



ماي 2022

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات / المدة : 3 ساعات و نصف.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأولالتمرين 1 (4 ن)

المطلوب اختيار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة مبررا الاختيار.

أ	ب	ج	
1	e	$\frac{1}{e}$	1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ تساوي :
2	$y = \frac{2}{e^{2x}}$	$y = \frac{-2}{e^{2x}}$	2 احد حلول المعادلة التفاضلية $y'' + 4e^{-2x} = 0$ هو الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$:
3	6048	4068	3 قسم يتكون من 18 تلميذا و 12 تلميذة نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا و أمينا ، عدد اللجان بحيث يكون الرئيس ولدا و الأمين بنتا هو
4	$F(x) = 3x^4 + 1$	$F(x) = 2x^4 + x - 3$	4 لتكن $f(x) = 8x^3 + 1$ ، الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=1$ معرفة بـ

التمرين 2 (4 ن)

يحتوي صندوق U_1 على سبع كريات منها خمس حمراء مرقمة بـ 1 ، 1 ، 1 ، 0 ، 2 و كريتين خضراوين مرقمة بـ 1 ، 0 و يحتوي صندوق U_2 على سبع كريات منها ثلاث حمراء مرقمة بـ 2 ، 2 ، 1 و اربعة خضراء مرقمة بـ 2 ، 1 ، 0 ، 0 (الكرات لا نفرق بينها باللمس).

نرمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة اوجه مرقمة من 1 الى 6، بحيث اذا ظهر الرقمان 2 و 4 نسحب عشوائيا كريتين من الصندوق U_1 على التوالي دون ارجاع ، و في باقي الحالات

نسحب كريتين في آن واحد من الصندوق U_2 .

(1) لتكن الحادثتين A و B حيث :

A " سحب كريتين من نفس اللون " .

B : " سحب كريتين من نفس الرقم " .

أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

(2) هل الحادثتين A و B مستقلتين ؟ علل.

(3) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس الرقم ، ما هو احتمال أن تكون الكريتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

(4) نعيد التجربة حيث نسحب الآن من U_1 كريتين في آن واحد و نضعها في الصندوق U_2 ، ثم نسحب كريتين على التوالي دون ارجاع من U_2 .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب الكرات الحمراء المسحوبة.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين 3 (5 ن)

(I) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$

(1) ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على

$\mathbb{R}$ حيث: $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

(2) مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود.

(3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(4) برهن بالتراجع أنه و من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1 \leq u_n < 4$

(5) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(II) نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

(1) عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0

• نضع $\alpha = -4$

(أ) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ب) تحقق من صحة تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

(ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين 4 (7 ن)

(I) دالة عددية معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$
(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[1; 1.5]$

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود أطراف مجال تعريفها. ماذا تستنتج ؟

(2) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(5) بيّن أن $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

(6) أنشئ (C_f) و (Δ) .

(7) أ) جد الدالة الأصلية للدالة : $\frac{1}{x}(1 - \ln x) \mapsto x$ و التي تنعدم من أجل $x = e$

ب) أحسب المساحة $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = x$, $x = 1$, $x = \alpha$ حيث α العدد المشار إليه في الجزء I

ج) تحقق أن : $S(\alpha) = \frac{\alpha^2(2 - \alpha^2)}{2}$

انتهى الموضوع الأول.

الموضوع الثاني

التمرين 1 (4 ن)

اجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات التالية:

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على $], +\infty[$, 0 كما يلي : $f(x) = 2x + \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = 2x$.

(2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3x + \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية.

(3) للمعادلة $2 \ln(x) - \ln(5x-6) = 0$ حلان متمايزان هما 2 و 3.

(4) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية متزايدة.

التمرين 2 (4 ن)

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 والأخريان تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فإثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخريان تحملان الرقم 3 .

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .

نعتبر الحادثتين A و B حيث :

A " مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 "

B " الحصول على القريصتين بيضاوين "

(1) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

(2) ماهو احتمال أن يكون مجموع الرقمين المسحوبين أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاويتين ؟

(3) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب قريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم أحسب الانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين 3 (5 ن)

(I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$$

(1) أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$
 ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

(2) أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} (u_n - 1)$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب بدلالة n المجموع L_n حيث : $L_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

التمرين 4 (7 ن)

(I) الشكل التالي هو التمثيل البياني (γ) للدالة $x \rightarrow e^{-2x}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة

$$y = 4x + 2 \quad | \quad \alpha \text{ هي فاصلة نقطة تقاطع } (\gamma) \text{ و } (\Delta).$$



الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$

(1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) .

ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(2) تحقق أن $-0.16 < \alpha < -0.15$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{2x} g(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d).

(4) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$

(5) ارسم (C_f) و (d). (نأخذ $f(\alpha) = 3.07$)

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

(7) عين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

(أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة احسب : $\int_0^x 2te^{2t} dt$

(ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي

المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات : $x = 0$ ، $x = \lambda$ و $y = x + 3$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق في شهادة البكالوريا ☺ - استأذنة المادة -

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول

رقم التمرين	الحل	التنقيط
التمرين 1	(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ تساوي e : اذن الجواب الصحيح هو ب)	1 ن
	(2) احد حلول المعادلة التفاضلية $y'' + 4e^{-2x} = 0$ هو الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$: $y = -e^{-2x}$ اذن الجواب الصحيح هو أ)	1 ن
	(3) قسم يتكون من 18 تلميذا و 12 تلميذة نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبا و أمينا ، عدد اللجان بحيث يكون الرئيس ولدا و الأمين بنتا هو 6048 اذن الجواب الصحيح هو ب)	1 ن
	(4) لتكن $f(x) = 8x^3 + 1$ ، الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=1$ معرفة بـ $F(x) = 2x^4 + x - 3$ اذن الجواب الصحيح هو ج)	1 ن

0.5 ن

ملاحظة : في هذه الحالة كل صندوق له احتمال سحب حيث $P(U_1) = \frac{1}{3}$ و $P(U_2) = \frac{2}{3}$.
عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق U_1 هي : $A_7^2 = 42$ و من الصندوق U_2 هي : $C_7^2 = 21$.
١ حساب احتمالات الحوادث :

0.5 ن

$$P(A)=29/63 \quad ; \quad P(B)=17/63$$

0.5 ن

(2) الحادثتين A و B غير مستقلتين لأن
لدينا $P(A \cap B) = \frac{7}{63}$ و منه

$$P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$$

0.75 ن

(3) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس الرقم ، ما هو احتمال أن تكون الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{17}$$

(4) تعيين قيم المتغير العشوائي X .

قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0, 1, 2\}$.

0.75 ن

$$P(X = 0) = \frac{C_5^2}{C_7^2} \times \frac{A_4^2}{A_9^2} + \frac{C_2^2}{C_7^2} \times \frac{A_6^2}{A_2^9} + \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} \times \frac{A_5^2}{A_9^2} = \frac{175}{756}$$

0.5 ن

(ب) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X = 1) = \frac{C_5^2}{C_7^2} \times \frac{2 \times A_4^1 A_5^1}{A_9^2} + \frac{C_2^2}{C_7^2} \times \frac{2 \times A_6^1 A_3^1}{A_2^9} + \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} \times \frac{2 \times A_4^1 A_5^1}{A_9^2} = \frac{418}{756}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2}{C_7^2} \times \frac{A_5^2}{A_9^2} + \frac{C_2^2}{C_7^2} \times \frac{A_3^2}{A_2^9} + \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} \times \frac{A_4^2}{A_9^2} = \frac{163}{756}$$

0.75 ن

2	1	0	$X = x_i$
$\frac{163}{756}$	$\frac{418}{756}$	$\frac{175}{756}$	$P(X = x_i)$

0.25 ن

(ج) الأمل الرياضياتي $E(X)$

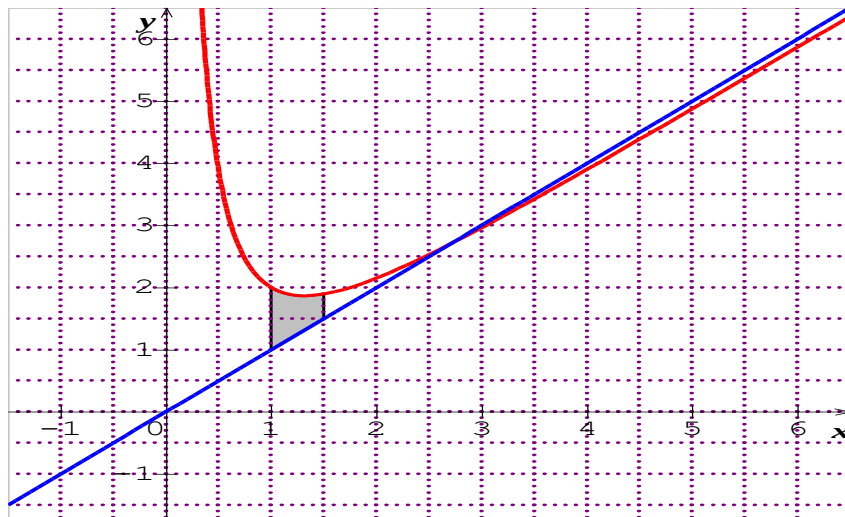
$$E(X) = \frac{744}{756} \cong 0.9$$

0.5 ن	(1) الرسم	التمرين 3
0.5 ن	(2) تمثيل على محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2	
0.25 ن	التخمين : يبدو أن (u_n) متزايدة و متقاربة نحو العدد 2	
0.5 ن	استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات : $1 \leq u_n \leq 4$	
0.5 ن	اتجاه التغير (u_n) : (u_n) متتالية متزايدة	
0.5 ن	(u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة	
0.5 ن	(3) (v_n) هندسية من أجل $\alpha = -4$ $v_0 = -3$ و $q = \frac{2}{3}$	
0.75 ن	(4) أ) $u_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4$ و $v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n$	
0.5 ن	ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$	
0.5 ن	ج) $S_n = 9\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 4(n+1)$	

0.5 ن	(1) النهايات	التمرين 4
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$	
0.25 ن	(ب) $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ومنه $g'(x) > 0$ إذن هي دالة متزايدة تماما على المجال	
0.25 ن	$]0, +\infty[$	
0.5 ن	جدول التغيرات	
0.5 ن	(2) مبرهنة القيم المتوسطة	
	إشارة $g(x)$	
0.5 ن	سالبة على المجال $]0; \alpha]$ و موجبة على المجال $[\alpha; +\infty[$	
	$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ (1 (II	
0.25 ن	إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$	
	f متناقصة على $]0; \alpha]$ و f متزايدة على $[\alpha; +\infty[$	
	(2) النهايات	
0.5 ن		
0.5 ن	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	
	جدول التغيرات	
0.5 ن	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ (3	
	(d) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب لـ (c_f)	
0.5 ن	$f(x) - y = \frac{1 - \ln x}{x}$	
0.5 ن	(c_f) فوق (d) على $]0; e]$ و (c_f) تحت (d) على $[e; +\infty[$	
	$(c_f) \cap (d) = \{(e; e)\}$	
0.75 ن	(4) إثبات أن : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$ والحصص : $\frac{7}{2} < f(\alpha) < 1$	

(5) الرسم

0.5 ن



0.5 ن

(6) أ) الدالة الأصلية h : $h(x) = \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}$

ب) $S_{(\alpha)} = \int_1^{\alpha} [f(x) - x] dx = \frac{(2 - \ln \alpha) \ln \alpha}{2}$

0.5 ن

ج) $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ و $S_{(\alpha)} = \frac{\alpha^2(2 - \alpha^2)}{2}$

الموضوع الثاني

رقم التمرين	الحل	التنقيط
التمرين 1	(1) الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$, كما يلي : $f(x)=2x + \ln(\frac{x+1}{2x})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = 2x$. خطأ (2) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3x + \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة زوجية. خطأ بل دالة فردية (3) للمعادلة $2 \ln(x) - \ln(5x-6) = 0$ حلان متمايزان هما 2 و 3. صحيح (4) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_n = -3(\frac{1}{4})^n$ هي متتالية متزايدة صحيح	1 ن 1 ن 1 ن 1 ن

0.5 ن	عدد الحالات الممكنة هي : $C_7^2 = 21$	التمرين 2
0.5 ن	(1) احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 هو :	
0.5 ن	$P(A) = \frac{9}{21}$	
0.5 ن	$P(B) = \frac{3}{21}$	
0.75 ن	(2) احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين :	
0.5 ن	$P(C) = \frac{1}{21}$	
0.5 ن	(3) تعيين قيم المتغير العشوائي: $X = \{3,4,5,6,7,8,10\}$ (ب) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :	
0.75 ن	$P(X = 3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{2}{21}$	
	$P(X = 4) = \frac{C_2^2 + C_1^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_2^1}{21} = \frac{3}{21}$	
	$P(X = 5) = \frac{4}{21}$	
	$P(X = 6) = \frac{3}{21}$	
	$P(X = 7) = \frac{4}{21}$	
	$P(X = 8) = \frac{4}{21}$	
	$P(X = 10) = \frac{C_2^2}{21} = \frac{1}{21}$	

0.5 ن	<table><tr><td>$X = x_i$</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td><td>$\sum$</td><td></td></tr><tr><td>$p(X = x_i)$</td><td>$\frac{2}{21}$</td><td>$\frac{3}{21}$</td><td>$\frac{4}{21}$</td><td>$\frac{3}{21}$</td><td>$\frac{4}{21}$</td><td>$\frac{4}{21}$</td><td>$\frac{1}{21}$</td><td>1</td><td></td></tr></table>	$X = x_i$	3	4	5	6	7	8	10	$\sum$		$p(X = x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1		
$X = x_i$	3	4	5	6	7	8	10	$\sum$														
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	1														
0.5 ن	ج) حساب الأمل الرياضي : $E(X) = \left(3 \times \frac{2}{21}\right) + \left(4 \times \frac{3}{21}\right) + \left(5 \times \frac{4}{21}\right) + \left(6 \times \frac{3}{21}\right) + \left(7 \times \frac{4}{21}\right) + \left(8 \times \frac{4}{21}\right) + \left(10 \times \frac{1}{21}\right) \cong 5.67$																					
0.5 ن	حساب التباين والانحراف المعياري : $V(X) = 7.18$ الانحراف المعياري $\sigma(X) = \sqrt{v} = 2.68$																					
0.5 ن	(1) ا) نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$ ① من أجل $n=0$: لدينا $u_0 = 2$ و $2 > 1$ إذن $u_0 > 1$ ومنه $p(0)$ صحيحة ② نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي <u>أي n أي $u_n > 1$ ونبرهن على أن $p(n+1)$ صحيحة أي $u_{n+1} > 1$</u> لدينا $u_n > 1$ ومنه $u_n + 2u_n > 1 + 2u_n$ وبالتالي $3u_n - 1 > 2u_n$ ومنه $\frac{3u_n - 1}{2u_n} > 1$ إذن $u_{n+1} > 1$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة اذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$	التمرين 3																				

(ب)

0.5 ن

ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
 من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{2u_n}$$

$$= \frac{(-2u_n + 1)(u_n - 1)}{2u_n}$$
 من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n > 1$
 ومنه (1) $u_n - 1 > 0$
 و $-2u_n < -2$ ومنه $-2u_n + 1 < -1$ أي أن
 (2) $-2u_n + 1 < 0$
 وكذلك (3) $2u_n > 0$
 من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $\frac{(-2u_n + 1)(u_n - 1)}{2u_n} < 0$
 أي $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$
 بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل
 بـ 1 فإن (u_n) متقاربة.

(2) (1)

0.25 ن

$u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$
 من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2u_n}(u_n - 1)$$
 ولدينا $u_n > 1$ ومنه $2u_n > 2$ إذن $\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$
 بضرب الطرفين في العدد الموجب $(u_n - 1)$ نحصل على

0.75 ن

$u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$ ومنه $\frac{1}{2u_n}(u_n - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب)

0.5 ن

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$
 ومنه $0 < u_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 1)$
 $0 < u_2 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_1 - 1)$
 $0 < u_3 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_2 - 1)$

 $0 < u_n - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$
 بضرب أطراف هذه المتباينات طرفا لطرف نجد :
 $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)$
 وبما أن $u_0 - 1 = 1$ فإن $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 (طريقة 2 : يمكن استعمال طريقة البرهان بالتراجع)

(3)

0.5 ن

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2} - 1}{2 \frac{3u_n - 1}{2} - 1} = \frac{3u_n - 1 - 2}{6u_n - 2 - 2} = \frac{3u_n - 3}{6u_n - 4}$$

$$= \frac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} = \frac{1}{2} v_n$$

 ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$
 ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n :
 كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ ومنه $2v_n u_n - v_n = u_n - 1$ إذن

$$u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \text{ ومنه } (2v_n - 1)u_n = v_n - 1$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3} \text{ إذن}$$

0.5 ن

0.5 ن	<u>جر حساب بدلالة n المجموع L_n حيث</u> $L_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ ومنه $\text{إن} \quad \frac{v_n - 1}{u_n} = 2v_n - 1$ $L_n = (2v_0 - 1) + (2v_1 - 1) + (2v_2 - 1) + \dots + (2v_n - 1)$ $= 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (1 + 1 + \dots + 1)$ $= 2v_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} - (n + 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - n - 1$ $= -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} - n$									
0.5 ن	(1) بقراءة بيانية نحدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ). (γ) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty; \alpha[$ وتحت (Δ) على $[\alpha; +\infty[$ و (γ) يقطع (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة α									
0.5 ن	استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x. <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>α</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$g(x)$	+	0	-	التمرين 4
x	$-\infty$	α	$+\infty$							
$g(x)$	+	0	-							
0.25 ن	(2) التحقق أن $-0.16 < \alpha < -0.15$									

لدينا: $g(-0.16) \cdot g(-0.15) = 0.017 \times (-0.05) < 0$
ومنه $-0.16 < \alpha < -0.15$.

(1) حساب النهايات

0.75 ن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3 - 2x e^{2x}) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{3}{x} - 2e^{2x} \right) = \boxed{-\infty}$$

(2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{2x} g(x)$ و استنتاج اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول التغيرات

$f'(x) = e^{2x} g(x)$ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = 1 - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = e^{2x}(e^{-2x} - 4x - 2) = \boxed{e^{2x} g(x)}$$

0.75 ن

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

0.5 ن

(3) أ) أثبت أن المستقيم (d) الذي معادلته $y = x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x e^{2x}) = 0$ و منه المستقيم (D) ذو المعادلة

$y = x + 3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

0.5 ن

الوضع النسبي

لدينا $[f(x) - (x+3)] = -2x e^{2x}$ و منه إشارة الفرق
 $[f(x) - (x+3)]$ هي عكس إشارة x إذن (C_f) يقع
 تحت (D) على المجال $]0; +\infty[$ و فوق (D) على المجال $]-\infty; 0[$
 و (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(0; 3)$.

0.5 ن

(4) نبين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$

لدينا $g(\alpha) = 0$ معناه: $e^{-2\alpha} - 4\alpha - 2 = 0$ أي:

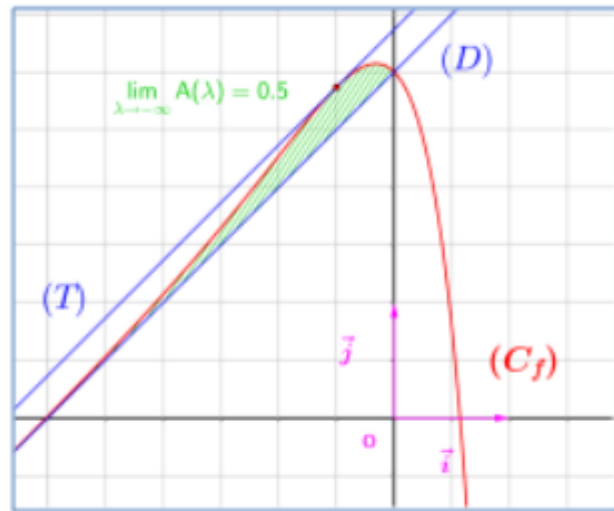
$e^{2\alpha} = \frac{1}{4\alpha + 2}$ نعوض في عبارة f فنجد:

$f(\alpha) = \alpha + 3 - 2\alpha \times \frac{1}{4\alpha + 2}$

0.5 ن

$= \alpha + 3 - \alpha \times \frac{1}{2\alpha + 1} = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$

(5) رسم (C_f) و (d)



0.5 ن

(6) نبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (d) يُطلب تعيين معادلته.

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $-2 e^{2x} - 4 x e^{2x} = 0$ أي أن

$$-2e^{2x}(2x+1)=0 \text{ ومنه } 2x+1=0 \text{ إذن } x=-\frac{1}{2}.$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) عند النقطة

0.5 ن

$$\text{ذات الفاصلة } -\frac{1}{2} \text{ معادلته } y = x + 3 + \frac{1}{e}.$$

(7) تعيين بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين

يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا

$$\text{كان } 3 < m < 3 + \frac{1}{e}$$

(أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة

0.25 ن

$$\text{نضع } v'(t)=2e^{2t} , u(t)=t$$

$$\text{ومنّه } v(t)=e^{2t} , u'(t)=1 \text{ إذن}$$

$$\int_0^x 2te^{2t} dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t) dt$$

$$= [te^{2t}]_0^x - \int_0^x e^{2t} dt = xe^{2x} - \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^x$$

0.5 ن

$$= xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2}$$

(ب) λ عدد حقيقي اصغر تماما من 0 ، حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز

المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمت ذات المعادلات : $x=0$ ، $x=\lambda$

و $y = x + 3$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^0 (f(x) - (x+3)) dx = \int_0^{\lambda} 2xe^{2x} dx$$

$$= \left[xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \right]_0^{\lambda} = \left(\lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right) ua$$

0.5 ن

ومنه :

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left(\lambda e^{2\lambda} - \frac{1}{2}e^{2\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} ua$$

