



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

لدينا 3 صناديق U_1, U_2, U_3 يحتوي الصندوق U_1 على لثوة حمراء واحدة و 9 كرات سوداء، الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 8 كرات سوداء، أما الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و 7 كرات سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق المختار

لتكن الأحداث : RR " الحصول على كرتين حمراوين " و NN " الحصول على كرتين سوداوين " ,

و NR " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

(1) انقل ثم اتمم شجرة الاحتمالات

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) حدد قيم المتغير العشوائي X , ثم بين أن $p(X = 2) = \frac{4}{135}$

(ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X , ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

(3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بشعبة تقني رياضي)

(1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x - 5y = 2$

(أ) اثبت انه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 4[11]$

(ب) استنتج حلول المعادلة (E)

(2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(ب) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون : $PGCD(a; b) = 2$

(ج) استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$

(أ) بين أن العدد $(n + 1)$ يقسم كل من العددين A و B

(ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية (1) $y' - 3y = 0$

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (1) ثم عين الحل الخاص f الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = \frac{-2}{3}$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها العام : $u_n = e^{3n+2}$

(أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، هل هي متقاربة ؟

(ب) ادرس اتجاه تغير (u_n)

(3) نعرف المتتالية (v_n) بما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

(أ) بين أن (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ج) احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ثم الجداء $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات التالية لكل سؤال جواب واحد صحيح حدده مع التعليل

(1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 3x + \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته :

(أ) $y = 3x$ (ب) $y = 3x + 1$ (ج) $y = 3x + 2$

(2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \int_1^\lambda x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$: علما أن الدالة $x \mapsto \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right]$ دالة أصلية للدالة

$x \mapsto x \ln x$, قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda) = \frac{1}{4}$ هي :

(أ) $\lambda = e^{-1}$ (ب) $\lambda = \sqrt{e}$ (ج) $\lambda = 2e$

(3) المعادلة $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما :

(أ) $S = \{1; -5\}$ (ب) $S = \{1; 5\}$ (ج) $S = \{-1; -5\}$

(4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

(أ) متزايدة تماما (ب) متناقصة تماما (ج) ليست رتيبة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث، $1,8 < \alpha < 1,9$

(4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(5) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

(6) احسب : $f(0)$, $f(3)$ ثم ارسم (T) , (Δ) و (C_f)

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = x + m$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

(1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$

ب) احسب I_1

(2) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n

ب) احسب I_2 .

(3) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما:

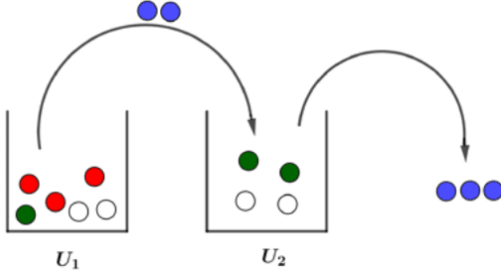
$x=1$ و $x=0$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

يحتوي صندوق U_1 على ست كرات منها ثلاثة كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض وكرة لونها أخضر، ويحتوي صندوق U_2 على أربع كرات منها كرتين خضراوين وكرتين لونهما أبيض. الكرات في صندوقين كلها متماثلة لا نفرق بينها باللمس. نقوم بإجراء عملية السحب العشوائي الآتية: نسحب عشوائيا وفي ان واحد كرتين من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الصندوق U_2



نعتبر الحدثين التاليين :

A: " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "

B: " سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى "

(1) أ) بين أن : $P(A) = \frac{17}{300}$

ب) أحسب: $P(B)$

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان التي تظهر بعد نهاية عملية السحب العشوائي

أ) أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب) أوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي

(3) أحسب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 من نفس اللون

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E): 5x - 6y = 3$

(1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعفا للعدد 3

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج) استنتج حلول للجملة (S) :
$$\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$$

(2) a و b عدنان طبيعيين حيث:

$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \leq n + 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة؟

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n) عند $+\infty$

ج) أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(4) لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) أحسب بدلالة n المجموع: $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

ج) استنتج بدلالة n الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) حل المعادلة التفاضلية $y'' = -e^x + 2$ والذي يحقق الشرطان $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$ هو :

أ) $y = x^2 - e^x + 2x + 2$ ب) $y = 2e^x - x$ ج) $y = -2x + e^x$

(2) يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاث رجال $H_1; H_2; H_3$ وأربع نساء $F_1; F_2; F_3; F_4$

احتمال أن هو H_1 الرئيس

أ) $\frac{6}{7}$ ب) $\frac{1}{7}$ ج) $\frac{4}{42}$

(3) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x+1}$:

القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[0; 2]$ هي

أ) $m = 4 - \ln \sqrt{3}$ ب) $m = 4 + \ln \sqrt{3}$ ج) $m = 2 - \ln \sqrt{3}$

(4) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \int_0^1 (1+x^n) dx$:

أ) (u_n) متتالية متناقصة ب) (u_n) متتالية متزايدة ج) (u_n) متتالية غير رتيبة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

(2) أدرس إشارة $g(x)$ (لاحظ أن : $g(1) = 0$)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ وليكن (C) منحنىها البياني في

المستوي السابق

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

(4) انشئ المنحنى (C)

(5) بين أن الدالة $h: x \rightarrow x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln x$ على $]0; +\infty[$ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة بين

أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

(6) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

انتهى الموضوع الثاني



التصحيح المفصل لامتحان البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(2.25)

$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$ (1)
 $P_{U_1}(NN) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2}, P_{U_1}(RN) = \frac{C_1^1 \times C_9^1}{C_{10}^2}$
 $P_{U_2}(RN) = \frac{C_2^1 \times C_8^1}{C_{10}^2}, P_{U_2}(RR) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2}$
 $P_{U_3}(NN) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2}$
 $P_{U_3}(RN) = \frac{C_2^1 \times C_7^1}{C_{10}^2}, P_{U_3}(RR) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2}$
 $P_{U_3}(NN) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2}$

$P(X=2) = \frac{4}{135}, X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ (2)
 $E(X) = \frac{2}{5}$ (ب)
 $P_{RR}(U_3) = \frac{3}{4}$ (3)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{17}{27}$	$\frac{46}{135}$	$\frac{4}{135}$

استعمل شجرة الاحتمالات

التمرين الثاني: (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

(0.5) **ج/** استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق من أجل $PGCD(a;b) = 2$ قيم n : $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$ ومنه: قيم n حيث $PGCD(a;b) = 1$ هي: $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}$

(0.5) **3/ أ/** نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B $n \in \mathbb{N}, B = 11n^2 + 15n + 4$ و $A = 5n^2 + 7n + 2$ $B = (n+1)(11n+4) = b(n+1), A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$ ومنه: $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

(0.5) **ب/** استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B : $PGCD(A;B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a;b)$ ومنه نميز حالتين:

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a;b) = 2$ معناه $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$ نجد: $PGCD(A;B) = (2\alpha+1)2 = 4\alpha+2$

(0.5) **الحالة 2:** إذا كان $PGCD(a;b) = 1$ معناه $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}$ نجد: $PGCD(A;B) = (2\alpha+1+1)1 = 2\alpha+2$

(1) **أ/** اثبات أن: $y \equiv 4[11], 11x - 5y = 2 \dots (E)$ $11x - 5y = 2$ يكافئ $5y = 11x + 2$ ومنه $5y \equiv -2[11]$ أي $5y \equiv 20[11]$ ومنه: $y \equiv 4[11]$

(0.5) **ب/** استنتاج حلول المعادلة (E) : معناه $y = 11k + 4$ مع $k \in \mathbb{N}$ نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد: $x = 5k + 2$ ومنه: $S = \{(11k+4; 5k+2) / k \in \mathbb{N}\}$

(0.5) **2/ أ/** تعيين القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a;b)$: $n \in \mathbb{N}^*, b = 11n + 4$ و $a = 5n + 2$ $11a - 5b = 11(5n+2) - 5(11n+4) = 55n+22-55n-20=2$ ومنه: $d \in D_2 = \{1; 2\}$ إذن $d/2$

(0.5) **ب/** تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b) = 2$ لدينا $PGCD(a;b) = 2$ معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b - 2a$ أي 2 يقسم $11n + 4 - 2(5n + 2)$ وبالتالي 2 يقسم n ومنه $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

	لدينا : $y' - 3y = 0$: (1)
0.5	(1) حل المعادلة التفاضلية : (1) - لدينا : $y' - 3y = 0$ يكافئ $y' = 3y$ حلل المعادلة هي الدوال f : $f(x) = ce^{3x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$
0.25	- تعيين الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$ $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$ يعني $ce^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 1$ ومنه $ce^{-2} = 1$ $\Leftrightarrow c = e^2$ ومنه $f(x) = e^2 \times e^{3x} = e^{3x+2}$
	(2) لدينا : $u_n = e^{3n+2}$
0.5 + 0.25 + 0.25	() تبين أن المتتالية (u_n) هندسية : - لدينا : $u_{n+1} = e^{3(n+1)+2} = e^{3n+3+2} = e^3 \times e^{3n+2} = e^3 \times u_n$ ومن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = e^3$ وحدها الأول $u_0 = e^2$
0.25	- تقارب المتتالية (u_n) : (u_n) هندسية أساسها $q = e^3$ $\Leftrightarrow q > 1$ ومنه (u_n) متناعدة
	لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{3n+2} = +\infty$
0.5	() دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : - لدينا : $u_{n+1} - u_n = e^{3n+5} - e^{3n+2} = (e^3 - 1)e^{3n+2}$ $\Leftrightarrow e^3 - 1 > 0 \gg u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
	(3) لدينا : $v_n = \ln(u_n)$
0.5	() تبين أن المتتالية (v_n) : $\mathbb{N}$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n. ولدينا : $v_n = \ln e^{3n+2} = 3n + 2$
0.25+0.5 0.25+	() تبين أن المتتالية (v_n) حسابية : - لدينا : $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 2 - (3n + 2) = 3$ ومنه (v_n) حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $v_0 = 2$
0.5	(i) « $\cdot$ » S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1) + 2)$ $\Leftrightarrow S_n = \frac{n}{2}(3n + 1)$
0.5	- « $\cdot$ » $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$: $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_{n-1}} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}$ $T_n = e^{\frac{n}{2}(3n+1)}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الاقتراح	الجواب	التبرير	التنقيط
1	الإجابة (ج) $y = 3x + 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} = 2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x + 2)] = 0$	2×0.5
2	الإجابة (ب) $\lambda = \sqrt{e}$	$A(\lambda) = \int_1^\lambda x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_1^\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \left(\ln \lambda - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4}$ $A(\lambda) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2} \left(\ln \lambda - \frac{1}{2} \right) = 0$ ومنه $\lambda = \sqrt{e}$ أو $\lambda = 0$ مرفوض لأن: $(\lambda > 1)$	2×0.5
3	الإجابة (ب) $S = \{1, 5\}$	$\log(11x^2 - 6x + 5) = \log x^2 + 1$ $\frac{\ln(11x^2 - 6x + 5)}{\ln 10} = \frac{\ln x^2}{\ln 10} + 1$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x = 1, x = 5$	2×0.5
4	الإجابة (أ) متزايدة تماما	$u_{n+1} - u_n = \left(2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) - \left(2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = -3 \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} + 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^n > 0$	2×0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

0.25	I. لدينا : $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$ (1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x^2 + 1)e^{-x+1} = -\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$									
0.25	• تبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2 + 1}{e \times e^x} \right)$									
	أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$									
0.5	ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x - 1)^2 e^{-x+1}$ • لدينا : $f'(x) = 1 - [2xe^{-x+1} + (x^2 + 1)(-e^{-x+1})] = 1 - (2x - x^2 - 1)e^{-x+1}$ وبالتالي : $f'(x) = 1 + (x^2 - 2x + 1)e^{-x+1} = 1 + (x - 1)^2 e^{-x+1}$									
0.25	ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$(x - 1)^2 e^{-x+1}$</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$(x - 1)^2 e^{-x+1}$		+	$f'(x)$		+
x	$-\infty$	$+\infty$								
$(x - 1)^2 e^{-x+1}$		+								
$f'(x)$		+								

• جدول التغيرات :

0.5

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0.25

(2) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x+1} + e^{-x+1}) = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

0.5

• دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x) - x = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x = -(x^2 + 1)e^{-x+1}$
 إذن $f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

0.5

(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$:

لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8; 1.9]$
 ولدينا $f(1.8) = 1.8 - ((1.8)^2 + 1)e^{-1.8+1} = -0.11$
 $f(1.9) = 1.9 - ((1.9)^2 + 1)e^{-1.9+1} = 0.03$
 وبالتالي $f(1.8) \times f(1.9) < 0$
 حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

0.5

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = x - 2 \quad \text{أي} \quad y = 1 \times (x-1) - 1 = x - 2$$

01

(5) تبيان أن $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

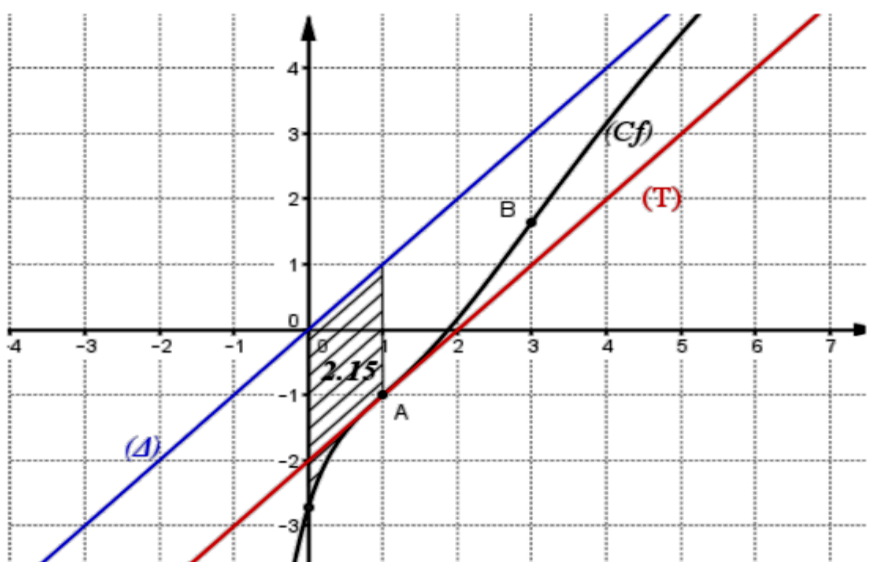
لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times (-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$
 أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.

• استنتاج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :

- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f''(x)$		-	0	+	0	-

• المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن
 النقطتين $A(1; f(1)), B(3; f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f)

0.75	(6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3) = 3 - 9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$ الرسم : 
0.5	(7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = x + m$ • هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ الموازي لكل من (Δ) و (T). • إذا كان $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا . • إذا كان $m = -e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . • إذا كان $m \in]-e; 0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا . • إذا كان $m \in [0; +\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .
0.25	II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$ 1- أ) تبين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x) = xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$: • لدينا : $G'(x) = -[e^{-x+1} - (x+1)e^{-x+1}] = -(e^{-x+1} - xe^{-x+1} - e^{-x+1}) = xe^{-x+1} = g(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.
0.25	ب) حساب I_1 : • لدينا : $I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1} dx = [-(x+1)e^{-x+1}]_0^1 = -2e^0 + e = e - 2$
0.25	2- أ) تبين أن $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ • لدينا : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$ نضع : $u(x) = x^{n+1}$ ومنه $u'(x) = (n+1)x^n$ ونضع : $v'(x) = e^{-x+1}$ ومنه $v(x) = -e^{-x+1}$ وبالتالي : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx = [-x^{n+1} e^{-x+1}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{-x+1}) dx$ ومنه : $I_{n+1} = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx = -1 + (n+1)I_n$
0.25	ب) حساب I_2 : $I_2 = -1 + (1+1)I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e-5$
0.25	3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادليهما $x=1, x=0$: $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx = \int_0^1 x - x + (x^2 + 1)e^{-x+1} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x+1} dx$ أي $S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1$ $S = (2e-5-1+e)us = (3e-6)cm^2 = 2.15cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) أ) تبين أن : $p(A) = \frac{17}{300}$

(0.5).....
$$p(A) = \left(\frac{C_2^2}{C_6^2} \times \frac{C_4^3}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_1^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^3}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_2^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^3}{C_6^3} \right) = \frac{17}{300}$$

ب) حساب $p(B)$:

(0.5).....
$$p(B) = \left(\frac{C_3^2}{C_6^2} \times \frac{C_2^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_1^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_2^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} \right) = \frac{13}{50}$$

(0.25)..... (2) أ) تحديد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : $\{1; 2; 3\}$

$P(X=2) = 1 - (P(X=1) + P(X=3))$; $P(X=3) = P(B)$; $P(X=1) = P(A)$

(1.5).....

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{17}{300}$	$\frac{205}{300}$	$\frac{78}{300}$

(0.5)..... ب) الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X هو : $E(X) = \frac{661}{300}$

(1) حساب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 من نفس اللون نسبي C : "سحب كرتين من U_1 من نفس اللون " ، D : "سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 "

(0.75).....
$$P_c(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{C_2^2}{C_6^2} \times \frac{C_4^3}{C_6^3}}{\frac{C_3^2 + C_2^2}{C_6^2}} = \frac{1}{20}$$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

(0.5)	13 : 1 $(E): 5x - 6y = 3$ 50 (1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 : • لدينا : $5x - 6y = 3$ تكافئ $5x = 3 + 6y$ - أي $5x = 3(1 + 2y)$ • لدينا : $3/5x$ و $3 \wedge 5 = 1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3
0.5	ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x = 3$ وبالتالي : $y = \frac{5 \times 3 - 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$ أي الثنائية $(3; 2)$ حل للمعادلة (E)

(0.75)	• حل المعادلة (E): لدينا : $5x - 5 \times 3 = 6y - 6 \times 2$ يكافئ $5x - 6y = 5 \times 3 - 6 \times 2$ أي $(*) : 5(x - 3) = 6(y - 2)$ • لدينا : $6 / 5(x - 3) = 1$ و $6 / (x - 3) = 5$ حسب مبرهنة غوص . • أي $x - 3 = 6k (k \in \mathbb{Z})$ وبالتالي $x = 6k + 3 (k \in \mathbb{Z})$ • من أجل $x = 6k + 3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k + 3 - 3) = 6(y - 2)$ ومنه $y - 2 = 5k (k \in \mathbb{Z})$ أي $y = 5k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S = \{(6k + 3; 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}$
0.75	ج استنتاج حلول الجملة : $(S) : \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$ • $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = 6m - 1 \\ x = 5n - 4 \end{cases}$ أي $6m - 1 = 5n - 4$ ومنه $5n - 6m = 3$ ومنه : $n = 6k + 3$ وبالتالي $x = 5(6k + 3) - 4 = 30k + 11 (k \in \mathbb{Z})$
0.75	2- لدينا : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}^3$ و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}^5$ • تعيين $(\alpha; \beta)$ بحيث تكون $(a; b)$ حل للمعادلة (E): لدينا : $a = 1 \times 3^5 + \alpha \times 3^4 + \alpha \times 3^2 = 243 + 81\alpha + 9\alpha = 243 + 90\alpha$ ولدينا : $b = \alpha \times 5^3 + \beta \times 5^2 + \alpha \times 5^0 = 125\alpha + 25\beta + \alpha = 126\alpha + 25\beta$ مع $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$ • الثانية $(a; b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a - 6b = 3$ ومنه $5(243 + 90\alpha) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$ أي $-306\alpha - 150\beta = -1212$ ومنه $1215 + 450\alpha - 756\alpha - 150\beta = 3$ بعد تقسيم الطرفين على العدد 3- نجد : $102\alpha + 50\beta = 404$ وبالتالي $(\alpha; \beta) = (2; 4)$ حل للمعادلة

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(0.75).....	نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ 1- حساب الحدود u_1, u_2, u_3 : $u_1 = \frac{7}{3}, u_2 = \frac{26}{9}, u_3 = \frac{97}{27}$
(0.25).....	• تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) : متتالية متزايدة 2- أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n + 3$ لتكن فرضية التراجع $P(n) : u_n \leq n + 3$ * المرحلة 1: الخاصية $P(0)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 2$ أي $u_0 \leq 3$ $P(n) : u_n \leq n + 3$ * المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$ أي $u_n \leq n + 3$ و نبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي $u_{n+1} \leq n + 1 + 3$ أي $u_{n+1} \leq n + 4$ لدينا $u_n \leq n + 3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1 = n + 3$ وبالتالي $u_{n+1} \leq n + 3$ ولدينا $n + 3 \leq n + 4$ ومنه $u_{n+1} \leq n + 4$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$. * الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. إذن $u_n \leq n + 3$
(0.5).....	

ب- دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) :

$$(0.5) \dots \dots \dots u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

$$-\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \geq 0 \text{ و بالتالي } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ و منه متزايدة}$$

ج- استنتاج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة:

$$(0.25) \dots \dots \dots \text{لدينا } (u_n) \text{ متزايدة معناه } u_n \geq u_0 \text{ أي } u_n \geq 2 \text{ نستنتج أن } (u_n) \text{ محدودة من الأسفل بالعدد } 2.$$

لا يمكن القول أن (u_n) متقاربة: لأنها متزايدة و ليست محدودة من الأعلى

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها:

$$(0.5) \dots \dots \dots (v_n) \text{ هي متتالية هندسية معناه } v_{n+1} = v_n \times q$$

$$\text{لدينا } v_n = u_n - n \text{ و منه } v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 \text{ و بالتالي } v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$$

$$\text{أي } v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) \text{ و منه } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \text{ و بالتالي:}$$

$$(v_n) \text{ هي متتالية هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ و حدها الأول } v_0 = u_0 - 0 = 2$$

ب- التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم حساب نهاية (u_n) عند $+\infty$

$$(0.5) \dots \dots \dots \lim u_n = +\infty : u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n \text{ و منه } u_n = v_n + n, v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ أي } v_n = v_0 \times q^n$$

ج- حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + n) = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 2 + \dots + n$$

$$(0.5) \dots \dots \dots = 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + n(n+1) = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + n(n+1)$$

4- لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ- البرهان أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول: (t_n) حسابية معناه $t_{n+1} = t_n + r$

$$\text{لدينا } t_n = \ln(v_n) \text{ و منه } t_{n+1} = \ln(v_{n+1}) \text{ أي } t_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{3}v_n\right) = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$(0.5) \dots \dots \dots \text{لأن } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \text{ و منه } t_{n+1} = t_n + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و منه } (t_n) \text{ حسابية أساسها } r = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و وحدها}$$

$$\text{الأول } t_0 = \ln(v_0) = \ln(2)$$

ب- حساب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

$$(0.5) \dots \dots \dots A_n = \frac{n+1}{2}(\ln(2) + \ln(2) + n \ln\left(\frac{2}{3}\right)) = \frac{n+1}{2}(2\ln(2) + n \ln\left(\frac{2}{3}\right))$$

• استنتاج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

$$(0.25) \dots \dots \dots P_n = e^{S_n} \text{ و منه } v_n = e^{t_n} : \text{لأن } P_n = e^{t_0} \times e^{t_1} \times e^{t_2} \times \dots \times e^{t_n} = e^{t_0 + t_1 + \dots + t_n}$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

التنقيط	التبرير	الجواب	الاقتراح
2×0.5	$y' = -e^{-x} + 2x + c_1 \Rightarrow y'(0) = -1 + c_1 = 1; c_1 = 2$ $y = -e^{-x} + 2x + c_2 \Rightarrow y(0) = -1 + c_2 = 1; c_2 = 2$ $y = -e^{-x} + x^2 + 2x + 2$	الإجابة (أ) $y = -e^{-x} + x^2 + 2x + 2$	1
2×0.5	$\frac{A_1^1 \cdot A_6^1}{A_7^2} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$	الإجابة (ب) $\frac{1}{7}$	2
2×0.5	$m = \frac{1}{2} \int_0^2 3x^2 - \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} [x^3 - \ln(x+1)]_0^2$ $m = \frac{8}{2} - \frac{\ln(3)}{2} = 4 - \ln \sqrt{3}$	الإجابة (أ) $m = 4 - \ln \sqrt{3}$	3
2×0.5	$u_n = \left[x + \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{n+1}$ $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+2} - 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$	الإجابة (أ) متناقصة تماما	4

التمرين الرابع : (07 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

(0.5)..... $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

(0.5)..... استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

	x	0	1	$+\infty$
(0.5).....	إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$ و منه

(0.5)..... $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0$ (التزايد المقارن) . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\ln(t)}{t} \right]^2 = 0$

(0.5)..... حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ لدينا

(0.5).....
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

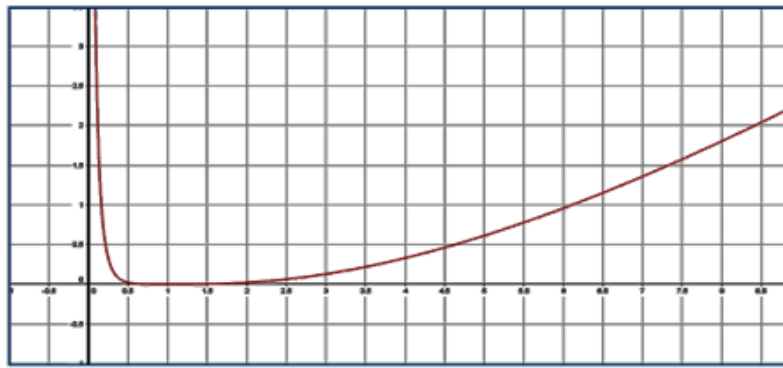
حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ ومنه المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارب عمودياً معادلته $x=0$.
(0.75).....

2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ؛ بالحساب $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ ومنه

(0.5).....
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}(\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



3- رسم المنحني (C) : (0.5).....

4- بين أن الدالة $h: x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$

(0.5).....
محقة $h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$

باستعمال التكامل بالتجزئة

(0.75)..... تبين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x) = 1$ و $v(x) = (\ln x)^2$ ومنه $u(x) = x$ و $v'(x) = \frac{2}{x}(\ln x)$

و $u'(x) = 1$ و $\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x) dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$

5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$$
 ومنه $\int_1^e f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$

(0.5).....
$$\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$$

انتهى الموضوع الثاني