

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

الشعبة: تقني رياضي

دورة: 2021

ثانوية مرسى الحجاج (وهران)

إعداد: الأستاذ قوعيش

تصحيح اختبار مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2011x - 1432y = 31$ (E)

(أ) بين أن العدد 2011 أولي .

لدينا $44,8 \approx \sqrt{2011}$ والعدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي من بين الأعداد الأولية الأصغر من 44

(ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

لدينا :

$$579 = 2011 - 1 \times 1432$$

$$274 = 1432 - 2 \times 579$$

$$31 = 579 - 2 \times 274$$

$$\begin{cases} 31 = 579 - 2 \times (1432 - 2 \times 579) \\ = -2 \times 1432 + 5 \times 579 \\ = -2 \times 1432 + 5 \times (2011 - 1 \times 1432) \\ = 5 \times 2011 - 7 \times 1432 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

بالمطابقة نجد $(x_0; y_0) = (5; 7)$

لدينا : $\begin{cases} 2011x - 1432y = 31 \\ 2011x_0 - 1432y_0 = 31 \end{cases}$ بالطرح نجد : $2011(x - x_0) = 1432(y - y_0)$ أي :

$$2011(x - 5) = 1432(y - 7)$$

لدينا $1432 / 2011(x - 5)$ و $1432 / x - 5$ مبرهنة غوص $1432 / x - 5$

ومنه $x = 1432k + 5$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، وبالتعويض في المعادلة (E) نجد : $y = 2011k + 7$

ومنه : $(x; y) = (1432k + 5; 2011k + 7)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(2) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية

للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

$2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ ومنه البواقي دورية ودورها 3 إذن من أجل كل عدد طبيعي

k لدينا : $2^{3k} \equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.

لدينا $2011 \equiv 2[7]$ ومنه $2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{1432^{2012}}[7]$

من جهة أخرى $1432 \equiv 1[3]$ ومنه $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ أي $1432^{2012} \equiv 1^{2012}[3]$ ومنه $1432^{2012} = 3k' + 1$ حيث $k' \in \mathbb{N}$ إذن $2^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$ ومنه $2^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$ إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$.

$$2010 \equiv 1[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1^n[7] \Leftrightarrow 2010^n \equiv 1[7]$$

$$2011 \equiv 2[7] \Leftrightarrow 2011^n \equiv 2^n[7]$$

$$1432 \equiv 4[7] \Leftrightarrow 1432^n \equiv 2^{2n}[7]$$

$$\text{ومنه } 2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 1 + 2^n + 2^{2n}[7] \text{ إذن :}$$

$$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7] \Leftrightarrow 1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$$

$$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv -1[7]$$

$$\Leftrightarrow 2^n + 2^{2n} \equiv 6[7]$$

ليكن $k \in \mathbb{N}$

$$\text{من أجل } n = 3k : 2^n + 2^{2n} = 2^{3k} + 2^{3(2k)} \equiv 2[7] \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{من أجل } n = 3k + 1 : 2^n + 2^{2n} = 2^{3k+1} + 2^{2(3k+1)} = 2^{3k+1} + 2^{3(2k)+2} \equiv 6[7] \text{ (مقبول)}$$

$$\text{من أجل } n = 3k + 2 : 2^n + 2^{2n} = 2^{3k+2} + 2^{2(3k+2)} = 2^{3k+2} + 2^{3(2k+1)+1} \equiv 6[7] \text{ (مقبول)}$$

إذن قيم n هي : $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

(3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما و الثنائية $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (E) .

(أ) عين α ، β و γ .

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha < 9 \\ 0 \leq \beta < 9 \\ 0 \leq \gamma < 9 \end{cases} \quad N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = \beta + \alpha \times 9 + \gamma \times 9^2 + 2 \times 9^3 = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54$$

الثنائية $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (E) معناه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $\beta = 1432k + 5$ و $\gamma = 2011k + 7$

$$0 \leq \beta < 9 \Leftrightarrow 0 \leq 1432k + 5 < 9 \Leftrightarrow -\frac{5}{1432} \leq k < \frac{4}{1432} \Leftrightarrow -0,0035 \leq k < 0,0028$$

وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = 0$ بالتعويض نجد $\beta = 5$ و $\gamma = 7$.

α ، β و γ تشكل حدودا متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية متزايدة تماما معناه $\alpha + \gamma = 2\beta$ ومنه $\alpha = 2\beta - \gamma = 3$.

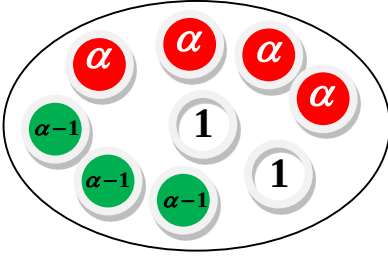
(ب) أكتب N في النظام العشري .

$$N = \beta + 9\alpha + 81\gamma + 54 = 2057$$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $\alpha - 1$ و كرتين بيضاوين تحملان الرقم 1 ، حيث α عدد طبيعي غير معدوم . الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر الحوادث التالية : A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " ، B " الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد " و C " الحصول على كرتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha - 1$ " .



(1) أ) أحسب احتمال كل من الحوادث A ، B و C .
 A " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر "
 نميز حالتين :

سحب 3 كريات من بينها واحدة بيضاء
 سحب 3 كريات ولا توجد من بينها أي كرية بيضاء .

$$\text{ومنه } P(A) = \frac{C_2^1 \times C_7^2 + C_7^3}{C_9^3} = \frac{11}{12}$$

B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد"
 نميز حالتين :

سحب 3 كريات لها نفس الرقم α .

سحب 3 كريات لها نفس الرقم $\alpha-1$.

$$\text{ومنه } P(B) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$$

C " الحصول على كرتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha-1$ "

معناه سحب 3 كريات من بينها كرتين تحملان الرقم $\alpha-1$ أما الكرية الثالثة تحمل إما الرقم 1 أو الرقم α

$$\text{ومنه } P(C) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{14}$$

(ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني ؟

معناه سحب 3 كريات من 3 ألوان مختلفة مثلي مثلي ومنه :

$$P(D) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1}{C_9^3} = \frac{2}{7}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء .

(أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله .

إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء فإن $X = 0$

إذا سحبنا كرية حمراء واحدة فإن $X = \alpha$

إذا سحبنا كرتين حمراوين فإن $X = \alpha + \alpha = 2\alpha$

إذا كانت كل الكريات الثلاث حمراء فإن $X = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$

ومنه $X \in \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha\}$

$$P(X = 0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

$$P(X = \alpha) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \frac{40}{84}$$

$$P(X = 2\alpha) = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{C_9^3} = \frac{30}{84}$$

$$P(X = 3\alpha) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84}$$

$X = X_i$	0	α	2α	3α
$P(X = X_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

(ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، ثم عين قيمة α من أجل

$$|E(X) - 1| \leq 2 .$$

$$E(X) = 0 \times \frac{10}{84} + \alpha \times \frac{40}{84} + 2\alpha \times \frac{30}{84} + 3\alpha \times \frac{4}{84} = \frac{4}{3}\alpha$$

$$|E(X) - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq E(X) - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq E(X) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{4}{3}\alpha \leq 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow -0,75 \leq \alpha \leq 1,25$$

بما أن α عدد طبيعي غير معدوم فإن $\alpha \in \{1; 2\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_1 = -2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)u_n - (8n+12)}{n} .$$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n < 0$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1 = -2 < 0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض أن $u_n < 0$ ونبرهن أن $u_{n+1} < 0$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3(n+1) > 0$ لأنه $u_n < 0 \Leftrightarrow 3(n+1)u_n < 0$

كذلك $\forall n \in \mathbb{N}^*, -(8n+12) < 0$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, 8n+12 > 0$

بالجمع نجد $3(n+1)u_n - (8n+12) < 0$ وبما أن $n > 0$ فإن $\frac{3(n+1)u_n - (8n+12)}{n} < 0$ ومنه $u_{n+1} < 0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$. ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n < 0$

(ب) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)u_n - (8n+12)}{n} - u_n = \frac{3(n+1)u_n - (8n+12) - nu_n}{n} = \frac{(2n+3)(u_n - 4)}{n}$$

بما أنه $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 0$ فإن $u_n - 4 < 0$ ومنه $u_n - 4 < 0$ وبما أن $n > 0$ و $2n+3 > 0$ فإن

$$\frac{(2n+3)(u_n - 4)}{n} < 0 \text{ ومنه } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0 \text{ إذن } (u_n) \text{ متناقصة تماما .}$$

(2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $v_n = \frac{4 - u_n}{n}$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول ، ثم عبر عن v_n بدلالة n .

$$v_{n+1} = \frac{4 - u_{n+1}}{n+1} = \frac{4 - \frac{3(n+1)u_n - (8n+12)}{n}}{n+1} = \frac{4n - 3(n+1)u_n + 8n + 12}{n(n+1)} = \frac{-3(n+1)u_n + 12(n+1)}{n(n+1)}$$

$$\text{ومنّه } v_{n+1} = \frac{-3u_n + 12}{n} = 3 \left(\frac{4 - u_n}{n} \right) = 3v_n$$

حدها الأول : $v_1 = 6$.

(ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 4 - 2n \times 3^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n$ ومن جهة أخرى لدينا :

$$v_n = \frac{4 - u_n}{n} \Leftrightarrow 4 - u_n = nv_n \Leftrightarrow u_n = 4 - nv_n = 4 - 2n \times 3^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 2n \times 3^n = -\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \end{array} \right.$$

، لاحظ أن (u_n) متباعدة .

(ج) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = (4 - u_1)(4 - u_2) \dots (4 - u_n)$.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, nv_n = 4 - u_n$ ومنه :

$$P_n = (4 - u_1)(4 - u_2) \dots (4 - u_n) = (1 \times v_1)(2 \times v_2) \dots (n \times v_n) = (1 \times 2 \times \dots \times n)(v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n)$$

نعلم أن : $1 \times 2 \times \dots \times n = n!$

$$v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = 2.3^1 \times 2.3^2 \times \dots \times 2.3^n = 2^n.3^{1+2+\dots+n} = 2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$P_n = n! 2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{ومنه}$$

(3) لتكن المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي : $w_n = \ln\left(\frac{n}{4 - u_n}\right)$.

- عبر عن w_n بدلالة n ثم أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{4 - u_n}\right) = \ln \frac{1}{v_n} = -\ln(2.3^n)$$

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n = -\ln(2.3^1) - \ln(2.3^2) - \dots - \ln(2.3^n) = -\ln(2.3^1 \times 2.3^2 \times \dots \times 2.3^n) = -\ln\left(2^n.3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)e^{x-2} - 2$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^2} x e^x + \frac{2}{e^2} e^x - 2 = -2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty \end{array} \right.$$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

$$g'(x) = (x+3)e^{x-2} \quad \text{و إشارة } g'(x) \text{ من إشارة } x+3 \text{ لأنه : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{x-2} > 0$$

ومن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -3]$ و متزايدة تماما على المجال $]-3; +\infty[$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	-	$\bigcirc$	+
$g(x)$	-2	$-\frac{1}{e^5} - 2$	$+\infty$

(3) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $1,45 < \alpha < 1,46$.
 الدالة g لا تنعدم على المجال $]-\infty; -3[$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 < 0$ و $g(-3) \approx -2,006 < 0$
 بينما الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-3; +\infty[$ ولدينا $g(-3) < 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ إذن حسب
 مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-3; +\infty[$.
 لدينا $\alpha \in]1,45; 1,46[$ ومنه $g(1,45) \times g(1,46) \approx -0,0095 \times 0,0163 < 0$
 (ب) استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	$\bigcirc$	+

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 - x^2 e^{x-2}$
 نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - e^{x-2}) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $1 - e^{x-2} = 0$
 $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $1 - e^{x-2} = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$
 ومنه حلول المعادلة هي $\{0; 2\}$ ونستنتج أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاها 0 و 2 .

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - \frac{1}{e^2} x^2 e^x = +\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - e^{x-2}) = -\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty \end{cases}$$

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -x.g(x)$. (f' هي الدالة المشتقة الأولى للدالة f)
 $f'(x) = 2x(1 - e^{x-2}) + x^2(-e^{x-2}) = x(2 - 2e^{x-2} - xe^{x-2}) = -x(xe^{x-2} + 2e^{x-2} - 2) = -x[(x+2)e^{x-2} - 2] = -xg(x)$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $-x.g(x)$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$-x$	+	●	-	-
$g(x)$	-	-	●	+
$f'(x)$	-	●	+	-

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]\alpha; +\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	●	+	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

(ج) بين أن $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha+2}$ ، ثم أعط حصر الـ $f(\alpha)$ حيث α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء (I) .

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{\alpha-2} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha-2} = \frac{2}{\alpha+2}$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-2} = \alpha^2 - \alpha^2 \cdot \frac{2}{\alpha+2} = \frac{\alpha^3}{\alpha+2}$$

$$1,45 < \alpha < 1,46 \Leftrightarrow 3,45 < \alpha+2 < 3,46 \Leftrightarrow \frac{1}{3,46} < \frac{1}{\alpha+2} < \frac{1}{3,45}$$

$$1,45 < \alpha < 1,46 \Leftrightarrow 3,0486 < \alpha^3 < 3,1121$$

$$\text{ومنه } 0,8811 < f(\alpha) < 0,9021 \text{ أي } \frac{3,0486}{3,46} < \frac{\alpha^3}{\alpha+2} < \frac{3,1121}{3,45}$$

(4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$:

(أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x^2] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^2} x^2 e^x = 0$$

(ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

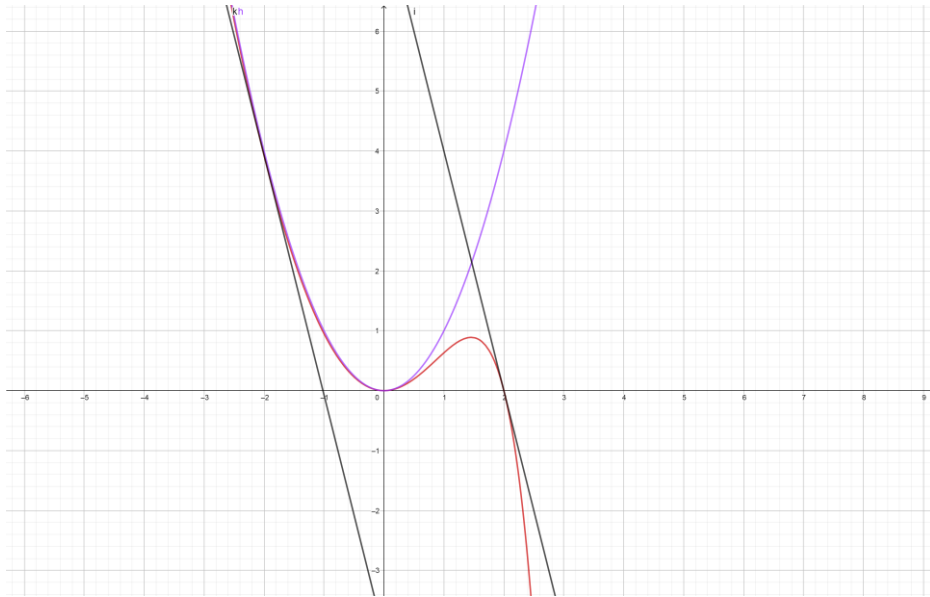
يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x) - x^2$ أي $-x^2 e^{x-2}$ وبما أن $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-2} > 0$ فإن إشارة $-x^2 e^{x-2}$ من إشارة $-x^2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x^2$	-	○	-
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Γ)	تقاطع	(C_f) تحت (Γ)

(5) عين معادلة لكل من المماسين (T) و (T') لـ (C_f) عند النقطتين ذات الفاصلتين 2 و -2 على الترتيب .

$$(T): y = -4x + 8, \quad (T'): y = -4x - 4\left(1 + \frac{1}{e^4}\right)$$

(6) أنشيء (T) ، (T') ، (Γ) و (C_f) .



(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x) = -4x + \ln(m)$.

يكفي مناقشة عدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $(d_m): y = -4x + \ln(m)$ الذي يوازي كلا من (T) و (T') ومنه :

من أجل $\ln(m) < -4\left(1 + \frac{1}{e^4}\right)$ أي $0 < m < e^{-4\left(1 + \frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

من أجل $\ln(m) = -4\left(1 + \frac{1}{e^4}\right)$ أي $m = e^{-4\left(1 + \frac{1}{e^4}\right)}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

من أجل $-4\left(1 + \frac{1}{e^4}\right) < \ln(m) < 8$ أي $e^{-4\left(1 + \frac{1}{e^4}\right)} < m < e^8$ المعادلة تقبل 3 حلول بسيطة .

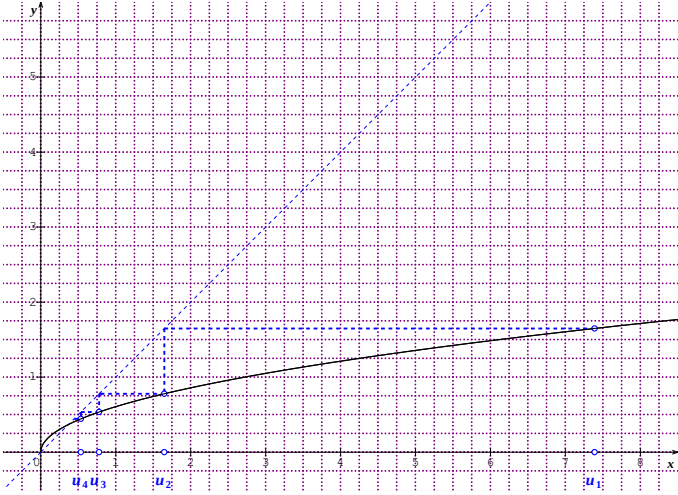
من أجل $\ln(m) = 8$ أي $m = e^8$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا .

من أجل $\ln(m) > 8$ أي $m > e^8$ المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

انتهى تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}$.



(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد و المتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) ، (الشكل المقابل) .

(1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$
من البيان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

لدينا كذلك : $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x

من المجال $[0; +\infty[$: $f'(x) > 0$ إذن f متزايدة تماما
على المجال $[0; +\infty[$.

(2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n $u_{n+1} = f(u_n)$
(أ) أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضعا خطوط الإنشاء .
أنظر الشكل المقابل .

(ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

لدينا من البيان $u_1 > u_2 > u_3 > u_4$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

النقط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 من المنحنى (C_f) ذات الفواصل u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على الترتيب تتقارب
نحو نقطة ثابتة A هي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ومنه (u_n) متقاربة نحو
فاصلة النقطة A .

(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > \frac{1}{e}$.

من أجل $n=1$ لدينا $u_1 = e^2 > \frac{1}{e}$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن $u_n > \frac{1}{e}$ و نبرهن أن $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

لاحظ أن : $u_{n+1} = e^{\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{u_n}$

$u_{n+1} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{u_n} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \sqrt{u_n} > \sqrt{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow u_{n+1} > \frac{1}{e}$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > \frac{1}{e}$ ونستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل .

(4) (أ) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{u_n} - u_n = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{u_n}\right)^2 - u_n^2}{\frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{u_n} + u_n} = \frac{u_n \left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{\frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{u_n} + u_n}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > \frac{1}{e}$ فإن $u_n > 0$ ومنه $\sqrt{u_n} > 0$ إذن $\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{u_n} + u_n > 0$

كذلك من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{1}{e} - u_n < 0$ ومنه $u_n \left(\frac{1}{e} - u_n \right) < 0$ إذن

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

(ب) برر تقارب المتتالية (u_n) ثم أوجد نهايتها .

بما أن (u_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة تماما فهي متقاربة ، لإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0 \text{ وبما أنه } x = \frac{1}{e} \text{ أو } x = 0 \text{ ومنه } f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e}x = x^2 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{e} - x\right) = 0$$

$$\text{فإن } x = \frac{1}{e} \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{e}$$

(5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول .

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\ln e^{-\frac{1}{2}} + \ln \sqrt{u_n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{u_n}$$

$$\text{ومنه } v_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{u_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n \text{ ومنه } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} .$$

$$\text{حدها الأول : } v_1 = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_1} = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{e^2} = \frac{3}{2}$$

(ب) أكتب عبارتي u_n و v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n} \Leftrightarrow \ln \sqrt{u_n} = v_n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \left(e^{v_n - \frac{1}{2}} \right)^2 = e^{2v_n - 1} = e^{6 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{6 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1} = \frac{1}{e} \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \\ -1 < \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

(6) أحسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.

$$\text{لدينا } \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + \ln u_n = 6 \left(\frac{1}{2} \right)^n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{2^n}{6} \text{ ومنه } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{6 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}$$

$$\text{إذن : } S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{2^1}{6} + \frac{2^2}{6} + \dots + \frac{2^n}{6} = \frac{1}{6} (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) = \frac{1}{6} \cdot 2 \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right)$$

$$\text{ومنه } S_n = \frac{1}{3} (2^n - 1)$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(1) أ) أنشر العبارة $(n+2)(3n^2 - 6n + 16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)(3n^2 - 6n + 16) = 3n^3 + 4n + 32$$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3 + 4n + 32$ قابلا للقسمة على $n + 2$.
 بما أن $3n^3 + 4n + 32 = (n + 2)k$ حيث $k = 3n^2 - 6n + 16$ و $k \in \mathbb{Z}$ فإن $n + 2 \mid 3n^3 + 4n + 32$
 (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2 - 6n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .
 لدينا $\Delta = -156 < 0$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N}, 3n^2 - 6n + 16 > 0$ وبما أن $3n^2 - 6n + 16 \in \mathbb{Z}$ فإن $3n^2 - 6n + 16$ عدد طبيعي غير معدوم .

(3) أ) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة α ، β و γ ، تكون المساواة التالية صحيحة :
 $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta\gamma - \alpha; \beta)$.

نضع $PGCD(\alpha; \beta) = d$ و $PGCD(\beta\gamma - \alpha; \beta) = d'$

لدينا $\begin{cases} d \mid \alpha \\ d \mid \beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d \mid \alpha \\ d \mid \beta\gamma \end{cases}$ بالطرح نجد $d \mid \beta\gamma - \alpha$

ومنه $d \mid \beta$ و $d \mid \beta\gamma - \alpha$ قاسم مشترك للعددين β و $\beta\gamma - \alpha$ ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي $d \mid d'$

من جهة أخرى لدينا : $\begin{cases} d' \mid \beta \\ d' \mid \beta\gamma - \alpha \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d' \mid \beta \\ d' \mid \beta\gamma \end{cases}$ بالطرح نجد : $d' \mid \alpha$

ومنه $d' \mid \alpha$ و $d' \mid \beta$ قاسم مشترك للعددين α و β ومنه فهو يقسم القاسم المشترك الأكبر لهما أي $d' \mid d$

و $d \mid d'$ إذن $d = d'$ أي $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta\gamma - \alpha; \beta)$

(ب) استنتج أنه من أجل عدد طبيعي n ، $PGCD(3n^3 + 4n; n + 2) = PGCD(32; n + 2)$.

بوضع : $\alpha = 3n^3 + 4n$ ، $\beta = n + 2$ و $\gamma = 3n^2 - 6n + 16 \in \mathbb{N}^*$ نجد :

$$\beta\gamma - \alpha = (n + 2)(3n^2 - 6n + 16) - 3n^3 - 4n = 32$$

ومنه حسب ما سبق : $PGCD(3n^3 + 4n; n + 2) = PGCD(32; n + 2)$

(4) أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 32 .
 $\{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$

(ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $A = \frac{3n^3 + 4n}{n + 2}$ طبيعيا .

لدينا من أجل عدد طبيعي n ، $3n^3 + 4n$ و $n + 2$ عددان طبيعيان مع $n + 2 \neq 0$

حتى يكون العدد $A = \frac{3n^3 + 4n}{n + 2}$ يكفي : $n + 2 \mid 3n^3 + 4n$ ومنه $PGCD(3n^3 + 4n; n + 2) = n + 2$

معناه كذلك : $PGCD(32; n + 2) = n + 2$ ومنه $n + 2 \mid 32$ أي $n + 2 \in D_{32}^+$

$n + 2$	1	2	4	8	16	32
n	-1	0	2	6	14	30
	مرفوض					

ومنه $n \in \{0; 2; 6; 14; 30\}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كرات حمراء و ثلاث كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كرات في آن واحد .

(1) أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

" A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " ، " B " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{11}{56}$$

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_5^2 + C_3^2 \times C_5^1 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{23}{28}$$

(2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء ونضع مكانها n كرة سوداء حيث $n \geq 2$ ، ثم يسحب لاعب كرتين على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة الأولى .

إذا سحب اللاعب كرة سوداء يتحصل على 5 نقاط وإذا سحب كرة حمراء يخسر 10 نقاط . وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها .

(أ) عرف قانون الاحتمال لـ X ، ثم بين أن أمله الرياضي هو $E(X) = \frac{10n^2 - 60n - 400}{(n+4)(n+5)}$.

تعيين القيم الممكنة لـ X :

كرتين حمراوين فإنه يخسر 20 نقطة وإذا سحب كرة حمراء وكرة سوداء فإنه يخسر 5 نقاط أما إذا سحب كرتين سوداوين فإنه يربح 10 نقاط ، ومنه $X \in \{-20; -5; 10\}$.

عدد الكرات الإجمالي في الكيس هو $n+5$ ومنه عدد الحالات الممكنة للسحب هو A_{n+5}^2

$$P(X = -20) = \frac{A_5^2}{A_{n+5}^2} = \frac{\frac{5!}{2!}}{(n+5)!} = \frac{20(n+3)!}{(n+5)!} = \frac{20(n+3)!}{(n+5)(n+4)(n+3)!} = \frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X = -5) = \frac{\Gamma_2^{1,1} \times A_5^1 \times A_n^1}{A_{n+5}^2} = \frac{2 \times \frac{5!}{4!} \times \frac{n!}{(n-1)!}}{(n+5)!} = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(X = 10) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{(n+5)!} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

$X = X_i$	-20	-5	10
$P(X = X_i)$	$\frac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$

$$\begin{cases} E(X) = (-20) \frac{20}{(n+5)(n+4)} + (-5) \frac{10n}{(n+5)(n+4)} + 10 \times \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} \\ = \frac{-400 - 50n + 10n(n-1)}{(n+5)(n+4)} = \frac{10n^2 - 60n - 400}{(n+4)(n+5)} \end{cases} \text{ ومنه :}$$

(ب) ما هو أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة .

حتى تكون اللعبة مربحة يكفي : $E(X) > 0$

$$(n+4)(n+5) > 0 \text{ لأن } E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{10n^2 - 60n - 400}{(n+4)(n+5)} > 0 \Rightarrow 10n^2 - 60n - 400 > 0$$

يكفي حل المتراجحة $10x^2 - 60x - 400 > 0$ نجد $x \in]-\infty; -4[\cup]10; +\infty[$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ فإن $n > 10$ ومنه أصغر عدد ممكن للكرات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة هو 11 .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x} \text{ وإشارتها من إشارة } x^2 - 1 \text{ لأن } x \in]0; +\infty[.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$			+

تماما على المجال

الدالة g متناقصة

$]0; 1[$ و متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

(3) حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى هي 3 ومنه : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq 3$ ومنه $g(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$g(x)$		+

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + e - \frac{2 \ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$).

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x + e - \frac{2}{x} \ln x = +\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

ومن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مطابقا لحامل محور الترتيب بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = -1 - \left(\frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x}{x^2} \right) = \frac{-x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

(3) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأنه $x^2 > 0$ $\forall x \in]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(4) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2 \ln x}{x} = 0$ ومنه (Δ) الذي معادلته $y = -x + e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x) - (-x + e)$ أي $-\frac{2 \ln x}{x}$

إشارة $-\frac{2 \ln x}{x}$ من إشارة $-2 \ln x$ لأن $x > 0$

x	0	1	$+\infty$
$-2 \ln x$		+	-
الوضعية النسبية		تقاطع	

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، ثم جد معادلة له .

يكفي حل المعادلة $f'(x) = -1$

$$x = e \text{ ومنه } -2 + 2 \ln x = 0 \text{ نجد } f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} = -1$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) حيث : $(T): y = f'(e)(x - e) + f(e)$

ومنه $(T): y = -x + e - \frac{2}{e}$

(6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2 < \alpha < 2,1$.

يكفي أن نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2,1$

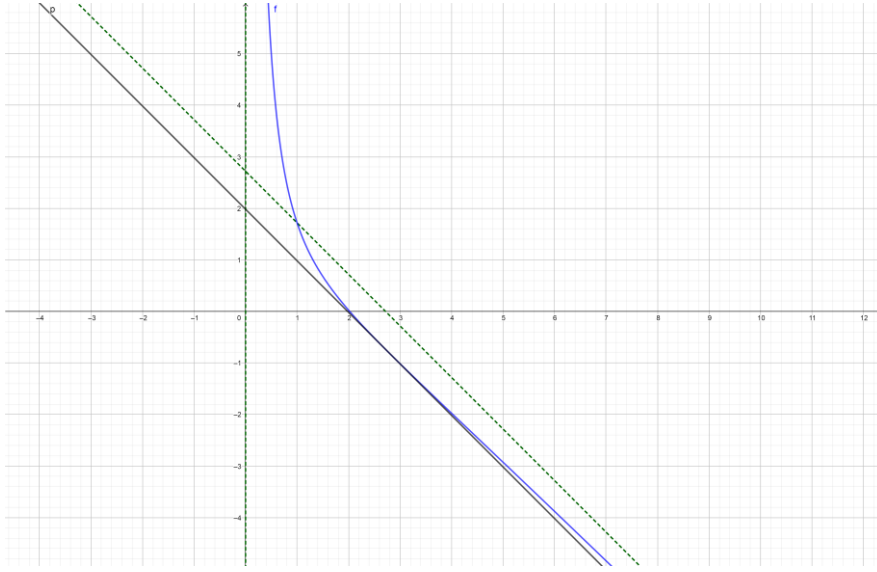
الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وبالأخص على المجال $]2; 2,1[$ ولدينا :

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2,1$ ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث

$$2 < \alpha < 2,1.$$

(7) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .



(8) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x(e-m) = \ln(x^2)$.

المعادلة معرفة من أجل $x \neq 0$ ولدينا :

$$x(e-m) = \ln(x^2) \Leftrightarrow e-m = \frac{2\ln|x|}{x} \Leftrightarrow m-e = -\frac{2\ln|x|}{x} \Leftrightarrow -x+e+m-e = -x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$$

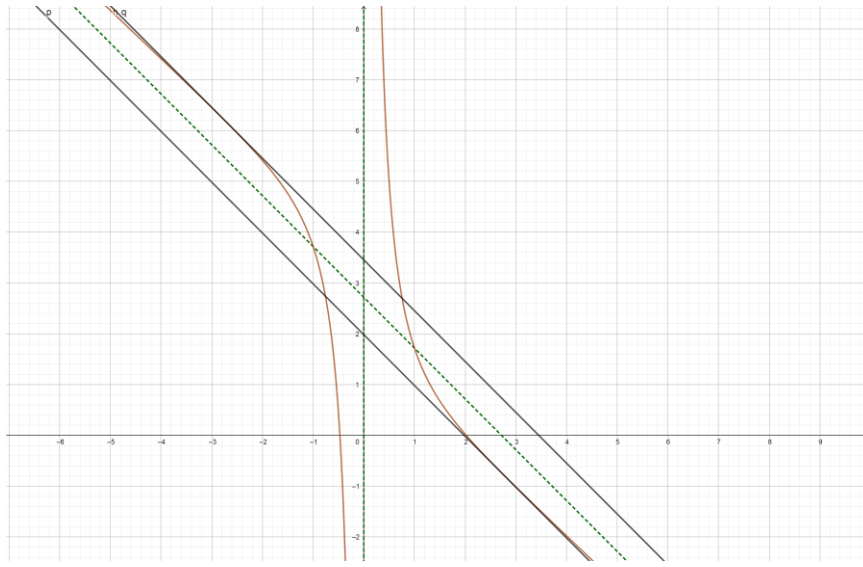
$$\Leftrightarrow h(x) = -x+m$$

حيث h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = -x+e-\frac{2\ln|x|}{x}$

من أجل $x > 0$: $h(x) = -x+e-\frac{2\ln x}{x} = f(x)$

ولدينا $h(x) + h(-x) = -x+e-\frac{2\ln|x|}{x} + x+e+\frac{2\ln|-x|}{x} = 2e$ لأن $|-x| = |x|$ ومنه منحنى الدالة h

متناظر بالنسبة إلى النقطة $\omega(0; e)$ ويطابق (C_f) من أجل $x > 0$.



المناقشة مناقشة بيانية وسيطية مائلة وتؤول إلى دراسة عدد نقط تقاطع منحنى الدالة h مع المستقيم $(d_m): y = -x + m$ والذي يوازي كلا من (Δ) ، (T) و (T') حيث $(T'): y = -x + e + \frac{2}{e}$ نظير (T) بالنسبة إلى النقطة ω ومنه :

من أجل $m \in]-\infty; e - \frac{2}{e}[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m = e - \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m \in]e - \frac{2}{e}; e[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m = e$ المعادلة تقبل حلين متمايزين

من أجل $m \in]e; e + \frac{2}{e}[$ المعادلة تقبل 3 حلول

من أجل $m = e + \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحلا بسيطا

من أجل $m \in]e + \frac{2}{e}; +\infty[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

انتهى تصحيح الموضوع الثاني