الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الوادي
ثانوية بوشوشة – المختلطة –

المستوى : السنة الثالثة
علوم تجريبية
السنة الدراسية 2021 / 2022

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات — **المدة :3 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حددّه مع التعليل:

1) الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}$ هي دالة:
أ) فردية ب) زوجية ج) ليست زوجية وليست فردية

2) حل المعادلة التفاضلية: $y'-\ln 3y-\ln 27=0$ والذي يحقق $y(0)=6$ هو
أ) $y(x)=e^x-\ln 3$ ب) $y(x)=3^{x+2}-3$ ج) $y(x)=9e^x-3$

3) A و B حدثان مستقلان و $P(A)=0.2$ و $P(A\cup B)=0.35$ ، احتمال الحدث B هو:
أ) $P(B)=0.15$ ب) $P(B)=0.1875$ ج) $P(B)=0.125$

4) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)dx$
نضع: $S=U_0+U_1+\cdots+U_{36}$ قيمة Sهي.
أ) $S=2022$ ب) $S=1444$ ج) $S=1443$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) أدرس تغيّرات الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)-x=0$.
3) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1;\sqrt{3}]$ فإنّ: $f(x)\in[1;\sqrt{3}]$.

II. (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\leqslant U_n\leqslant\sqrt{3}$
ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n=\dfrac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$.
أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.
ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ استنتج U_n بدلالة n وأحسب نهاية (U_n) مجددا.

3) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n : $S_n=\dfrac{1}{V_0}+\dfrac{1}{V_1}+\cdots+\dfrac{1}{V_n}$ و $S'_n=\dfrac{1}{(U_0)^2}+\dfrac{1}{(U_1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(U_n)^2}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كريات لا نفرق بينها باللّمس ، كريتان تحملان الرقم: 0 و أربع كريات تحمل الرقم :2 وكرية تحمل الرقم: 1 وكرية تحمل الرقم: 4.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق.

نعتبر الحدثين:

A : "الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6".

B: "الكريات المسحوبة جداء أرقامها يساوي 8"

1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.

2) أحسب $P(A \cap B)$ ، هل الحدثين A و B مستقلان؟. برّر إجابتك.

3) استنتج $P_A(B)$ ، ثمّ $P(\overline{A \cap B})$.

4) ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.

أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P\left(\frac{X^2-16}{X} > 0\right)$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{(1+\ln x)^2}{x}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وبيّن أنّ : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، ثمّ فسر النتائج المتحصل عليها بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

3) g الدالة العددية المعرّفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x + \ln x$.

أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$: $1 + x + \ln x > 0$.

جـ) إستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

4) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (T).

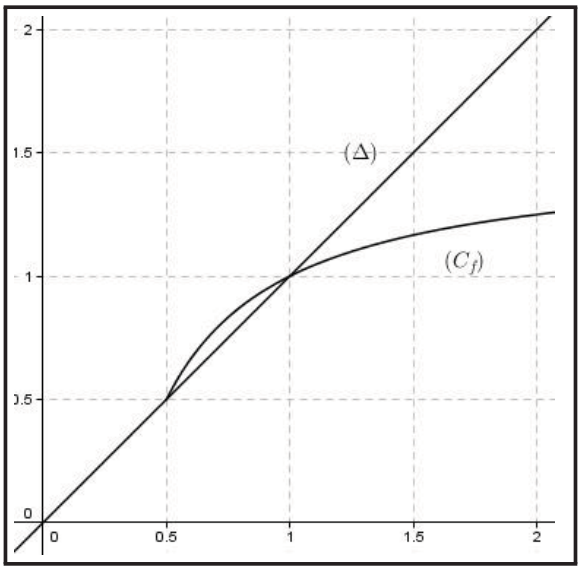
5) m وسيط حقيقي موجب ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\ln x = \sqrt{m}x - 1$.

6) أحسب مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$.

إنتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)



f الدالة المعرّفة على المجال $I = [\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = x$. **(كما في الشكل المقابل)**
(U_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الاول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) أنقل الشكل المقابل، مثّل دون حساب على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 مبرزا خطوط الإنشاء.
2) خمّن اتجاه تغيرّ المتتالية (U_n) وتقاربها.
3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > 1$.
4) أدرس اتجاه تغيرّ المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج؟.
5) أ) بينّ أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)$.
ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية (U_n).
6) (V_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$.
أ) بينّ أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل.
ب) أكتب عبارة U_n بدلالة n.
جـ) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \cdots\cdots + \frac{V_n - 1}{U_n}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حددّه مع التعليل:

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = 3x + \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:
أ) $y = 3x$ ب) $y = 3x + 1$ جـ) $y = 3x + 2$

2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \int_1^{\lambda} x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$ ، علما أن الدالة: $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\left[\ln x - \dfrac{1}{2}\right]$
دالة أصلية للدالة $x \mapsto x \ln x$ ، قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda) = \dfrac{1}{4}$ هي:
أ) $\lambda = e^{-1}$ ب) $\lambda = \sqrt{e}$ جـ) $\lambda = 2e$

3) المعادلة: $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما:
أ) $S = \{1; -5\}$ ب) $S = \{1; 5\}$ جـ) $S = \{-1; -5\}$

4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 2 - 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية
أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما جـ) ليست رتيبة

التمرين الثالث: (04 نقاط)

وحدة إنتاجية يسيرها 20 عامل منهم 8 نساء و12 رجال ، من بينهم العامل " مراد ".

1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال. ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية:

A: " أعضاء اللجنة نساء". B: " اللجنة تضم على الأكثر إمرأة ". C: "اللجنة تضم على الأقل إمرأة ".

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكلة ، عدد الرجال الموجودين فيها.

أ) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P(X^2 - 2X \leqslant 0)$.

3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس، نائب و كاتب ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية :

D: "رئيس اللجنة من الرجال ". E: " رئيس ونائب اللجنة من نفس الجنس ".

F: "العامل " مراد " موجود في اللجنة ".

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.74; -0.73[$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل المنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ : $f(\alpha) = \alpha + 1 + \dfrac{2}{2\alpha+1}$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

6) أنشئ كلاّ من (Δ) و (C_f). (يعطى $f(-1.65) \approx 0$ و $f(1.4) \approx 0$).

7) أ) عيّن العددين a و b حتّى تكون الدالة $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$.

ب) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$ (حيث λ عدد حقيقي موجب تماما).

جـ) أحسب: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الثّاني

الإجابة النموذجية عن أسئلة البكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول :

الإجابة بصح أو خطأ مع التعليل :

1/ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = 1 - \frac{e}{e^x+1}$ هي دالة

الجواب : ب/ فردية

التعليل :

لدينا $f(x) = 1 - \frac{e}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

* لدينا f متناظرة بالنسبة لـ "0"

أي من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -\frac{(e^x-1)}{e^x+1}$$

$$= -f(x)$$

ومنه f دالة فردية

2/ حل المعادلة التفاضلية $y' - \ln 3\, y - \ln 27 = 0$

والتي تحقق $y(0) = 6$ هي

الجواب : ب/ $y(x) = 3^{x+2} - 3$

التعليل :

لدينا $y' - \ln 3\, y = \ln 27$

$y' = (\ln 3)y + \ln 27$

هي من الشكل $y' = ay + b$

حلولها من الشكل

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

إذا $y(x) = Ce^{(\ln 3)x} - \frac{\ln 27}{\ln 3}$

$= Ce^{\ln 3^x} - \frac{3\ln 3}{\ln 3}$

$\boxed{y(x) = Cx3^x - 3}$ (1)

لدينا $y(0) = 6$ أي

$C \times 3^0 - 3 = 6$

$C = 6 + 3 = 9$

بتعويض في (1) نجد :

$y(x) = 9 \times 3^x - 3$

$= 3^2 \times 3^x - 3$

$\boxed{y(x) = 3^{x+2} - 3}$

3/ A, B حدثان مستقلان

$P(A) = 0,2$ ، $P(A \cup B) = 0,35$

احتمال الحادثة B هو

الجواب : ب/ $P(B) = 0,1875$

التعليل :

لدينا A, B مستقلان

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ولدينا $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

$P(A \cap B) - P(A) = P(B)(1 - P(A))$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B) - P(A)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{0,35 - 0,2}{1 - 0,2} = \boxed{0,1875}$$

التمرين الثاني :

$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ $D_f = \mathbb{R}$. I

// دراسة تغيرات f وتشكيل جدول تغيراتها .

× نهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

* إتجاه تغير f :

f دالة ق . ! على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{\frac{2(x^2+1) - 2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

$\sqrt{x^2+1} > 0$ و $x^2+1 > 0$ ، ك:

$\mathbb{R}$ على f متزايدة تماما

$x = \frac{1}{x} = \sqrt{}$

ص 2

مثالية عددية معرفة $(u_n)/4$

$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1 + \ln x)$ ، $n \in \mathbb{N}$

المجموع S_n حيث

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{36}$

الجواب : ج/ $S_n = 1443$

التحليل :

نبينا

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1 + \ln x)\,dx$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$= \left[2\ln x + (\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= 2\ln e^{n+1} + (\ln(e^{n+1}))^2 - 2\ln e^n - (\ln e^n)^2$$

$$= 2(n+1) + (n+1)^2 - 2n - n^2$$

$$= 2n + 2 + n^2 + 2n + 1 - 2n - n^2$$

$$= 2n + 3$$

وهي متالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول 3

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{36}$

$$S_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2} \Big|_{\substack{p=0 \\ n=36}}$$

$$= \frac{(36-0+1)}{2}(u_0 + u_{36})$$

$$= \frac{37}{2}(3+75) = \frac{37 \times 78}{2}$$

$$= 1443$$

ع/ط المعادلة $f(x)-x=0$

$f(x)-x=0$

$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-x=0$

$\frac{2x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=0$

وبالتالي

$2x-x\sqrt{x^2+1}=0$

$x(2-\sqrt{x^2+1})=0$

أما $x=0$ أو $2-\sqrt{x^2+1}=0$

$2-\sqrt{x^2+1}=0$

$\sqrt{x^2+1}=2$

$x^2+1=4$

$x^2=3$

$x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة

$S=\{0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

3/ بيان أنه من أجل $x\in[1\ \sqrt{3}]$

فإن $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$

لدينا $x\in[1,\sqrt{3}]$

أي $1\leq x\leq\sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال $[1,\sqrt{3}]$ فإن

$f(1)\leq f(x)\leq f(\sqrt{3})$

$1\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\leq f(x)\leq\sqrt{3}$

أي $1\leq f(x)\leq\sqrt{3}$

ومنه $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$

II $u_0=1$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$

1/ برهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$1\leq u_n\leq\sqrt{3}$

نضع $P(n):1\leq u_n\leq\sqrt{3}$

$P(0):1\leq u_0=1\leq\sqrt{3}$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

لدينا $1\leq u_n\leq\sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال

$[1,\sqrt{3}]$ فإن

$f(1)\leq f(u_n)\leq f(\sqrt{3})$

$1\leq\frac{2}{\sqrt{2}}\leq u_{n+1}\leq\sqrt{3}$

أي $1\leq u_{n+1}\leq\sqrt{3}$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$1\leq u_n\leq\sqrt{3}$

بدراسة إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$

واستنتاج تقاربها وحساب نهاية (u_n)

$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$

$=\frac{2u_n-u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n+1}}$

$=\frac{u_n(2-\sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$

! ثابتة الفرق من إشارة

$\sqrt{u_n^2+1} > 0$ لأن $2-\sqrt{u_n^2+1}$

و $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

لدينا $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

$1 \leq u_n^2 \leq 3$

$2 \leq u_n^2+1 \leq 4$

$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n^2+1} \leq 2$

بضرب الطرفين بالعدد (-1) نجد

$-2 \leq -\sqrt{u_n^2+1} \leq -\sqrt{2}$

$0 \leq 2-\sqrt{u_n^2+1} \leq 2-\sqrt{2}$

ومنه $2-\sqrt{u_n^2+1} \geq 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

ملاحظة

يمكن استخدام جدول إشارة

$2-\sqrt{x^2+1}$

* إليه استنتاج:

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة

من الأعلى $(u_n \leq \sqrt{3})$ فهي متقاربة

* حساب نهاية (u_n)

لدينا (u_n) متقاربة وبالتالي

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

$f(l) = l$

$f(l) - l = 0$

نحل المعادلة السابقة

ونجد حلولها هي

$S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$l = 0$ مرفوض لأن $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

$l = -\sqrt{3}$ مرفوض لأن $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

$l = \sqrt{3}$ مقبول

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$$

/2

$$v_n = \frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$$

/1 بيان أن (v_n) متتالية هندسية

$v_0 = ?$ و $q = ?$

$$v_{n+1} = \frac{(u_{n+1})^2}{3-(u_{n+1})^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{3-\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{\frac{3u_n^2+3-4u_n^2}{u_n^2+1}}$$

$$= \frac{4u_n^2}{-u_n^2+3} = 4\left(\frac{u_n^2}{3-u_n^2}\right)$$

$$= 4v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها

$q = 4$

وحدها الأول

$$V_0 = \frac{(U_0)^2}{3-(U_0)^2} = \frac{1}{3-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ب/ كتابة V_n بدلالة n واستنتاج U_n بدلالة n، حساب نهاية (U_n)

* لدينا (V_n) م. هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \quad \begin{matrix} p=0 \\ q=4 \\ n=n \end{matrix}$$

$$= V_0 \times 4^{n-0}$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2}(4)^n}$$

* كتابة U_n بدلالة n

لدينا $V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$

$$V_n(3-U_n^2) = U_n^2$$

$$3V_n - U_n^2 V_n - U_n^2 = 0$$

$$U_n^2(-V_n-1) = -3V_n$$

$$U_n^2 = \frac{-3V_n}{-V_n-1}$$

$$U_n^2 = \frac{3V_n}{V_n+1}$$

$$\begin{cases} U_n = -\sqrt{\frac{3V_n}{V_n+1}} \\ U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{V_n+1}} \end{cases}$$

(أي يوجد حدان موجبان وحدان سالبان $U_n \leq \sqrt{3}$)

ومنه

$$U_n = \sqrt{\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)4^n}{\left(\frac{1}{2}\right)\times 4^n + 1}}$$

* حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)4^n}{\frac{1}{2}\times 4^n + 1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\times 4^n}{4^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4^n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3/2}{1/2}} = \sqrt{3}$$

3/ حساب بدلالة n المجموع

$$S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \cdots + \frac{1}{V_n}$$

لدينا $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ م. هندسية أساسها $q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$\frac{1}{V_0} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$S_n = \frac{1/V_0}{1-q'}\left(1-(q')^{n-0+1}\right)$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{2}{3/4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

ص ٢

$$S'_n = \frac{1}{(u_0)^2} + \frac{1}{(u_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(u_n)^2}$$

لدينا $V_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

أي $\frac{1}{V_n} = \frac{3-u_n^2}{u_n^2}$

$$\frac{1}{V_n} = \frac{3}{u_n^2} - 1$$

$$\frac{1}{V_n} + 1 = \frac{3}{u_n^2}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_n}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{u_n^2}$$

$$S'_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \cdots + \frac{1}{V_n}\right) + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3}}_{(n+1)\text{ مرة}}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1)\right)$$

$$= \frac{8}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

التمرين الثالث :

②	②	①	⓪
②	②	④	⓪

التجربة : سحب 3 كريات

الكيفية : في آن واحد

طريقة العد : توفيقة $C_8^3 = 56$

"A" الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6

"B" " " جداء أرقامها يساوي 8

1/ حساب $P(A)$ و $P(B)$

3 كريات ② أو ⓪ و ④

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+8}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

3 كريات ② أو ① و ④

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

2/ حساب $P(A \cap B)$ وما الحدثان A و B مستقلان

$A \cap B$ الكريات المسحوبة جداء أرقامها 8 ومجموعها 6

توجد حالة واحدة وهي ② 3 كريات

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$= 0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(\ln y^2)^2}{y}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{2\ln y}{y}\right)^2 = 0$$

ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f)

ب/ P / دراسة إشارة $\frac{x^2-16}{x}$ على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-16	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2-16}{x}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	0	$+$

حلول المتراجحة $\frac{x^2-16}{x} > 0$ هي

$-4 < x < 0$ أو $x > 4$

$$P\left(\frac{x^2-16}{x}\right) = P(X>4)$$

$$= P(X=8) + P(X=16)$$

$$= \frac{8}{16} + \frac{6}{16} = \frac{14}{16} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

التمرين الرابع:

$$f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$D_f =]0;+\infty[$

1/ حساب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وتفسير النتائج

$$* \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = +\infty$$

لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln x)^2 = +\infty$ ،

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

ب/ P / دراسة إشارة $f'(x)$ على $]0;+\infty[$ ثم

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2} :]0;+\infty[\text{ من } x$$

f دالة ق.ا على $]0;+\infty[$

ودراسة إشارة $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)x - (1+\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)\left[2-(1+\ln x)\right]}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)(2-1-\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$$

بالإستناج اتجاه تغير f و تشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x) = \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+\ln x)(1-\ln x)$ لأن $x^2 > 0$

$1+\ln x = 0$ | $1-\ln x = 0$

$\ln x = -1$ | $-\ln x = -1$

$x = e^{-1}$ | $\ln x = 1$

$x = e$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]e^{-1}; e[$ ومتناقصة على المجالين $]e; +\infty[$ ، $]-\infty; e^{-1}[$

* جدول اتغيرات f:

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

$f(e) = \frac{2}{e}$

$f(e^{-1}) = 0$

كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة "1"

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 1(x-1) + 1$ | $f'(1) = 1$ | $f(1) = 1$

$y = x - 1 + 1$

$(T): y = x$

3/ $g(x) = 1 - x + \ln x$

$D_g =]1; +\infty[$

* دراسة اتجاه تغير g على $]1; +\infty[$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $]1; +\infty[$

لدينا g قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ ولدينا المشتقة g'

$g'(x) = -1 + \frac{1}{x}$

$= \frac{-x+1}{x} < 0$

لأن $x > 1$ ، $x > 1$

$-x + 1 < 0$

ومنه g متناقصة على $]1; +\infty[$

استنتاج إشارة $g(x)$

لدينا $g(1) = 0$ ، g دالة متناقصة

$g(x) \leq 0$ ومنه على $]1; +\infty[$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	

ب/ تبرير أنه من أجل $x \in]-1;+\infty[$

$1+x+\ln x > 0$ فإن

لدينا $x > -1$

(1) ... $\ln x > 0$

$x > 1$

(2) ... $x+1 > 2 > 0$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد

$$\boxed{x+1+\ln x > 0}$$

جـ/ استنتاج وضعية (C_g) بالنسبة لـ (T)

$$f(x)-y = \frac{(1+\ln x)^2}{x} - x$$

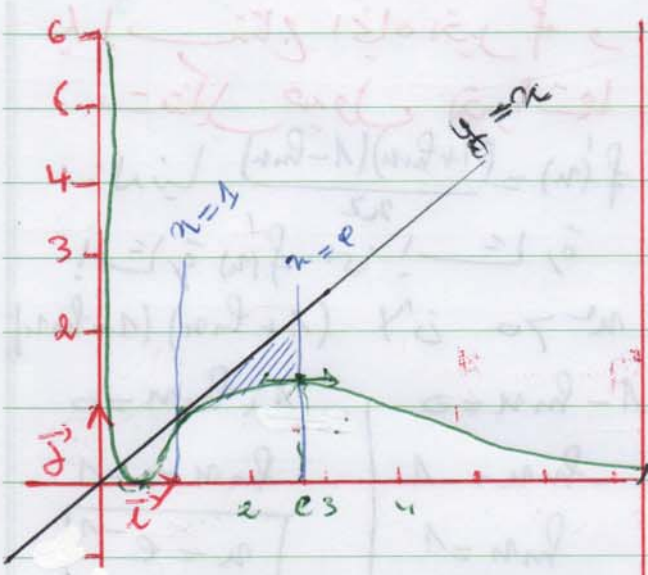
$$= \frac{(1+\ln x)^2 - x^2}{x}$$

$$= \frac{(1-x+\ln x)(1+x+\ln x)}{x}$$

$$= \frac{g(x)(1+x+\ln x)}{x} < 0$$

لأن $g(x) \leq 0$ و $1+x+\ln x > 0$ و $x > 0$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	‖	0	$-$
الوضعية		(C_g)	(C_g) تحت (T)
		(T)	



5/ المناقشة البيانية حسب قيم m

عدد حلول المعادلة $\ln x = \sqrt{m}x - 1$

لدينا $\ln x = \sqrt{m}x - 1$

$\ln x + 1 = \sqrt{m}x$

$(\ln x + 1)^2 = m x^2$

$\frac{(\ln x + 1)^2}{x} = mx$

$f(x) = mx$

المناقشة تؤول إلى إيجاد فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم الموازي ذو المعادلة $y = mx$

لدينا $y = mx$ يشمل نقطة ثابتة وهي $O(0,0)$

قيم m	المناقشة
$m = 0$	حل مضاعف
$0 < m < 1$	ثلاث حلول متمايزة
$m = 1$	حلان أحدهما مضاعف
$m > 1$	حل وحيد

6/ حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات $x=e$ ، $x=1$ ، $y=x$

$$A = \int_1^e y - f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e x - \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$= \int_1^e x - \frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$= \int_1^e x - \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln x - (\ln x)^2 - \frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e$$

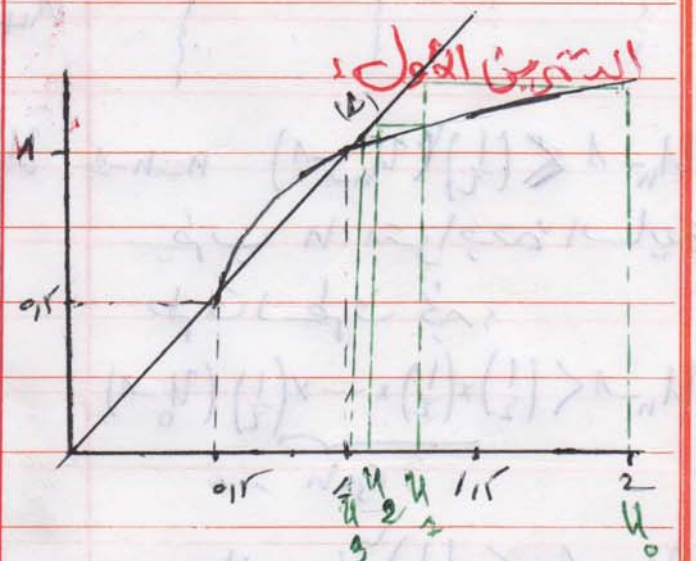
$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - 1 - 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 0 - 0 - 0\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{3}\right) - \frac{1}{2}\ u.a$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{17}{6}\ u.a$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:



1/ تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

2/ تخمين اتجاه تغير (u_n) ونقارنها

لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ متتالية تناقصية

ونلاحظ أن (u_n) متناقصة

ومتقاربة نحو 1 حيث تقطع تقاربها

(C_f) مع (Δ) في $x=1$

3/ برهان بالتراجع أنه من

أجل كل n طبيعي: $u_n > 1$

نضع $P(n): u_n > 1$

$P(0): u_0 = 2 > 1$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت

صحة $P(n+1)$

$u_n > 1$

وبما أن f متزايدة على المجال $]1; +\infty[$

$f(u_n) > f(1)$

$u_{n+1} > 1$

ومنه من أجل كل n طبيعي: $u_n > 1$

4/ دراسة اتجاه تغير (u_n)، ولدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n$$

$$= \frac{3u_n - 1 - 2u_n^2}{u_n}$$

$$= \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n}$$

إشارة المقدار من إشارة $-2u_n^2 + 3u_n - 1$

نضع $X = u_n$

$-2X^2 + 3X - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$ | $a = -2$

$= 3^2 - 4(-2)(-1)$ | $b = 3$

$= 1$ | $c = -1$

$$X_1 = \frac{-3+1}{-2(2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-3-1}{-2(2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

X	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2X^2+3X-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبما أن $u_n > 1$ فإن $-2u_n^2 + 3u_n - 1 < 0$ ومنه (u_n)

متناقصة على $\mathbb{N}$

* الاستنتاج:

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

$(u_n > 1)$ فهي متقاربة

ص 1

5/ P بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$

لدينا

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1$$

$$= \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

$$= \frac{1}{2u_n}(u_n - 1)$$

ولدينا $u_n > 1$

أي $2u_n > 2$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}}$ (1)

لدينا $u_n - 1 > 0$ بضرب طرفي (1) بالعدد $(u_n - 1)$ نجد

$$\frac{1}{2u_n}(u_n - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

$$\boxed{u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)}$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا من العلاقة السابقة ، من أجل

$n = 0$ $\quad u_1 - 1 < \frac{1}{2}(u_0 - 1)$

$n = 1$ $\quad u_2 - 1 < \frac{1}{2}(u_1 - 1)$

$n = 2$ $\quad u_3 - 1 < \frac{1}{2}(u_2 - 1)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$n = n-1$ $\quad u_n - 1 < \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$

بضرب n متراجحة السابقة طرفا لطرف نجد :

$$u_n - 1 < \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{n} (u_0 - 1)$$

$$u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - 1)$$

$$\boxed{u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ملاحظة

يمكن برهان بتراجع العلاقة $u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

6/ $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

P/ بيان أن (v_n) متتالية هندسية

$v_0 = ?$ ، $q = ?$

$$v_{n+1} = \frac{3u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\left(\frac{3u_n - 1}{2u_n}\right) - 1}$$

$$= \frac{3u_{n-1} - 2u_n}{2u_n}$$

$$= \frac{6u_{n-2} - 2u_n}{2u_n}$$

$$= \frac{u_{n-1}}{4u_n - 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} v_n$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{2-1}{2(2)-1} = \frac{1}{3}$$

ب/ كتابة v_n بدلالة n

* كتابة v_n بدلالة n من الشكل $v_p \times q^{n-p}$

$$v_n = v_p \times q^{n-p} \quad \begin{matrix} p=0 \\ q=\frac{1}{2} \\ n=n \end{matrix}$$

$$= v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

* نعلم أن $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

$$v_n(2u_n - 1) = u_n - 1$$

$$2v_n u_n - v_n = u_n - 1$$

$$2v_n u_n - u_n = v_n - 1$$

$$(2v_n - 1)u_n = v_n - 1$$

$$u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

$$\boxed{u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}}$$

ج/ حساب المجموع S_n

$$S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$$

لدينا من السابق

$$(2v_n - 1)u_n = v_n - 1$$

$$\boxed{2v_n - 1 = \frac{v_n - 1}{u_n}}$$

$$S_n = (2v_0 - 1) + (2v_1 - 1) + \dots + (2v_n - 1)$$

$$= 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

$q = \frac{1}{2}$ مجموع p حدا $\quad$ مجموع $(n+1)$ حدا

$$= 2\frac{v_0}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - (n+1)$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1}$$

التمرين الثاني :

اختبار إلى حياة الصحيحة مع التبرير

1/ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}+3x$ تقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$ معادلته

ب/ $y=3x+2$ الجواب

التحليل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-3x =$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x+\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}-3x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-2}{e^{-x}-1}=2$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(3x+2)=0$$

ومنه $y=3x+2$ معادلة مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ج/ $\lambda>1$ ، $A(\lambda)=\int_1^{\lambda} x\ln x\,dx$

قيمة λ حتى $A(\lambda)=\frac{1}{4}$

الجواب : ب/ $\lambda=\sqrt{e}$

التحليل :

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda} x\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^{\lambda}$$

$$=\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

حتى يكون $A(\lambda)=\frac{1}{4}$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\ln\lambda-\frac{1}{2}=0$	$\frac{\lambda^2}{2}=0$
$\ln\lambda=\frac{1}{2}$	$\lambda^2=0$
$\boxed{\lambda=e^{\frac{1}{2}}}$	$\lambda=0$ مستحيل لأن $\lambda>1$

$$\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$$ ومنه

ج/ المعادلة $\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$ تقبل حلان هما ،

الجواب : ب/ $S=\{1,5\}$

التحليل :

$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$

معرفة على $\mathbb{R}^*$ لأن

$11x^2-6x+5>0$ ، $x^2>0$

$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$

$$\frac{\ln(11x^2-6x+5)}{\ln 10}=\frac{\ln x^2}{\ln 10}+1$$

$\ln(11x^2-6x+2) = \ln x^2 + \ln 10$

$\ln(11x^2-6x+2) = \ln 10x^2$

$11x^2-6x+2 = 10x^2$

$x^2-6x+2=0$

$\Delta = b^2-4ac$ | $a=1$, $b=-6$, $c=2$

$= 36-4(1)(2)$

$=16$

$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$S = \{1, 2\}$ ومنه

4/ (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = 2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

هي متتالية:

الجواب ؟/ متزايدة تماما

التعليل:

$u_{n+1} - u_n = \left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$= -3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(-\frac{1}{4}+1\right)$

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

التمرين الثالث:

عدد الرجال: 12

عدد النساء: 08

عدد العمال: $20 = 12+8$

اللجنة تشكل لجنة من 03 عمال

المهام غير مذكورة

طريقة العد: توفيقة $C_{20}^3 = 1140$

// حساب احتمال الحوادث التالية

"A" أعضاء اللجنة نساء

$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285}$

"B" اللجنة تضم امرأة على الأكثر

$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{187}{285}$

"C" اللجنة تضم امرأة على الأقل

$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_8^2 \times C_{12}^1 + C_8^3}{C_{20}^3}$

$= \frac{72}{95}$

2/ لتكن X المتغير العشوائي يرفق بكل لجنة عدد الرجال المتواجدين في اللجنة

P/ قانون احتمال وحساب الأمل الرياضياتي.

لتكن X لدينا

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

x_i	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{14}{285}$	$\frac{84}{285}$	$\frac{132}{285}$	$\frac{55}{285}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{84}{285}$	$\frac{264}{285}$	$\frac{165}{285}$	

$$P(X=0) = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285}$$

$$P(X=1) = \frac{C_{12}^1 \times C_8^2}{C_{20}^3} = \frac{28}{95} = \frac{84}{285}$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2 \times C_8^1}{C_{20}^3} = \frac{132}{285}$$

$$P(X=3) = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{11}{57} = \frac{55}{285}$$

$$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{9}{5} \quad /3$$

التجربة : 03 عمال

المهام : رئيس، نائب، كاتب

ملاحظة : ترتيب $A_{20}^3 = 6840$

حساب احتمال الحوادث التالية

"D" رئيس الجلسة من الرجال

$$P(D) = \frac{A_{12}^1 \times A_{19}^2}{A_{20}^3} = \frac{3}{5}$$

"E" رئيس الجلسة ونائبه من نفس الجنس

$$P(F) = \frac{A_{12}^2 \times A_8^1 + A_8^2 \times A_8^1}{A_{20}^3} = \frac{384}{6840} = \frac{47}{95}$$

"F" العامل "مراد" في الجلسة

$$P(F) = \frac{3 \times A_1^1 \times A_{19}^2}{A_{20}^3} = \frac{1026}{6840} = \frac{3}{20}$$

التمرين الرابع :

$g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$ $D_g = \mathbb{R}$ I

حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ //

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x+1)e^{-x} + 1 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x+1)e^{-x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} + 1$

$= 1$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

2/ دراسة الوضع النسبي وتشكيل جدول لتغيراتها

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$g'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1)$

$= e^{-x}(2 - (2x+1))$

$= e^{-x}(1-2x)$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $1-2x$ لأن $e^{-x}>0$

$1-2x=0$ أي $2x=1$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه g متناقصة تماما على $]\frac{1}{2};+\infty[$

ومتزايدة تماما على $]-\infty;\frac{1}{2}]$

* جدول تغيرات g

x	$-\infty$		α		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}+\frac{1}{2}$	↘	0

$g\left(\frac{1}{2}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{e}}+\frac{1}{2}$

3/ لدينا أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث

$-0,74<\alpha<-0,73$

لدينا g دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0,74;-0,73[$

$g(-0,74)=$ ،

$g(-0,73)=$

و $g(-0,74)\times g(-0,73)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد بحيث $-0,74<\alpha<-0,73$

بحيث $g(\alpha)=0$

بـ/ استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g وبما $g(\alpha)=0$ ينتج

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II

$f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$

1/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\frac{-2x-3}{x}e^{-x}+1\right]$ ($-2x$)

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^x}-\frac{3}{e^x}+x$

$=+\infty$

2/ أ/ بيان أن $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} (-2x-3)e^{-x}+x-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-2x-3)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{e^x} - \frac{3}{e^x} = 0$$

ومنه $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

$$f(x)-y = (-2x-3)e^{-x}$$

إشارة الفرق من إشارة $(-2x-3)$

لأن $e^{-x}>0$

$$-2x-3=0 \Leftrightarrow -2x=3$$

$$x=\frac{-3}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x-3$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

3/ أ/ بيان أن $f'(x)=g(x)$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x) = -2e^{-x} - e^{-x}(-2x-3)+1$$

$$= e^{-x}\left(-2-(-2x-3)\right)+1$$

$$= (2x+1)e^{-x}+1$$

$$= g(x)$$

ج/ استنتاج اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x)=g(x)$

إذا كانت $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

* جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4/ بيان أن $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{2\alpha+1}$

نثبت أن

$$f(\alpha)-(\alpha+1)-\frac{2}{2\alpha+1}=0$$

$f(\alpha) - \alpha - 1 - \frac{2}{2\alpha+1} =$

$= (-2\alpha-3)e^{-\alpha} + \alpha - \alpha - 1 - \frac{2}{2\alpha+1}$

$= (-2\alpha-3)e^{-\alpha} - \frac{(2\alpha+1)+2}{2\alpha+1}$

$\frac{-(2\alpha+3)(2\alpha+1)e^{-\alpha} - (2\alpha+3)}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)[(2\alpha+1)e^{-\alpha}+1]}{2\alpha+1}$

$= \frac{-(2\alpha+3)\,g(\alpha)}{2\alpha+1} = 0$

حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$-0,74 < \alpha < -0,73$

$\boxed{0,26 < \alpha+1 < 0,27}$ (1)

$-1,48 < 2\alpha < -1,46$

$-0,48 < 2\alpha+1 < -0,46$

$-2,08 > \frac{1}{2\alpha+1} > -2,17$

$-4,16 > \frac{2}{2\alpha+1} > -4,34$

$\boxed{-4,34 < \frac{2}{2\alpha+1} < -4,16}$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد

$-4,08 < f(\alpha) < -3,89$

5/ بيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

لدينا f' قابلة لـ R على

$f''(x) = g'(x)$

x إشارة I

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f''(x)=g'(x)$	$+$	0	$-$

ومنه f'' تنعدم عند $x=\frac{1}{2}$ مغيرة إشارتها ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي

$\omega\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-1-3)e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\sqrt{e}}$

6/ إنشاء (C_f) و (Δ) (آخر الموضوع)

7/ تعيين a و b حتى تكون H دالة أصلية لـ h

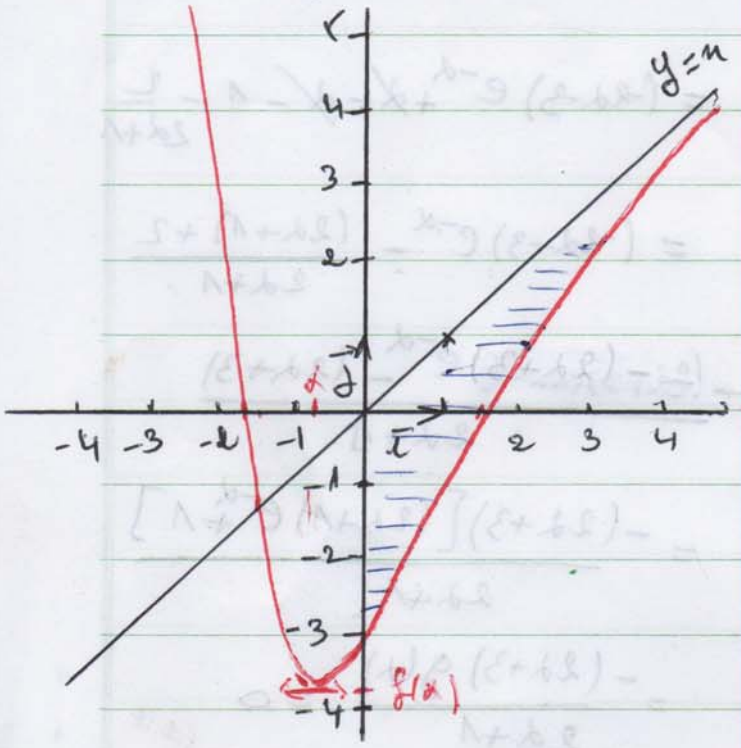
$H(x) = (ax+b)e^{-x}$

$h(x) = (-2x-3)e^{-x}$

$H'(x) = h(x)$

$H'(x) = a e^{-x} - (ax+b)e^{-x}$

$= (-ax-b+a)e^{-x}$



بالمطابقة مع الدالة h نجد

$-a=-2 \Rightarrow a=2$

$-b+a=-3 \quad b=3+a=5$

$$H(x)=(2x+5)e^{-x}$$

ج/ ب/ حساب المساحة $A(\lambda)$ المحددة بـ: (C_f) والمستقيمات

$y=x$ ، $x=\lambda$ ، $x=0$

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda} y-f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\lambda} x-(-2x-3)e^{-x}-x\,dx$$

$$=\left[-H(x)\right]_0^{\lambda}$$

$$=-H(\lambda)+H(0)$$

$$=-(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5 \text{ u.a}$$

حساب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty} -(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{-2\lambda}{e^{\lambda}}-\frac{5}{e^{\lambda}}+5$$

$$=5$$

ب/ 03 السؤال ②

$P(X^2-2X\leq 0)$

$X^2-2X=0$

$X(X-2)=0$

$X-2=0 \mid X=0$

$X=2 \mid$

X	$-\infty$		0		2		$+\infty$
X^2-2X		$+$	0	$-$	0	$+$	

$0\leq X\leq 2$ تكافئ X

$P(X^2-2X\leq 0)=P(0\leq X\leq 2)$

$=P(X=0)+P(X=1)$

$+P(X=1)$

$=\frac{230}{281}$