

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5نقاط) عين الاقتراح الصحيح في كل حالة من الحالات الآتية مع التعليل :

(1) العدد $\ln[(2 - \sqrt{3})^{2022}] + \ln[(2 + \sqrt{3})^{2022}]$ يساوي :

أ - 0 (ب) 20 22 (ج) 1

(2) f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل 2، إذا كان منحنى f يقبل مماسا معادلته $y=2$ قان :

أ - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$ ب - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$ ج - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

(3) حلول المعادلة التفاضلية : $y' - 1 = \sqrt{2}y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

أ) $f(x) = Ce^{\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب) $f(x) = Ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ (ج) $f(x) = Ce^{\sqrt{2}x} + 1$

(4) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = |x-1|(x+1)$, غير قابلة للاشتقاق عند 1 لان نهاية النسبة $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$:

أ) عند 1 هي $+\infty$ (ب) عند 1 من يمين 1 , لا تساوي النهاية عند 1 من يسار (ج) عند 1 هي $-\infty$

(5) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث تضم كل لجنة رئيسا و نائبا له ينتخبون من بين خمسة رجال و ثلاث

نساء هو : (أ) 56 (ب) - 28 (ج) - 64

التمرين الثاني: (4نقاط)

نعتبر D_1 ; D_2 زهرتي نرد ذات ستة أوجه حيث :

▪ وجوه النرد D_1 متساوية الاحتمال , أربعة منها تحمل الرقم 1 و اثنان منها تحمل الرقم 2 .

▪ وجوه النرد D_2 مرقمة من 1 الى 6 حيث أن احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k هو $\frac{k}{21}$.

1- أ- إذا رمينا النرد D_1 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 2 ؟.

ب- إذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 6 ؟.

2- إذا رمينا النردين D_1 ; D_2 معا فما هو احتمال ظهور الرقم 1 :

أ - مرة واحدة بالضبط (ب) مرتين

3- نرمي النردين معا و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد المرات الذي يظهر فيها الرقم 2

أ عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب - حسب الأمل الرياضي لهذا المتغير العشوائي

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx$: المتتالية العددية المعرفة على IN كما يلي
- 1 جَـيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي n : $u_n = e^{2-n} - e^{1-n}$
 - 2 أَحْسَبْ u_0 ثُمَّ بَرِّهْنْ بِمَبْدَأِ الْاِسْتِدْلَالِ بِالتَّرَاجُعِ . أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي n : $u_n > 0$
 - 3 بَرِّهْنْ أَنَّ الْمَتَتَالِيَةَ (u_n) مَتَتَالِيَةٌ هَنْدَسِيَّةٌ يَطْلُبُ تَعْيِينَ أَسَاسِهَا وَحَدِّهَا الْأَوَّلِ
 - 4 أَحْسَبْ بِدَلَالَةِ n الْفَرْقِ $u_{n+1} - u_n$. ثُمَّ اسْتَنْتِجْ اتِّجَاهَ تَغْيِيرِ الْمَتَتَالِيَةِ (u_n)
 - ب - اسْتَنْتِجْ أَنَّ الْمَتَتَالِيَةَ (u_n) مُتَقَارِبَةٌ ثُمَّ احْسَبْ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 - 5 تَضَعْ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - أَحْسَبْ بِدَلَالَةِ n الْمَجْمُوعِ S_n , ثُمَّ احْسَبْ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

- الجزء I : f دالة معرفة على IR بـ : $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المزدود بمعلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور الترتيب
- 1 أَحْسَبْ نَهَايَةَ الدَّالَةِ f عِنْدَ $-\infty$ ثُمَّ فَسِّرْ النَتِيجَةَ هَنْدَسِيًّا
 - 2 أَجـ بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ حَقِيقِي x : $f(x) = \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{e^x}$
 - ب) أَحْسَبْ نَهَايَةَ الدَّالَةِ f عِنْدَ $+\infty$ ثُمَّ فَسِّرْ النَتِيجَةَ بَيَانِيًّا
 - 3 - نَعْتَبِرُ الدَّالَةَ g الْمَعْرِفَةَ عَلَى الْمَجَالِ $]-1; -\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$
 - أ - أَدْرُسْ تَغْيِيرَاتِ الدَّالَةِ g عَلَى الْمَجَالِ $[0; +\infty[$
 - ب - أَحْسَبْ $g(0)$, ثُمَّ إِشَارَةَ $g(x)$ مِنْ أَجْلِ x مُوجِبٍ تَمَامًا
 - 4 أ- بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ حَقِيقِي x : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$
 - ب - اسْتَنْتِجْ أَنَّ الدَّالَةَ f مُتَنَاقِصَةً تَمَامًا عَلَى مَجْمُوعَةِ تَعْرِيفِهَا , ثُمَّ شَكْلَ جَدْوَلِ تَغْيِيرَاتِهَا
 - ج- مَثِّلْ بَيَانِيًّا (C_f)
- الجزء II : نَعْتَبِرُ الدَّالَةَ F الْمَعْرِفَةَ عَلَى الْمَجَالِ $[0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$
- 1 بَيِّنْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ حَقِيقِي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$
 - 2 جَاسْتَعْمَلِ التَّكَامُلَ بِالتَّجْزِئَةِ بَيِّنْ أَنَّ $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$
 - 3 اسْتَنْتِجْ مَسَاحَةَ الْحِيزِ الْمُسْتَوِيِّ الْمَحْدَدِ بـ (C_f) وَ الْمُسْتَقِيمَاتِ الَّتِي مَعَادِلَاتُهَا $x = 0, x = \ln 4, y = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04ن)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل:

السؤال:	(الإجابة أ)	(الإجابة ب)	(الإجابة ج)
(1) حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:	$x \mapsto ce^{-2x} + \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ce^{2x} - \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ce^{\frac{1}{2}x} - 2$ مع $c \in \mathbb{R}$
(2) القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2; 3]$ بالعلاقة $f(x) = e^{2x+3} - x$ تساوي:	$m = \frac{1}{2}(e^9 - e^7 - 5)$	$m = e^2 - \frac{5}{2}$	$m = \frac{1}{2}(e^2 - 5)$
(3) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 2$ يكون:	$\frac{1}{2}(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$n^2 - 2n$
(4) عبارة الحد العام U_n للمتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \int_0^n 2^x \ln 2 \, dx$ هي:	2^n	$2^n + 1$	$2^n - 1$

التمرين الثاني (05ن)

(I) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0 = 6$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$

(1) أ. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، مثلّ المستقيم (Δ) و (D) إذا علمت

$$\text{أن : } (\Delta): y = x \text{ و } (D): y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

ب. مثلّ و دون حساب على حامل محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2 و u_3 .

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n > -\frac{2}{3}$

(3) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماماً، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

(II) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام V_n : حيث من أجل كل n من $\mathbb{N}$ $v_n = u_n + \alpha$ ، α عدد حقيقي.

(1) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ ، ثمّ أحسب حدّها الأول.

(2) نضع $\alpha = \frac{2}{3}$: أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n . استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر صندوقين أحدهما U يحتوي على 3 كرات خضراء و 4 كرات حمراء و الآخر U' يحتوي على كرتين خضراوين

و 5 كرات حمراء، كل الكرات لا نميز بينها باللمس، نرمز للكرات الخضراء بالرمز V و للكرات الحمراء بالرمز R .

- I - نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد. أحسب احتمال كلٍّ من الحوادث A ، B و C التالية:
- ◀ A : "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون".
- ◀ B : "الحصول على كرة خضراء واحدة بالضبط".
- ◀ C : "الحصول على كرة حمراء على الأقل".

II - نختار بطريقة عشوائية صندوقا من بين الصندوقين و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

(1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية.

(2) بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو: $P(V) = \frac{5}{14}$

(3) إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U ؟.

التمرين الرابع (07ن)

يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1\text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = 4\text{ cm}$

I - الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبارة: $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ (يطلب منك حساب النهايات)، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1,8 < \alpha < 2$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II - الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ و (C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

(4) عيّن إحداثيّتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أنشئ المنحنى (C_g) .

III - الدالة العددية G معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبارة: $G(x) = \frac{5}{9}x^3 + x - \frac{2}{3}x^3 \ln x$

(1) بيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(2) أحسب بدلالة α العدد A_α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) و حامل محور الفواصل و

المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=1$ و $x=\alpha$. حيث (C_g) هو المنحنى البياني الممثل للدالة g في المعلم السابق.

التصحيح النموذجي

التمرين الثاني (4 نقاط)

(1) أ- احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{1}{6}$ أي $\frac{1}{3}$ (0,5)

ب- اذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة احتمال ظهور الرقم 6 هو $\frac{6}{21}$ أي $\frac{2}{7}$ (0,5)

(2) أ- احتمال ظهور الرقم 1 مرة واحدة بالضبط اي في D_1 فقط او في D_2 فقط $\frac{82}{126} = \frac{1}{21} \times \frac{2}{6} + \left(1 - \frac{1}{21}\right) \times \frac{4}{6}$

(0,5)

ب- مرتين في D_1 و D_2 معا $\frac{4}{6} \times \frac{1}{21} = \frac{4}{126}$ (0,5)

(3) قيم X هي 2,1,0 (0,25)

قانون احتمال المتغير العشوائي هو :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$			

0,25

0,25 $P(X=0) = \frac{4}{6} \left(1 - \frac{2}{21}\right) = \frac{4 \times 19}{126} = \frac{76}{126}$

0,25 $P(X=1) = \frac{2}{6} \times \left(1 - \frac{2}{21}\right) + \frac{2}{21} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{6} \times \frac{19}{21} + \frac{8}{126} = \frac{38+8}{126} = \frac{46}{126}$

0,25 $P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{21} = \frac{4}{126}$

0,75 $E(X) = 0 \times \frac{76}{126} + 1 \times \left(\frac{46}{126}\right) + 2 \left(\frac{4}{126}\right) = \frac{54}{126} = \frac{3}{7}$

التمرين الثالث (4 نقاط)

1 - نبين أن $u_n = e^{2-n} - e^{1-n}$.

0,5 $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx = -[e^{2-x}]_n^{n+1} = -[e^{1-n} - e^{2-n}] = e^{2-n} - e^{1-n}$

2 - حساب u_0 ثم البرهان بالتراجع ان $u_n > 0$.

نضع $P(n): u_n > 0$

حساب $u_0 = e^2 - e$: ... (0,25)

المرحلة 01 : من اجل $n=0$ نجد $u_0 = e^2 - e$ و عليه $P(0)$ محققة

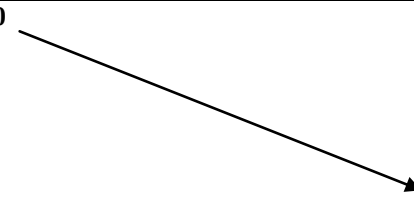
المرحلة 02 : من اجل كل عدد طبيعي n نفرض صحة $P(n)$ ونفرض صحة $P(n+1)$ ، ، (0,75)

- 3 - اثبات أن (u_n) متتالية هندسية
لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{e} u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = e^2 - e$ (0,5)
- 4 - أ- تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)
من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -(e-1)^2 e^{-n}$ ،
نلاحظ $u_{n+1} - u_n < 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة (0,5)
ب- الاستنتاج أن المتتالية متقاربة
بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة (0,5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- 5 - حساب S_n :
(0,5) $S_n = e^2 (1 - \frac{1}{e^{n+1}})$
(0,5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^2$
التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء I

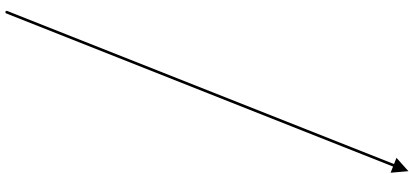
- (0,5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - 1$
التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $-\infty$ (0,25)
- 2 - أ- لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{1}{e^x} \ln[e^x(e^{-x} + 1)] = \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{e^x}$ (0,25)
ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (0,5)
التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$ (0,25)
- 3 - أ- دراسة تغيرات الدالة g
النهايات (0,25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$ ،
نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$ (0,5)
ب- جدول التغيرات : لدينا $g(0)=0$

	0	$+\infty$
x		
$g'(x)$		
g	0	



- من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ (0,5)
- 4 - أ- حساب $f'(x)$
 f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = \frac{1}{e^x} (-\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x})$ أي $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$ (0,5)
ومنه الدالة f اشارتها من إشارة g اي الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها (0,25)

جدول تغيرات الدالة f

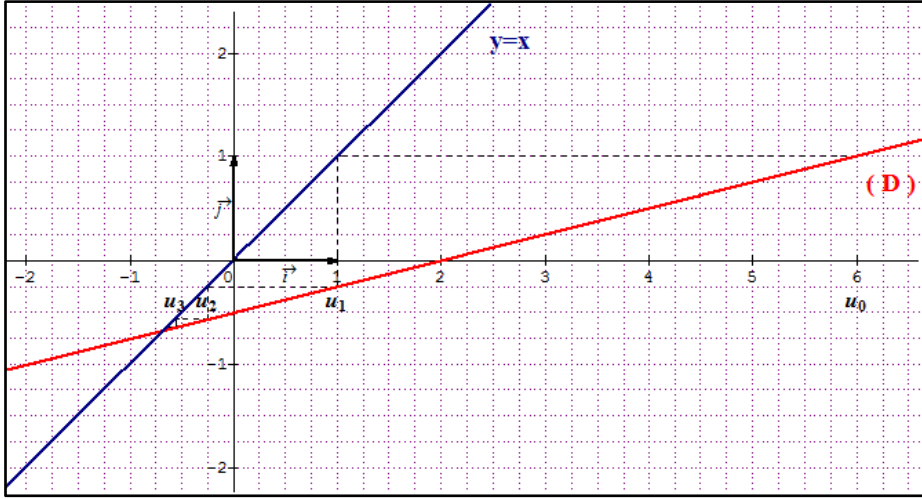
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
f	1 	

ج- انشاء (C_f) (1)

التقريب:	التصحيح النموذجي المختصر لامتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2022:
	حل التمرين الأول: (04 نقاط) ■ إختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل: (1) الإجابة ب) 0,25 التعليل: المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 1$ تكافئ $y' = 2y + 1$ و هي من الشكل $y' = ay + b$ حيث $a = 2$ و $b = 1$ و عليه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto ce^{2x} - \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$ بالتعويض نجد $x \mapsto ce^{2x} - \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$ (2) الإجابة أ) 0,25 التعليل: لدينا القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2; 3]$ بالعلاقة $f(x) = e^{2x+3} - x$ هي: $m = \int_a^b f(x) dx$ بالتعويض نجد: $m = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (e^{2x+3} - x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+3} - \frac{1}{2} x^2 \right]_2^3 = \frac{1}{2} (e^9 - e^7 - 5)$ (3) الإجابة ب) 0,25 التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 2$ يكون: $C_{n-1}^2 + C_n^2 = \frac{(n-1)!}{2! \times (n-1-2)!} + \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{(n-1)!}{2 \times (n-3)!} + \frac{n!}{2 \times (n-2)!}$ يكافئ $C_{n-1}^2 + C_n^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(2n-2)}{2} = (n-1)^2$ (4) الإجابة ج) 0,25 التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \int_0^n 2^x \ln 2 dx = \int_0^n \ln 2 e^{x \ln 2} dx = \left[e^{x \ln 2} \right]_0^n = 2^n - 1$

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) تمثيل المستقيمان و الحدود:



0,25

0,75

(2) الـرهـان بالتراجـع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -\frac{2}{3}$ $p(n)$

أ -مرحلة التحقق: نتحقق من صحة الخاصية p من أجل $n_0 = 0$

لدينا $u_0 = 6$ و بما أن $6 > -\frac{2}{3}$ معناه $u_0 > -\frac{2}{3}$ ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $n_0 = 0$.

0,25

ب -مرحلة الوراثة: نفرض أن الخاصية p صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n معناه $u_n > -\frac{2}{3}$

0,25

و نبرهن صحة الخاصية p من أجل $(n+1)$ أي البرهان أن $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$

الصفحة 2

لدينا $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $\frac{1}{4}u_n > -\frac{1}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{4}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$ ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $(n+1)$.

0,25

■ الإستنتاج: نستنتج حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n > -\frac{2}{3}$

0,25

(3) لريـن أن المتتالية (u_n) متناقصة نهـما:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} - u_n = -\frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right)$

0,25

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n + \frac{2}{3} > 0$ يكافئ $-\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) < 0$

0,25

يكافئ $u_{n+1} - u_n < 0$ ما يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة نهـما.

• إستنتاج التقارب: بما أن المتتالية (u_n) متناقصة نهـما و محدودة من الأسفل بالعدد $-\frac{2}{3}$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

0,5

I - المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{R}$: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

(1) نسمي قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha = \frac{1}{4}(u_n - 2 + 4\alpha)$

0,5

من جهة أخرى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = u_n - 2 + 4\alpha \quad \text{نجد} \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 2 + 4\alpha) \quad \text{بالمطابقة مع} \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \quad \text{يكافئ} \quad -3\alpha = -2 \quad \text{يكافئ} \quad \alpha = -2 + 4\alpha \quad \text{يكافئ} \quad u_n + \alpha = u_n - 2 + 4\alpha$$

$$v_0 = \frac{20}{3} \quad \text{معناه} \quad v_0 = u_0 + \alpha = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \quad \text{لدينا} \quad \bullet \quad \text{حساب حدها الأول:}$$

(2) أ. الكتلة بدلالة n عبارة الحد العام v_n :

$$v_n = \frac{20}{3 \times 4^n} \quad \text{معناه} \quad v_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n \quad \text{بالتعويض نجد}$$

ب. استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \alpha$

$$u_n = \frac{2}{3} \left(\frac{10}{4^n} - 1 \right) \quad \text{يكافئ} \quad u_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \quad \text{يكافئ} \quad u_n = v_n - \alpha$$

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad -1 < \frac{1}{4} < 1 \quad \text{لدينا} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{20}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3}$$

0,25

0,5

0,5

0,25

حل التمرين الثالث (04 نقاط)

I - حساب احتمال كل من الحوادث A ، B و C :

$$P(A) = \frac{1}{7} \quad \text{معناه} \quad P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{5}{35} \quad \text{لدينا} \quad \blacktriangleleft \quad 0,5$$

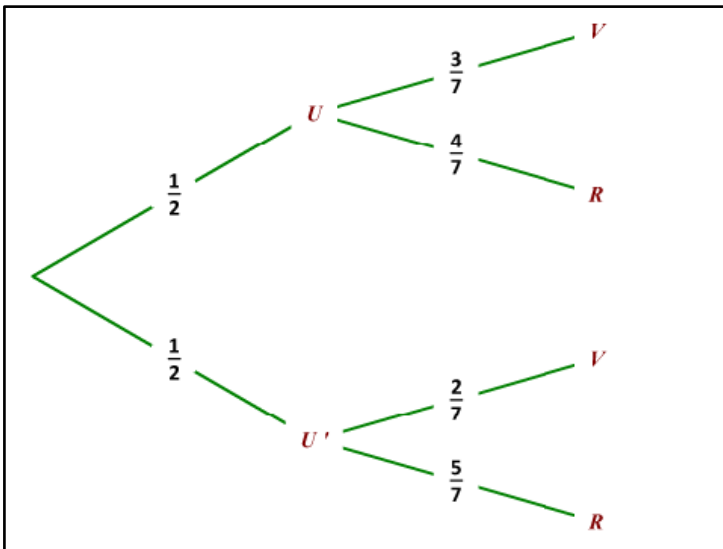
$$P(B) = \frac{18}{35} \quad \text{معناه} \quad P(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35} \quad \text{لدينا} \quad \blacktriangleleft \quad 0,5$$

$$P(C) = \frac{34}{35} \quad \text{معناه} \quad P(C) = \frac{C_4^1 \times C_3^2 + C_4^2 \times C_3^1 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{34}{35} \quad \text{لدينا} \quad \blacktriangleleft \quad 0,5$$



II - نختار صندوقا عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

(1) إنجاز شجرة الإحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية:



01

(2) لنبين أن احتمال الحصول على كرة خضراء هو $P(V) = \frac{5}{14}$

لدينا $P(V) = P(U \cap V) + P(U' \cap V)$ يكافئ $P(V) = P(U) \times P_U(V) + P(U') \times P_{U'}(V)$

بالتعويض نجد $P(V) = \frac{5}{14}$ ما يعني أن $P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$

(3) حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U علما أنها خضراء اللون:

لدينا $P_V(U) = \frac{3}{5}$ معناه أن $P_V(U) = \frac{P(U \cap V)}{P(U)} = \frac{P(U) \times P_U(V)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}}{\frac{5}{14}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{5}{14}} = \frac{3}{5}$

0,5

0,25

0,75

حل التمرين الرابع: (07 نقاط)

x	0	$1 + \infty$
$g'(x)$	+	-

I - الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

(1) دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 - 2x^2 \ln x) = 1$ النهايات:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 - 2x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) \right] = -\infty$

0,25

0,25

0,25

0,25

المشتقة: الدالة العددية g معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ تكون:

معناه $g'(x) = -4x \ln x$ $g'(x) = 2x - 2 \left(2x \times \ln x + \frac{1}{x} \times x^2 \right) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$

إشارة المشتقة: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $4x > 0$

و عليه فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة العبارة $-\ln x$ معناه أن:

اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

0,25

(2) لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقق: $1,8 < \alpha < 2$:

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]1; +\infty[$

إذا بالضرورة فإن الدالة g معرفة ومستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]1,8; 2[$.

و لدينا $g(1,8) \approx 0,43$ و $g(2) \approx -0,55$ و بما أن $g(1,8) \times g(2) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 2$ مع $g(\alpha) = 0$.

0,25

0,25

0,25

■ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

- II 0,25

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

0,25

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \times \frac{\ln x}{x^2}}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = 0$$

0,25

0,25

- التفسير الهندسي للنهائيتين :

• لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $x=0$ هو حامل محور الترتيب.

مستقيم مقارب معادلته $y=0$ هو

• لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ما يعني أن المنحنى (C_f)

حامل محور الفواصل بجوار $+\infty$.

$]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	+	-

x من المجال

(2) أ. لزمين أنه من أجل كل عدد حقيقي

0,5

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

لدينا الدالة العددية f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ تكون :

0,25

0,25

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1+x^2) - 2x \times \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{x \left(\frac{1}{x} + x - 2x \ln x \right)}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

0,5

ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $x(1+x^2)^2 > 0$ و عليه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ما يعني أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

■ تشكيلي جدول تغيرات الدالة f :

0,25

$$(3) \text{ لزمين أن: } f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} : \text{ لدينا } g(\alpha) = 0 \text{ يكافئ } 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0 \text{ يكافئ } \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha^2} \text{ بالتعويض نجد } f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} \times \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

0,25

■ استنتاج حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} :

لدينا $1,8 < \alpha < 2$ يكافئ

$3,24 < \alpha^2 < 4$ يكافئ

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{6,48}$$

الذي سعته 10^{-2} هو :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

$6,48 < 2\alpha^2 < 8$ يكافئ

و عليه فإن حصر للعدد الحقيقي

$$0,13 < f(\alpha) < 0,15$$

0,25

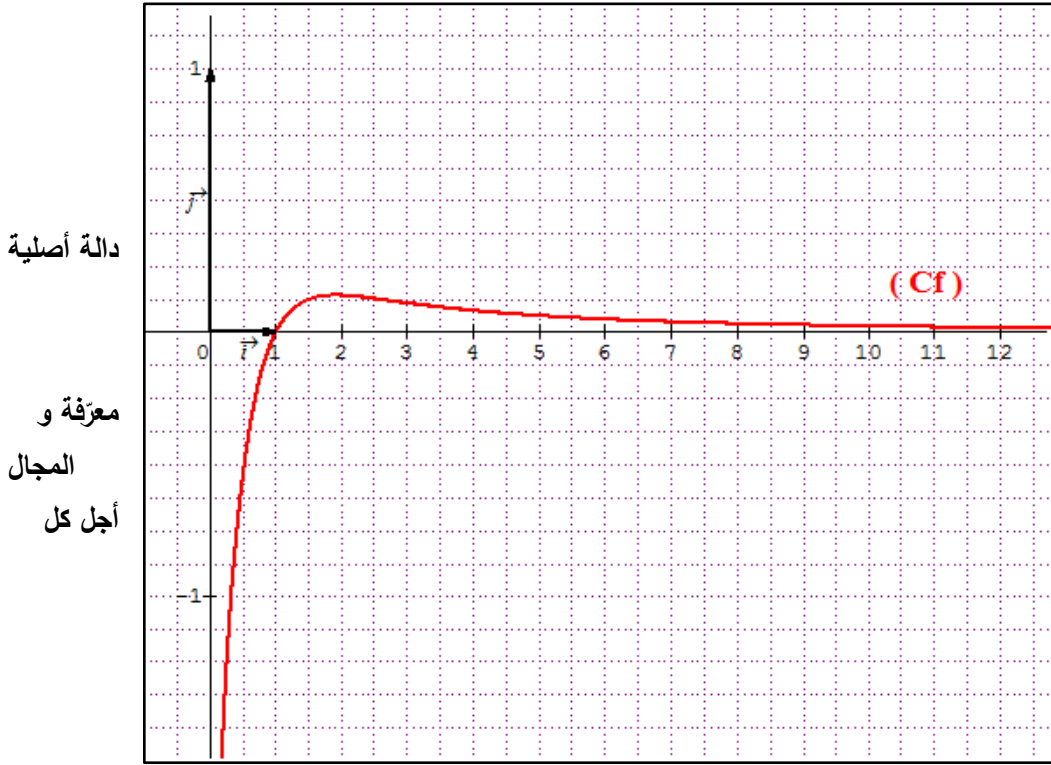
(4) نتعين إحداثي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل:

$$\text{لدينا } f(x) = 0 \text{ تكافئ } \frac{\ln x}{1+x^2} = 0 \text{ تكافئ } \ln x = 0 \text{ تكافئ } x = 1.$$

- ما يعني أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(1;0)$.

▪ إنشاء المنحنى (C_f) :

المنحنى
 (C_f)
0,5



دالة أصلية
معرفة و
المجال
أجل كل

- III

(1) لربّين أن الدالة G هي

للدالة g على المجال

$]0; +\infty[$:

لدينا الدالة العددية G

قابلة للإشتقاق على

$]0; +\infty[$ حيث من

$x \in]0; +\infty[$ تكون:

0,5

0,25

0,25

$$G'(x) = \frac{5}{9} \times 3x^2 + 1 - \frac{2}{3} \left(3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} \right) = \frac{5}{3}x^2 + 1 - 2x^2 \ln x - \frac{2}{3}x^2 = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

و عليه $G'(x) = g(x)$ ما يعني أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(2) حسب بدلالة α العدد A_α : لدينا من أجل كل عدد كل عدد حقيقي x من المجال $[1; \alpha]$: $g(x) \geq 0$ و عليه فإن:

$$G(1) = \frac{14}{9} \text{ و } G(\alpha) = \frac{5}{9}\alpha^3 + \alpha - \frac{2}{3}\alpha^3 \ln \alpha \text{ ولدينا } A_\alpha = \int_1^\alpha g(x) dx = [G(x)]_1^\alpha = G(\alpha) - G(1)$$

$$\text{و عليه } A_\alpha = \frac{5}{9}\alpha^3 + \alpha - \frac{2}{3}\alpha^3 \ln \alpha - \frac{14}{9} \mu a$$

إنتهى تصحيح الموضوع.