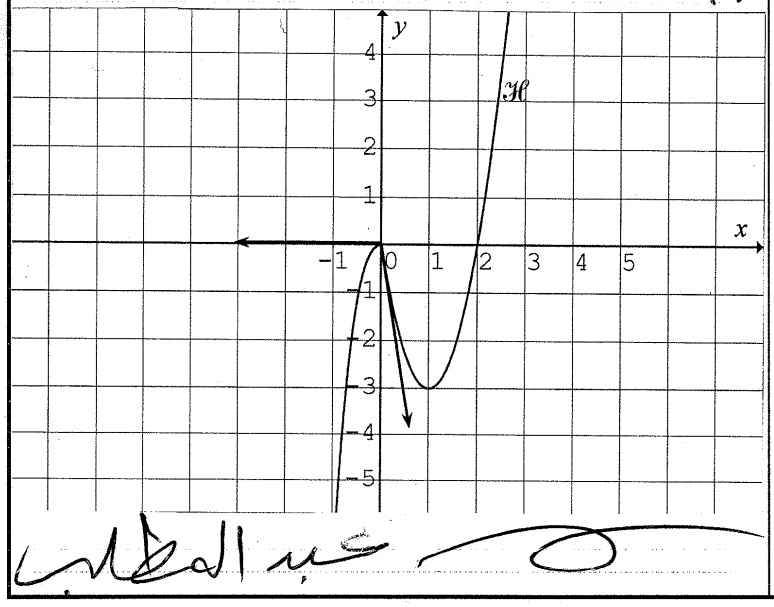
$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ ومنه h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

النقطة $O(0,0)$ تمثل نقطة زاوية.

ب)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	-6		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$9-6e$		0	↘	-3	↗	$+\infty$

ج)



عبد الطالب

تصحيح البكالوريا التجريبي 2022م

الموضوع الثاني

عبد الطالب "

تمرين 1:

1) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$$

2) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$g(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x+2}$ ؛ $G(x)=\ln(\ln x+2)+C$

بما أن $G(\frac{1}{e})=0$ ، $\ln 1+C=0$ أي $C=0$

3) لتكن f الدالة المعرفة: $f(x)=x-\ln(1+\frac{1}{x})$

على $]0;+\infty[$ $f'(x)=1+\frac{1}{x(x+1)}>0$

و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ عندئذ (V_n) متزايدة ومتباعدة

4) الإجابة الصحيحة هي أ) لأن:

$$S_n=\int_0^1 e^{2x}dx+\int_1^2 e^{2x}dx+\dots+\int_n^{n+1}e^{2x}dx$$

باستعمال علاقة شال نجد: $S_n=\int_0^{n+1}e^{2x}dx$

$$S_n=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{n+1}=\frac{1}{2}(e^{2n+2}-1)$$

يمكن البرهان على أنها هندسية ثم حساب المجموع أو الجمع طرف بطرف ثم الاختزال.

5) الإجابة الصحيحة هي ب) لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x}-2x+3)-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^{2x}(1-\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{e^{2x}})-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln e^{2x}+\ln(1-\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{3}{e^{2x}})-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x+\ln(1-\underbrace{\frac{2x}{e^{2x}}}_{0}+\underbrace{\frac{3}{e^{2x}}}_{0})]=+\infty$$

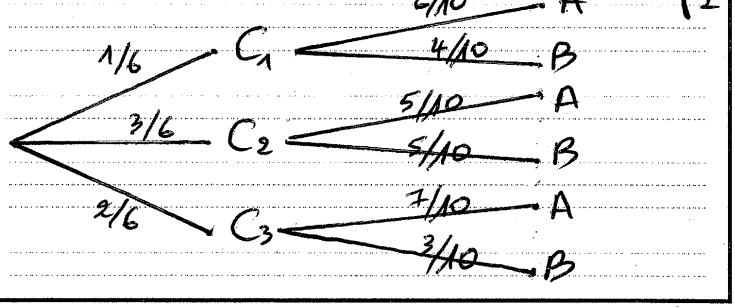
6) الإجابة الصحيحة هي ج) لأن:

$$\begin{cases}f(x)=(x^2+x)e^{-x}\\ f(-1)=0\end{cases}\quad ,\quad f'(x)=(-x^2+x+1)e^{-x}$$

$$f'(x)+f(x)=(2x+1)e^{-x}$$

تمرين 2:

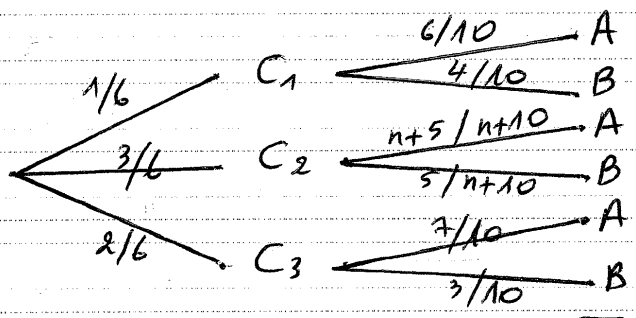
1)



$P(A)=\frac{1}{6}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{10}+\frac{2}{6}\times\frac{7}{10}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$

2) $P_A(C_1)=\frac{P(C_1\cap A)}{P(A)}=\frac{1/6\times6/10}{35/60}=\frac{6}{35}$

3)



$P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}+\frac{3}{6}\times\frac{5}{n+10}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}=\frac{n+25}{6(n+10)}$

4) $P(B)>\frac{1}{4}$ يعني: $\frac{n+25}{6(n+10)}>\frac{1}{4}$ أي $2n+50>3n+30$

$n<20$ و $n=19$

5) أ) $P(C_2)=\frac{3}{6}$ و $P(B)=\frac{n+25}{6(n+10)}$

ب) (B) و (C_2) مستقلان إذا تحقق:

$$P(B\cap C_2)=P(B)\times P(C_2)$$

$$\frac{3}{6}\times\frac{5}{n+10}=\frac{5}{2(n+10)}=\frac{n+25}{12(n+10)}$$

$n+25=30$ و $n=5$

تمرين 3:

1) (u_n) ثابتة يعني: $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$

$\alpha=(\alpha-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}$ ، $(\alpha-\sqrt{2})(\alpha-\sqrt{2}-1)=0$

أو $\alpha=\sqrt{2}$ و $\alpha=\sqrt{2}+1$

2) $\sqrt{2}<u_0<2$ ؛ $u_0=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ ؛ $n=0$ (صحيح)

نفرض أن $\sqrt{2}<u_n<2$ ونبرهن: $\sqrt{2}<u_{n+1}<2$

لدينا: $\sqrt{2}<u_n<2$ ؛ $0<u_n-\sqrt{2}<2-\sqrt{2}$

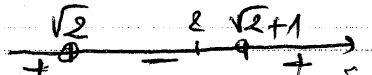
$0<(u_n-\sqrt{2})^2<6-4\sqrt{2}$

(صحيح) $\sqrt{2}<(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}<6-3\sqrt{2}<2$

$\forall n\in\mathbb{N}$ فإن $\sqrt{2}<u_{n+1}<2$: $\sqrt{2}<u_n<2$

ب) $u_{n+1}-u_n=(u_n-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}-u_n$

$=(u_n-\sqrt{2})(u_n-\sqrt{2}-1)<0$



ج) $\sqrt{2}<u_n<2$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

د) (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\lim u_n=\lim u_{n+1}=\ell$

$\ell = (\ell - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}$

$(\ell - \sqrt{2})(\ell - \sqrt{2} - 1) = 0$ ← مقبول $\ell = \sqrt{2}$ ، مرفوض $\ell = \sqrt{2} + 1$

(ب 3) $V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - \sqrt{2}) = \ln(U_n - \sqrt{2})^2 = 2\ln(U_n - \sqrt{2}) = 2V_n$

(V_n) متتالية هندسية أساسها 2 و $V_0 = -\ln 2$

$V_n = V_0 \cdot q^n = (-\ln 2)\, 2^n$

$V_n = \ln(U_n - \sqrt{2})$: أي $U_n = e^{V_n} + \sqrt{2}$

$U_n = e^{(-\ln 2)\, 2^n} + \sqrt{2}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2}$ و

(ج $S_n = \frac{V_0}{2^0} + \frac{V_1}{2^1} + \cdots + \frac{V_n}{2^n} = \frac{V_0}{2^0} + \frac{V_0 \cdot 2^1}{2^1} + \cdots + \frac{V_0 2^n}{2^n}$

$S_n = V_0 + V_0 + \cdots + V_0 = (n+1)V_0 = (n+1)(-\ln 2)$

د) $S'_n = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} + \cdots + \frac{1}{V_n^2} = \frac{1}{V_0^2 q^2} + \frac{1}{V_0^2 q^4} + \cdots + \frac{1}{V_0^2 q^{2n}}$

$S'_n = \frac{1}{V_0^2}\left(q^{-2} + q^{-4} + \cdots + q^{-2n}\right) = \frac{1}{V_0^2} q^{-2}\left(\frac{1 - q^{-2n}}{1 - q^{-2}}\right)$

$S'_n = \frac{1}{(\ln 2)^2} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{3(\ln 2)^2}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

تمرين 4 :

I- 1) $g'(x) = 1 + \frac{e}{x} = \frac{x+e}{x} > 0$ ، ومنه g متزايدة

2) g مستمرة ومتزايدة على $]1{,}54 ; 1{,}55[$.

$g(1{,}54) \simeq -0{,}004 < 0$ و $g(1{,}55) \simeq 0{,}02 > 0$. حسب

مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α.

إشارة $g(x)$: $- \; 0 \; +$ على $]0;\alpha[$ و $[\alpha;+\infty[$

II- 1) $f'(x) = \frac{e}{x^2}\ln x + \frac{x-e}{x^2} = \frac{e\ln x + x - e}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

f متزايدة على $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة على $]0;\alpha]$.

2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x-e}{x}\right) = -\infty$

$x = 0$ مستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C})$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-e}{x}\right) = 1$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} -e\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

ومنه $(\mathcal{C}')$ يقارب $(\mathcal{C})$ بجوار $(+\infty)$

ب) وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ $(\mathcal{C}')$. ندرس إشارة $f(x) - y = -e\frac{\ln x}{x}$

$+ \; 0 \; -$ على $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

$(\mathcal{C})$: $x > 1$ أسفل $(\mathcal{C}')$. $(\mathcal{C}')$: $0 < x < 1$ أعلى $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C})$ يقطع $(\mathcal{C}')$ عند النقطة $(1,0)$.

وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة لـ (Ox) : ندرس إشارة $f(x)$.

$f(x) = 0$: $x = 1$ أو $x = e$

$f(x) > 0$: $x \in]0;1[\cup]e;+\infty[$

$f(x) < 0$: $x \in]1;e[$

$(\mathcal{C})$ يقطع (Ox) عند النقطتين $(1,0)$ و $(e,0)$

$f(\alpha) = \left(\frac{\alpha - e}{\alpha}\right)\ln\alpha$ (P 4) لدينا $g(\alpha) = 0$: $\alpha - e + e\ln\alpha = 0$

$\ln\alpha = \frac{e-\alpha}{e}$ ، نعوض في $f(\alpha)$ فنجد : $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha-e}{\alpha}\right)\left(\frac{e-\alpha}{e}\right)$

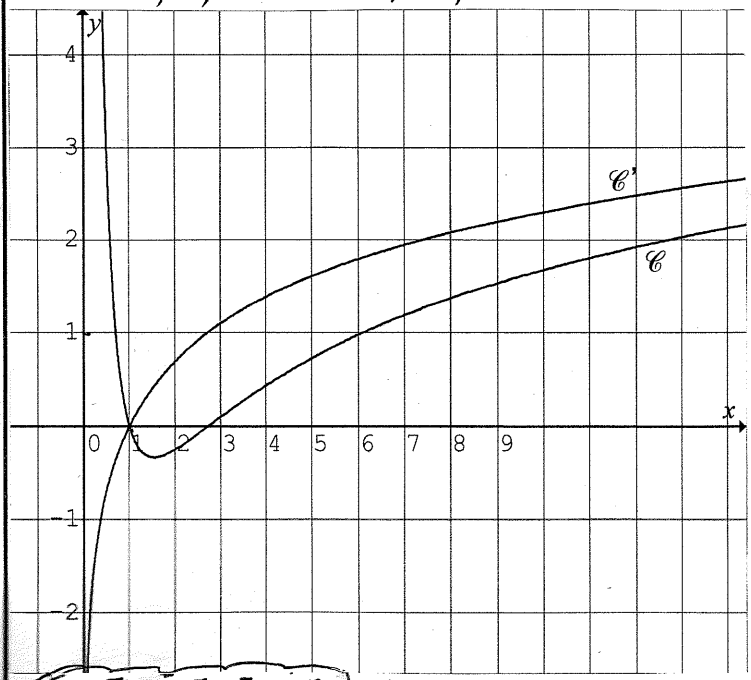
$f(\alpha) = 2 - \frac{\alpha}{e} - \frac{e}{\alpha}$: أي $1{,}54 < \alpha < 1{,}55$ ، $0{,}645 < \frac{1}{\alpha} < 0{,}649$

$0{,}566 < \frac{\alpha}{e} < 0{,}57$ ، $1{,}754 < \frac{e}{\alpha} < 1{,}765$ ، $2{,}319 < \frac{\alpha}{e} + \frac{e}{\alpha} < 2{,}334$

$-2{,}334 < -\left(\frac{\alpha}{e} + \frac{e}{\alpha}\right) < -2{,}319$ ، $-0{,}34 < 2 - \left(\frac{\alpha}{e} + \frac{e}{\alpha}\right) < -0{,}32$

$-0{,}34 < f(\alpha) < -0{,}32$: أي

ب) $f(4) \simeq 0{,}44$ و $f(6) \simeq 0{,}98$



$m \in]1;\alpha[\cup]\alpha;e[$ أي $f(\alpha) < f(m) < 0$ (ج

5) $A(0;-\frac{1}{2})$ يستعمل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$-\frac{1}{2} = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0)$

$-\frac{1}{2} = \left(\frac{x_0 - e + e\ln x_0}{x_0^2}\right)(-x_0) + \left(\frac{x_0 - e}{x_0}\right)\ln x_0$

$-\frac{1}{2} = \frac{-x_0 + e - 2e\ln x_0 + x_0\ln x_0}{x_0}$

$-2x_0 + 2e - 4e\ln x_0 + 2x_0\ln x_0 = -x_0$

$-x_0 + 2e + 2\ln x_0 \cdot (-2e + x_0) = 0$

$(x_0 - 2e)(-1 + 2\ln x_0) = 0$ (جداء عامل معدوم)

$x_0 = 2e$ أو $2e - x_0 = 0$ ، $x_0 = \sqrt{e}$ أو $1 - 2\ln x_0 = 0$

هناك مماسين عند $2e$ و $\sqrt{e}$ يشملان النقطة A

6) $A(\lambda) = \int_1^\lambda (\ln x - f(x))\,dx = \int_1^\lambda e\frac{\ln x}{x}\,dx = \left[e\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^\lambda$

$A(\lambda) = e\frac{(\ln\lambda)^2}{2}$ ua ، ومنه $A(\lambda) = e\frac{(\ln\lambda)^2}{2}\,cm^2$

$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} e\frac{(\ln\lambda)^2}{\lambda} = \lim_{t \to +\infty} e\left(\frac{t^2}{e^t}\right)$

$= \lim_{t \to +\infty} e\frac{1}{\left(\frac{e^t}{t^2}\right)} = 0$

"عبد المطلب"