

الخليف للرياضيات

سنة **ثالثة** ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

إمتحان بكالوريا تجريبية 2022

شعبة

علوم تجريبية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

تاريخ النشر:

[17 ماي 2022]

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



دورة: 2022
الشعبة: علوم تجريبية

الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات
إمتحان بكالوريا تجريبي
ثانوية: صديقي النوري - الجلصة

المدة: 03 ساعات

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، اقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

① حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي:

أ/ $y = e^{x+1}$ ب/ $y = e^{x+1} - e^x + 1$ ج/ $y = e^{x+1} + 1$

② قيمة التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^1 x e^x dx$ هي:

أ/ $A = 2e^{-1}$ ب/ $A = 2e$ ج/ $A = 2 + e$

③ حلول المعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي:

أ/ $S \in \{-1; 1\}$ ب/ $S \in \{0\}$ ج/ $S \in \{-1\}$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ 1، 1، 2 وخمس كرات بيضاء مرقمة بـ 1، 1، 1، 2، 2 وكرتان خضراوان مرقمتان بـ -1، -1 (كل الكرات لا تميز بينها عند اللمس)
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات
نعتبر الحوادث التالية:

A: "الكرات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى"

B: "يوجد على الأقل كرة خضراء واحدة"

C: "الكرات المسحوبة مجموع أرقامها معدوم"

① احسب احتمال الحوادث A، B و C

② علما أنّ مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم، ما احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى

③ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد ألوان الكرات المسحوبة

أ/ بين أنّ $p(X=2) = \frac{79}{120}$ ، ثم أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب/ احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم احسب الاحتمال $P(X^2 - 2X \geq 3)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right)$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $2 < u_n < 4$

② بيّن أن (u_n) متزايدة تماما ، ثمّ استنتج أنها متقاربة

③ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

④ استنتج أنّ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ ثمّ احسب $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

⑤ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

أ/ بيّن أنّ (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب/ اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + x + 2 \ln x$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g

② احسب $g(1)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$

II الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{-1 + (x-2) \ln x}{x}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)

① احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، وفسر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب/ عيّن اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

③ ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة : $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ)

④ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β ، ثم تحقق أن :

$$0.5 < \alpha < 0.6 \text{ و } 2.9 < \beta < 3$$

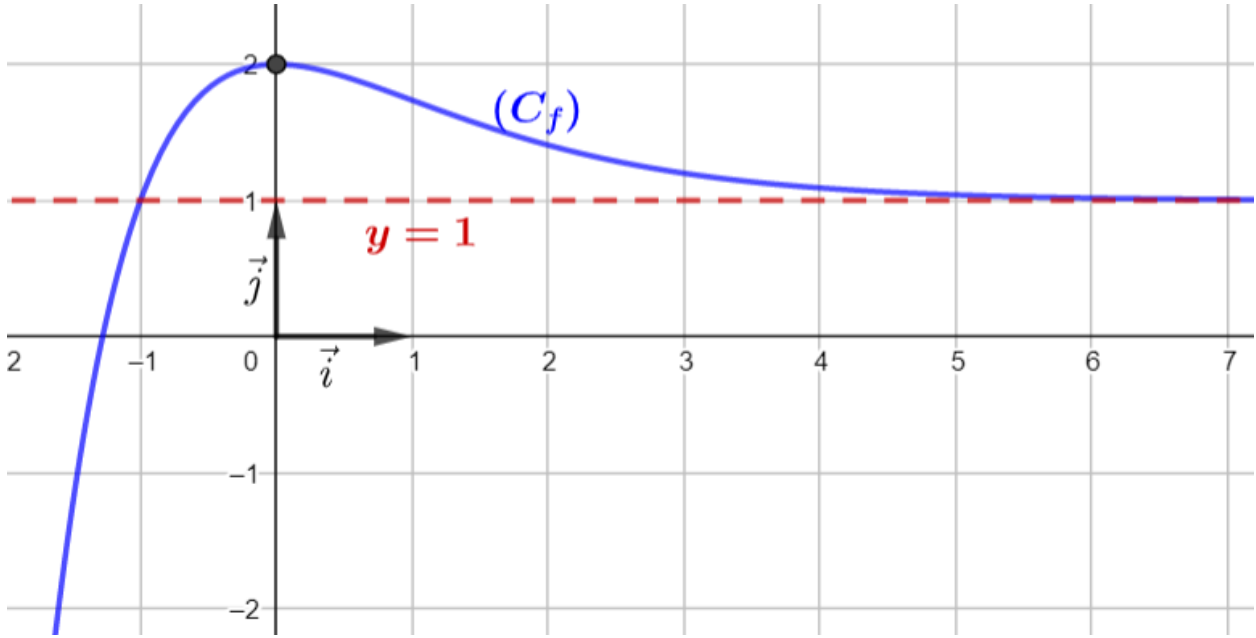
⑤ ارسم (Γ) ثم (C_f)

⑥ احسب A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (Γ) والمستقيمان ذو المعادلتان $x = 1$ و $x = e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط)

(I) دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax + b)e^{-x} + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية
تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)



- بقراءة بيانية، عيّن a, b, c

(II) نضع: $a = b = c = 1$

① باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل -1

② بيّن أن $A = (e - 1)cm^2$ حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = 0$ و $x = -1$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

سند وق به ثلاث كريات حمراء وأربع كريات بيضاء و كريتين خضراوين

نسحب عشوائيا كريتان على التوالي بدون إرجاع

نعتبر الحوادث التالية: A : "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون"

B : "سحب كريّة بيضاء في المرة الأولى"

① احسب احتمال الحوادث A و B

② استنتج احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين

③ علما أنّ الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء، احسب احتمال سحب كرتان من نفس اللون

④ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم أكتب قانون احتماله

ب/ احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم احسب $E(1443X + 2022)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

① ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

② بين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإن: $f(x) \geq 1$

(II) لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإن: $u_n \geq 1$

② بين أن (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

③ نضع من أجل كل n طبيعي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ/ بين أن (w_n) هندسية أساسها 2 واحسب w_0

ب/ اكتب بدلالة n عبارة w_n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة v_n

④ استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية (u_n)

⑤ أ/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) \geq 0$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x - 2 + xe^{2-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في

مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول هي 1cm)

① احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)]$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) حيث $y = x - 2$: (Δ)

③ أ/ بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

④ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$

⑤ بين (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها

⑥ بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلتها له

⑦ ارسم (T) ، (Δ) و (C_f)

⑧ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$



تصحيح مقترح لاختبار مادة الرياضيات

الموضوع الأول

♦ التمرين الأول: (03 نقاط)

1 حلل للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي: $y = e^{x+1} - e^x + 1$ [01ن]

التبرير:

لدينا:

$$y - y' = 1 \Rightarrow y' = y - 1 \Rightarrow y = Ce^x - \frac{-1}{1} \Rightarrow Ce^x + 1$$

ولدينا:

$$y(0) = e \Rightarrow Ce^0 + 1 = e \Rightarrow C = e - 1$$

ومنه:

$$y = (e - 1)e^x + 1 \Rightarrow y = e^{x+1} - e^x + 1$$

2 التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^1 (xe^x) dx$ هي: $A = 2e^{-1}$ [01ن]

التبرير:

$$A = \int_{-1}^1 (xe^x) dx$$

$$\text{نضع: } u(x) = x \quad \text{و} \quad v'(x) = e^x$$

$$\text{ومنه: } u'(x) = 1 \quad \text{و} \quad v(x) = e^x$$

إذن:

$$A = \int_{-1}^1 (xe^x) dx = [xe^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = [xe^x - e^x]_{-1}^1 = 2e^{-1}$$

3 حلل للمعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي: $S \in \{-1\}$ [01ن]

التبرير:

$$e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow e^x = \sqrt{e^{x-1}} \Rightarrow e^{2x} = e^{x-1} \Rightarrow 2x = x - 1 \Rightarrow x = -1$$

♦ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1 حساب احتمال الحوادث A ، B و C : [1.5ن]

$$p(A) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 5 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$

$$p(B) = \frac{C_2^1 C_8^2 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{2 \times 28 + 1 \times 8}{120} = \frac{8}{15}$$

$$p(C) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 3}{120} = \frac{3}{40}$$

② حساب احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى علما أن مجموع أرقامها معدوم:

$$p_c(A) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{C_2^1 C_2^1 C_1^1}{C_{10}^3}}{\frac{3}{40}} = \frac{\frac{2 \times 2 \times 1}{120}}{\frac{3}{40}} = \frac{4}{9}$$

③ / تبين أن $p(X = 2) = \frac{79}{120}$:

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 C_7^1 + C_5^2 C_5^1 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{79}{120}$$

- كتابة قانون احتمال X :

لدينا: $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ حيث:

$$p(X = 1) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$$

$$p(X = 2) = \frac{79}{120}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$$

ومنه:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = 1 \frac{11}{120} + 2 \frac{79}{120} + 3 \frac{30}{120} = \frac{259}{120}$$

• حساب $P(X^2 - 2X \geq 3)$:

$$P(X^2 - 2X \geq 3) = P(X^2 - 2X - 3 \geq 0) = P((X + 1)(X - 3) \geq 0)$$

لدينا:

X	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$(X+1)(X-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

إذن:

$$P(X^2 - 2X \geq 3) = P(X = 3) = \frac{30}{120}$$

♦ التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

① برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $2 < u_n \leq 4$:

نسمي الخاصية $P(n) : 2 < u_n < 4$...

• لدينا: $2 < u_0 < 4$ ومنه: $2 < 3 < 4$ إذن القضية $P(n)$ محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أن: $2 < u_n < 4$ ونثبت أن $2 < u_{n+1} < 4$

• لدينا:

$$2 < u_n < 4 \Rightarrow 4 < u_n + 2 < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{3}{u_n + 2} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < 1 - \frac{3}{u_n + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right) < 4 \Rightarrow 2 < u_{n+1} < 4$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة

② تبين أن (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتاج أنها متقاربة؛

[0.5]

$$u_{n+1} - u_n = 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right) - u_n = \frac{-(u_n)^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $0 < u_n - 2 < 2$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $-2 < u_n - 4 < 0$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $4 < u_n + 2 < 6$

إذن: $\frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$ وعليه (u_n) متزايدة تماما

• وبما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة

③ تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ ؛

[0.5]

لدينا:

$$4 - u_{n+1} = 4 - 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right) \Rightarrow 4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$$

ولدينا: (u_n) متزايدة ولدينا $u_0 = 3$ ومنه:

$$u_n \geq 3 \Rightarrow u_n + 2 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{4(4 - u_n)}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)}$$

④ استنتاج أن $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ؛

[0.5]

لدينا: $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ ومنه:

$$\begin{cases} 4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \\ 4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1) \\ \vdots \\ 4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$(4 - u_1) \times (4 - u_2) \times \dots \times (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \frac{4}{5}(4 - u_1) \times \dots \times \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$$

ومنه:

$$4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0) \Rightarrow 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \dots (*)$$

ولدينا:

$$u_n < 4 \Rightarrow -4 < -u_n \Rightarrow 0 < 4 - u_n \dots (**)$$

من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

[0.5ن]

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$:

$$0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) \leq 0$$

حسب مبدأ النهايات بالحصص نجد أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 4 \quad \text{ومنه:}$$

⑤

[0.5ن]

أ/ تبين أن (v_n) هندسية محددًا أساسها وحدها الأول:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - 4}{8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - 2} = \frac{4u_n - 16}{6u_n - 12} = \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} = \frac{2}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 2} = -1$$

[0.5ن]

ب/ كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

[0.5ن]

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} \Rightarrow v_n u_n - 2v_n - u_n = -4 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = -4 + 2v_n$$

$$\Rightarrow u_n = 2 \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow \boxed{u_n = 2 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}}$$

[0.5ن]

ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n

$$u_n = 2 \frac{v_n - 2}{v_n - 1} = 2 \frac{v_n - 1 - 1}{v_n - 1} = 2 \left(1 - \frac{1}{v_n - 1}\right)$$

ومنه:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = -\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \boxed{3 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1 \right)}$$

♦ التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I)

[0.5ن]

① دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = 1 + 2 \frac{1}{x} = \frac{x + 2}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$ ومنه الدالة g متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}_+^*$

[0.25ن]

② حساب $g(1)$:

$$g(1) = -1 + 1 + 2 \ln 1 = 0$$

[0.5ن]

- استنتاج إشارة $g(x)$:بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$ ، و $g(1) = 0$ فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 / حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$: [0.5ن]

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + \overbrace{x \ln x}^0 - 2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: [0.5ن]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

2 / تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$: [0.75ن]

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \frac{x-2}{x} \right) x - (-1 + (x-2) \ln x)}{x^2} = \frac{x - 1 + 2 \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها : [0.75ن]

لدينا : $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

3 / حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$: [0.75ن]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1 + (x-2) \ln x}{x} - \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} - \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي : (C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ) : [0.5ن]

$$\begin{aligned} f(x) - \ln x = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Rightarrow -1 - 2 \ln x = 0 \\ &\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	+	0	-

• (C_f) فوق (Γ) لما $x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$

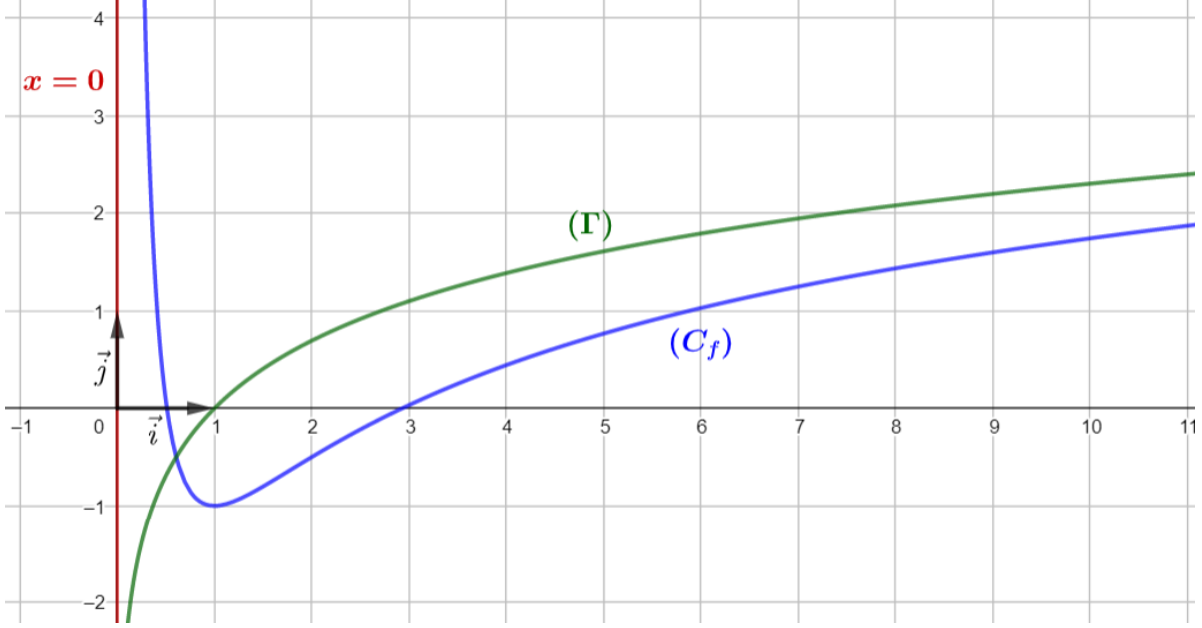
• (C_f) يقطع (Γ) لما $x = e^{-\frac{1}{2}}$

• (C_f) تحت (Γ) لما $x \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

[01ن]

4 تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين**- التحقق أن: $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$:**• لدينا: $f(0.6) \times f(0.5) < 0$ لأن: $f(0.6) \approx -0.47$ و $f(0.5) \approx 0.08$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 0.6[$ • لدينا: $f(2.9) \times f(3) < 0$ لأن: $f(2.9) \approx -0.01$ و $f(3) \approx 0.03$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]2.9; 3[$ **5 رسم (Γ) و (C_f) :**

[01ن]

**6 حساب A :**

[01ن]

$$A = \int_1^e (\ln x - f(x)) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x} \ln x \right) dx = \left[\ln x + 2 \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e$$

$$= [\ln x + (\ln x)^2]_1^e = \boxed{2} cm^2$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل



الموضوع الثاني

♦ التمرين الأول: (03 نقاط)

(I) [1.5ن] تعيين a, b و c

من البيان نجد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} ((ax + b)e^{-x} + c) = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

• ولدينا:

$$f(0) = 0 \Rightarrow (a(0) + b)e^{-(0)} + c = 2 \Rightarrow b + c = 2 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

• ولدينا:

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x}$$

ومنه:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow (a - b - a(0))e^{-(0)} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

(II)

① تعيين دالة أصلية للدالة f : [01ن]

نسعي: $g(x) = (x + 1)e^{-x}$

نضع: $v'(t) = e^{-t}$ و $u(x) = t + 1$

ومنه: $v(t) = -e^{-t}$ و $u'(t) = 1$

إذن:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-1}^x (t + 1)e^{-t} dt = [-(t + 1)e^{-t}]_{-1}^x - \int_{-1}^x -e^{-t} dt \\ &= [-(t + 1)e^{-t}]_{-1}^x - [e^{-t}]_{-1}^x = [-(t + 2)e^{-t}]_{-1}^x = \boxed{-(x + 2)e^{-x} + e} \end{aligned}$$

② تبين أن $A = e - 2$ [0.5ن]

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 ((x + 1)e^{-x} + 1) dx = \int_{-1}^0 (x + 1)e^{-x} dx + \int_{-1}^0 dx \\ &= [-(x + 2)e^{-x}]_{-1}^0 + [x]_{-1}^0 = [-(x + 2)e^{-x} + x]_{-1}^0 \\ &= \boxed{(e - 1)} cm^2 \end{aligned}$$

♦ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

① حساب احتمال الحوادث A و B : [01ن]

$$p(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2 + A_2^2}{A_9^2} = \frac{\boxed{20}}{\boxed{72}} = \frac{5}{18}$$

$$p(B) = \frac{A_4^1 A_8^1}{A_9^2} = \frac{\boxed{32}}{\boxed{72}} = \frac{4}{9}$$

② استنتاج احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين: [0.5ن]

$$p(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{20}{72} = \frac{\boxed{52}}{\boxed{72}} = \frac{13}{18}$$

3 حساب احتمال سحب كرتان من نفس اللون علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء:

[0.5ن]

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{A_4^2}{A_9^2}}{\frac{32}{72}} = \frac{\frac{12}{72}}{\frac{32}{72}} = \frac{3}{8}$$

4

أ/ تعيين قيم المتغير العشوائي X ، وكتابة قانون احتماله:

[1.5ن]

لدينا: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ حيث:

$$p(X = 0) = \frac{A_5^2}{A_9^2} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$p(X = 1) = \frac{2A_4^1 A_5^1}{A_9^2} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

$$p(X = 2) = \frac{A_4^2}{A_9^2} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

ومنه:

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{20}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{12}{72}$

ب/ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

[0.5ن]

$$E(X) = 0 \frac{20}{72} + 1 \frac{40}{72} + 2 \frac{12}{72} = \frac{8}{9}$$

• حساب $E(1443X + 2022)$:

[0.5ن]

$$E(1443X + 2022) = 1443E(X) + 2022 = \frac{9914}{3}$$

♦ التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I)

1 دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

[0.5ن]

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} > 0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

2 تبين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإن: $f(x) \geq 1$:

[0.25ن]

من جدول تغيرات الدالة f نجد أن $f(x) \geq 1$

(II)

1 برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإن: $u_n \geq 1$:

[0.5ن]

نسمي $u_n \geq 1 \dots P(n)$

• لدينا: $u_0 \geq 1$ ومنه: $2 \geq 1$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n \geq 1$ ونثبت صحة $u_{n+1} \geq 1$

• لدينا: $u_n \geq 1$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ فإن:

$$u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

② تبين أن (u_n) متناقصة تماما ، واستنتاج أنها متقاربة:

[0.5ن]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1}$$

لدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $1 - u_n \leq 0$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $2u_n - 1 \geq 1$

إذن:

$$\frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} < 0$$

وعليه (u_n) متناقصة تماما

• وبما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

③

أ/ تبين أن (w_n) هندسية أساسها 2 وحساب w_0 :

[0.5ن]

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2 \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2 \ln(v_n) = 2w_n \end{aligned}$$

ولدينا: $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $-\ln 2$

ب/ كتابة بدلالة n عبارة w_n :

[0.5ن]

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \boxed{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}$$

• **استنتاج بدلالة n عبارة v_n :**

[0.5ن]

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow e^{w_n} = v_n \Rightarrow v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)} \Rightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

④ استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

[0.5ن]

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow v_n u_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}}$$

• **حساب نهاية (u_n) :**

[0.5ن]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} \right) = \boxed{1}$$

لأن: $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 0$

5

أ/ كتابة بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right) = \boxed{\ln(2)(1 - 2^{n+1})}$$

[0.5ن]

ب/ كتابة بدلالة n الجداء P_n :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \dots \times e^{w_n} = e^{w_0 + w_1 + \dots + w_n} = e^{S_n} = e^{\ln(2)(1 - 2^{n+1})}$$

$$= \boxed{2^{(1 - 2^{n+1})}}$$

[0.25ن]

♦ التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

(I)

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها:

[0.1ن]

- النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}e^2 - xe^{-x}e^2 + 1) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

- المشتقة:

$$g'(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-2$:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	1

2 تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) \geq 0$:

[0.5ن]

من جدول تغيرات الدالة g نجد أن $g(x) \geq 0$ (لأن الدالة g تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة)

(II)

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

[0.5ن]

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2 - (-x)e^{-x}e^2) = \boxed{+\infty}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

2 أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)]$:

[0.5ن]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{2-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(-x)e^{-x}e^2] = 0$$

• نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x+2$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

[0.5ن]

$$f(x) - (x+2) = xe^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة x :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 0[$

- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = 0$

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$

3 / تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x} + 1 = g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4 تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$:

لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $0 < f(0.31) \times f(0.32) < 0$ لأن: $f(0.31) \approx -0.01$ و $f(0.32) \approx 0.04$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.31; 0.32[$

5 تبين (C_f) يقبل نقطة إنعطاف :

لدينا: $f'(x) = g(x)$

ومنه: $f''(x) = g'(x)$

إذن إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

المشتقة الثانية تنعدم عند $x = 2$ وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $(\Omega(2; f(2)))$ أي: $\Omega(2; 2)$

6 تبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) :

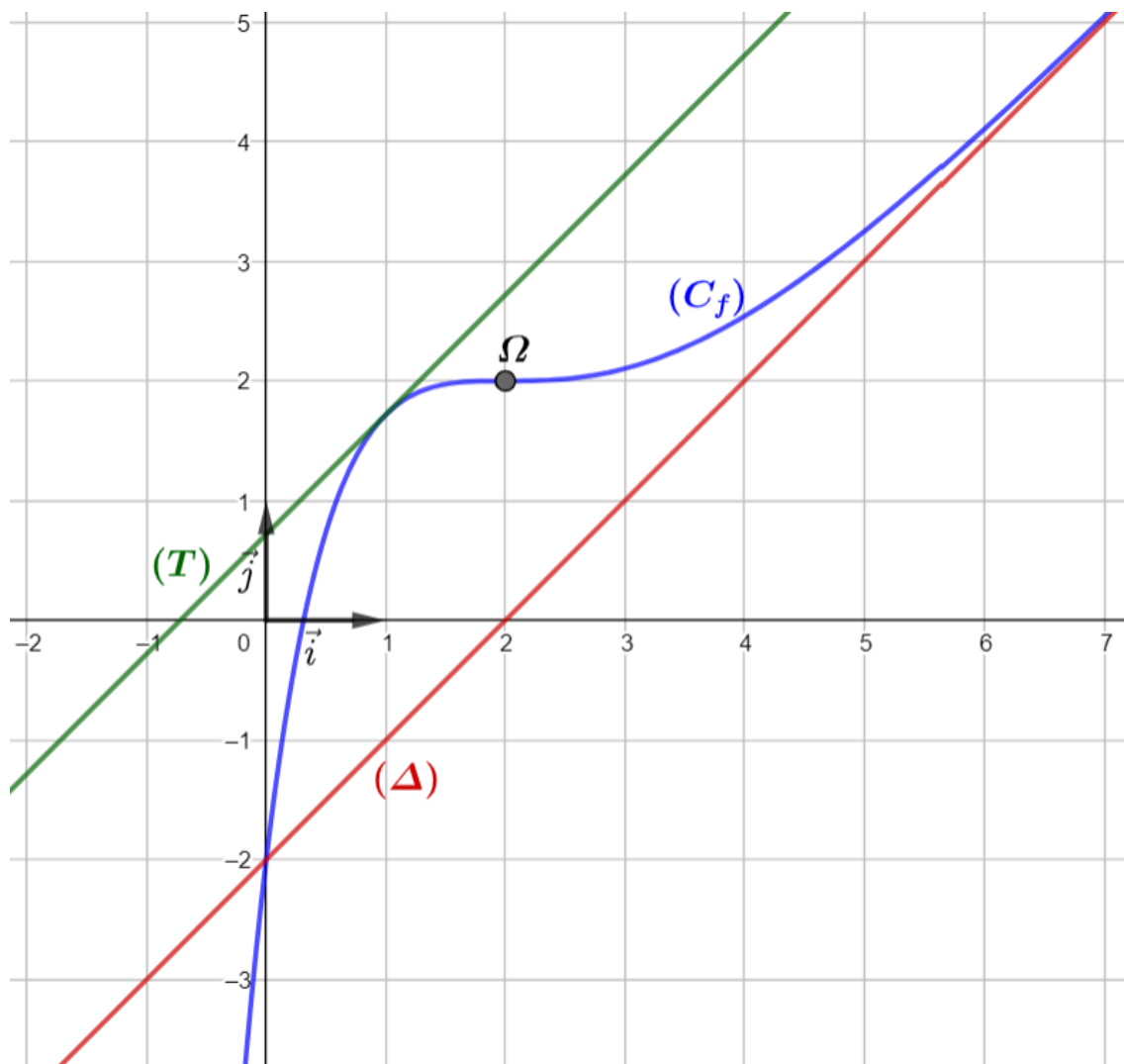
$$f'(a) = 1 \Rightarrow (1-a)e^{2-a} + 1 = 1 \Rightarrow (1-a)e^{2-a} = 0 \Rightarrow 1-a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

إذن (C_f) يقبل مماسا موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

- كتابة معادلة (T) :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = \boxed{x + e - 2}$$

7 رسم (T) ، (Δ) و (C_f) :



[0.5ن]

8 المناقشة البيانية:

حلول المعادلت $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y_m = x + m$

وهي:

المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما	$m < -2$	لما
المعادلة تقبل حلا معدوما	$m = -2$	لما
المعادلة تقبل حلين موجبين	$-2 < m < e - 2$	لما
المعادلة تقبل حلا وحيدا قيمته $x = 1$	$m = e - 2$	لما
المعادلة لا تقبل حلولا	$m > e - 2$	لما

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

