



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (06 نقاط)

(I)-(1)- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 ، ثم استنتج باقي قسمة العدد A على 7

$$A = 5^{2022} + 1443 .$$

حيث :

(2)- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $222^n + 4 \times 5^n + 337$ قابلا للقسمة على 7 .

(3)- B عدد طبيعي غير معدوم مكتوب في النظام ذو الأساس 10 كما يلي : $B = 20xx$

- عين قيم العدد الطبيعي x الذي يحقق : $B \equiv 6[7]$.

(II)-(1)- تحقق أن العدد 337 أولي .

(2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : (1) $14x - 337y = 2022$

(أ)- تحقق أن المعادلة (1) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$ (ب)- حلل العدد 2022 إلى جداء عوامل أولية .

(ج)- بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 337 ، ثم استنتج حلول المعادلة (1) .

(د)- عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق : $x \times y - 2696 = 0$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

(1) - (C) هو التمثيل البياني للدالة f على المجال : $[0, +\infty[$ المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(كما هو موضح في الوثيقة المرفقة)

- لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

(أ)- مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية .

(ب)- ضع تخميناً حول اتجاه تغير و تقارب هذه المتتالية .

(ج)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه : من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 1 < U_n < 2$

(د)- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا نستنتج ؟ - أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

(2)- لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \ln(U_n - 1)$.

(أ)- أثبت أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها. (لاحظ أن : $U_n^2 - 2U_n + 2 = (U_n - 1)^2 + 1$)

(ب)- عين حدها الأول V_0 . أكتب V_n ، U_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

(ج)- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \log(\sqrt{U_0 - 1}) + \log(\sqrt{U_1 - 1}) + \dots + \log(\sqrt{U_n - 1})$

- أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(د)- نعتبر الجداء P_n حيث : $P_n = \frac{1}{(U_0 - 1)} \times \frac{1}{(U_1 - 1)} \times \dots \times \frac{1}{(U_n - 1)}$

- أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : P_n = \frac{1}{2} e^{2^n \ln 4}$

التمرين الثالث: (08 نقاط)

الجزء الأول :

الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - (2x + 4)e^{x-2}$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	+	$\bigcirc$	-
$g(x)$	1	$1 + 2e^{-5}$	$-\infty$

(1)- أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0.4 < \alpha < 0.5$.

(2)- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 e^{x-2} - \frac{1}{4}x^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

(1)- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2)- أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$ ، استنتج اتجاه تغيرا لدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3)- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

(4)- عين نقاط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

(5)- انشئ (C_f) على المجال $[-5, 2]$ (نأخذ : $f(\alpha) \approx -0.2$)

(6)- عين قيم الوسيط الحقيقي التي من أجلها المعادلة : $e^x = \left(\frac{m}{x^2} + \frac{1}{4}\right) \times e^2$ تقبل ثلاث حلول مختلفة .

(7)- لتكن الدالتين g و G المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^{x-2}$ ، $G(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{x-2}$ ،

أ- بين أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g ، استنتج حساب : $\int_1^2 g(x)dx$

ب- أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) ومحور الفواصل و المستقيمين الذي معادلتهما :

$$x = 2 \quad x = 1$$

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = e^{1-f(x)}$

أكتب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، استنتج إشارتها ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h (دون حساب عبارة $h(x)$)

لا تضع فرصة تقييم مستواك

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) - اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير :

(1) - (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx$ ، المجموع : $U_0 + U_1 + \dots + U_n$ يساوي :

(أ) - $e^2 \left[1 - \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1} \right]$ (ب) - $e(e-1) \left[1 - \left(\frac{1}{e} \right)^n \right]$ (ج) - $e(e-1) \left[1 - \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1} \right]$

(2) - A عدد حقيقي حيث : $A = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt[4]{16} \times \sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$

(أ) - $A = \frac{1}{2}$ (ب) - $A = 2$ (ج) - $A = \sqrt{2}$

(II) - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x - 6y = 3$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases} \alpha \equiv -1 \pmod{6} \\ \alpha \equiv -4 \pmod{5} \end{cases}$ بطريقتين مختلفتين .

التمرين الثاني: (08 نقاط)

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما تحقق : $\begin{cases} U_5 = 32768 \\ U_7 = 2097152 \end{cases}$

(1) - أوجد الأساس q لهذه المتتالية و حدها الأول U_0 .

(2) - أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ، أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ، ماذا تستنتج ؟

(3) - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

(4) - باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 + 8 + 8^2 + \dots + 8^n = \frac{8^{n+1} - 1}{7}$$

(5) - عين العدد الطبيعي n بحيث : $1 + 8 + 8^2 + \dots + 8^n = 19173961$

(6) - (أ) - أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 13.

(ب-) استنتج باقي قسمة العدد α على 13 حيث : $\alpha = 102 \times 38^{2022} + 5^{1443} - 3$.

(ج-) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $7S_n \equiv 4[13]$

(7- أ-) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n + 6) \times 8^{2n} [13]$

(ب-) عين قيم العدد الطبيعي التي تحقق : $(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$ و n مضاعف للعدد 2 .

التمرين الثالث: (08 نقاط)

الجزء الأول :

- لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$ بـ : $f(x) = x + 2 - \ln(2x + 1)^2$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

(1-) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} f(x)$. فسر هذه النتيجة بيانيا.

(2-) ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3-) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه -3 ، ثم اكتب معادلته .

(4-) أوجد إحداثيتي نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي (T) معادلته : $y = x$.

(5-) أحسب : $f(-1)$ ، $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ) .

(6-) لتكن الدالتين h و H المعرفتان على المجال $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$ بـ :

$$H(x) = \left(\frac{2x + 1}{2} \right) \ln(2x + 1) - x \quad , \quad h(x) = \ln(2x + 1)$$

(أ-) بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h .

(ب)- أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ : (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذي معادلتهما $x = 0$

$x = \lambda$ حيث : $\lambda > 0$. (ج)- بين أن : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$.

الجزء الثاني :

- لتكن الدالة g المعرفة على $D_g = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$ بـ : $g(x) = \frac{3}{2} + \left| x + \frac{1}{2} \right| - 2Ln|2x + 1|$ ، (C_g) تمثيلها البياني

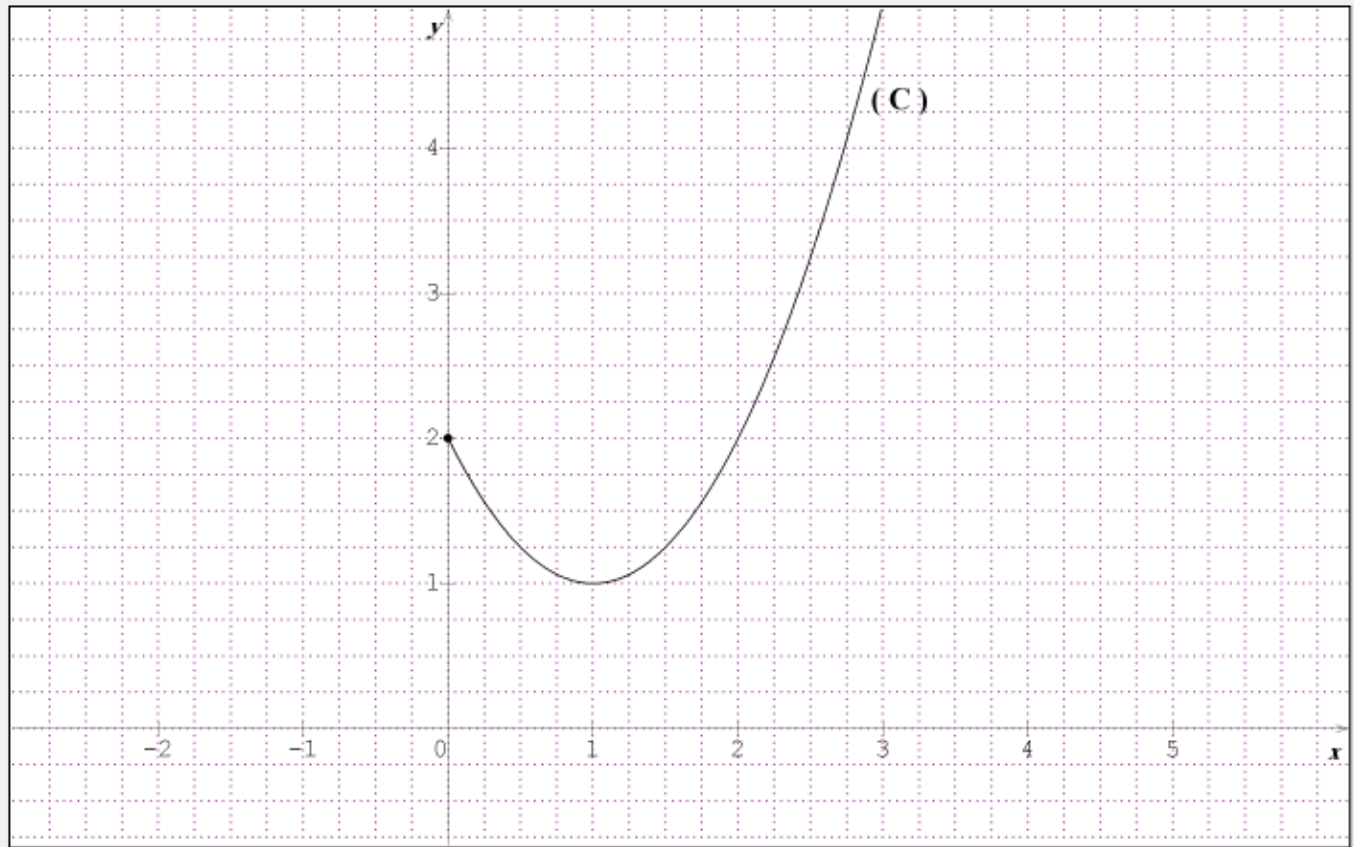
(أ)- أثبت أنه من أجل كل $x \neq -\frac{1}{2}$ يكون $-x - 1 \neq -\frac{1}{2}$ و ، $g(-1-x) = g(x)$ فسر هذه النتيجة بيانا .

(ب)- أثبت أن : $g(x) = f(x)$ على مجال يطلب تعيينه .

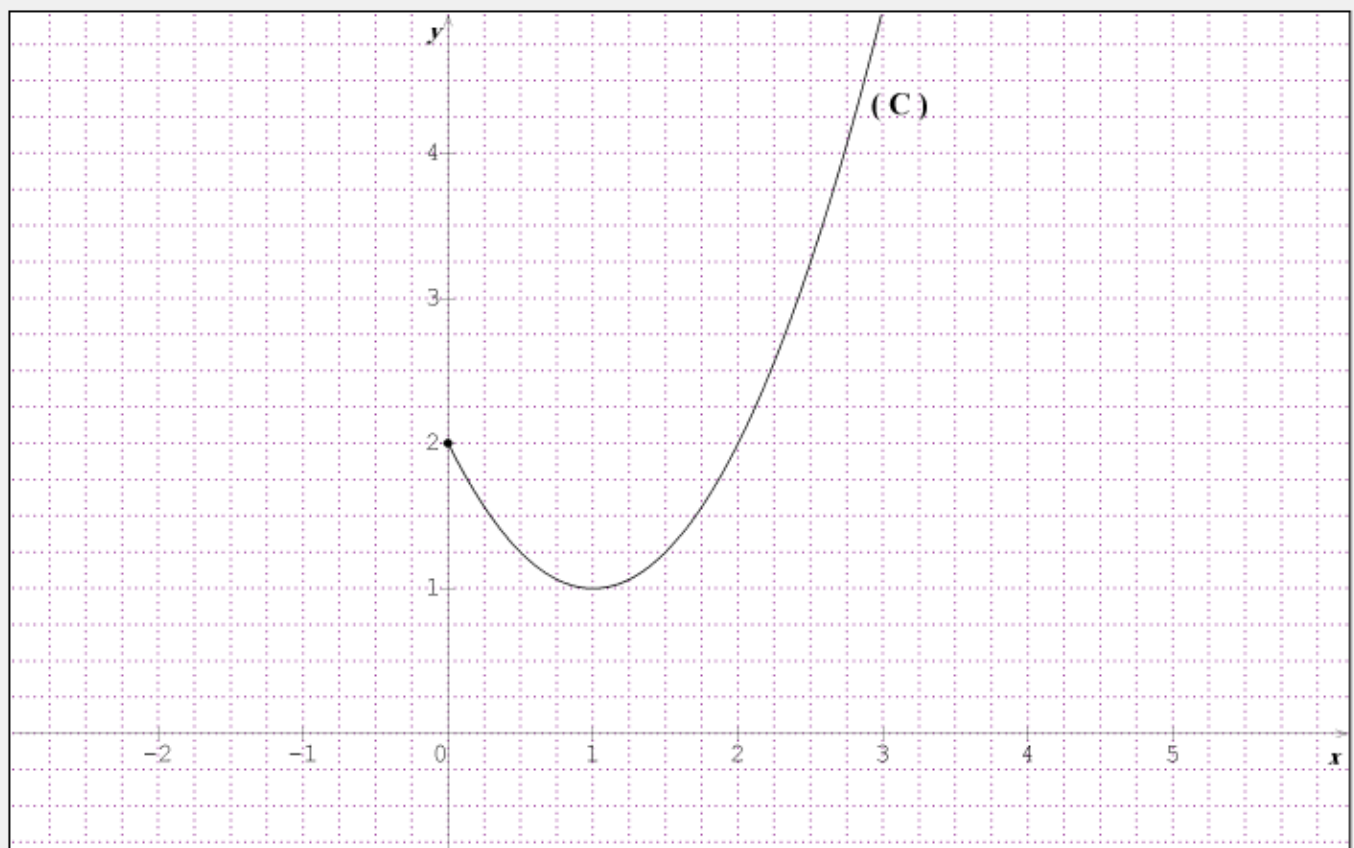
(ج)- إشرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f) ، ثم انشئه في نفس المعلم السابق (استعمل الألوان للتوضيح)

لا تضع فرصة تقييم مستواك

.....: الوَيْعَةُ المَرْفَعَةُ : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب



.....: الوَيْعَةُ المَرْفَعَةُ : التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم و اللقب



الموضوع الأول :

التمرين الأول : (30) 06 نقاط

(I-1) - بواقي قسمة العدد 5^n على 7 :

$$5^0 \equiv 1[7], 5^1 \equiv 5[7], 5^2 \equiv 4[7], 5^3 \equiv 6[7], 5^4 \equiv 2[7], 5^5 \equiv 3[7], 5^6 \equiv 1[7].$$

ومنه : $P = 6$ (01ن)

$n =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$

$$A \equiv 2[7] \text{ ومنه } 5^{2022} \equiv 1[7] \text{ معناه } 2022 = 337 \times 6, 1443 \equiv 1[7] -$$

(0.5ن) باقي قسمة A على 7 هو 2 .

$$(2) - 222 \equiv 5[7] \text{ ومنه } 222^n \equiv 5^n[7], 222^n + 4 \times 5^n + 337 \equiv (5^{n+1} + 1)[7],$$

$$222^n + 4 \times 5^n + 337 \equiv 0[7] \text{ معناه } : 5^{n+1} + 1 \equiv 0[7], 5^{n+1} \equiv 6[7], n + 1 = 6k + 3 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) ومنه } :$$

(01ن) $n = 6k + 2 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)}$

$$(3) - B = 2 \times 10^3 + 10x + x = 11x + 2000 \text{ (} 0 \leq x < 10 \text{)}$$

$$B \equiv 6[7] \text{ معناه } : 4x + 5 \equiv 6[7], 4x \equiv 1[7], 8x \equiv 2[7], x \equiv 2[7] \text{ و منه } :$$

$$(k \in \mathbb{N}) \text{ , } x = 7k + 2 \text{ , لكن } : 0 \leq x < 10 \text{ و منه } : 0 \leq 7k + 2 < 10, \frac{-2}{7} \leq k < \frac{8}{7}, k \in \{0,1\}.$$

(0.75ن) ومنه : $x = 2$ أو $x = 9$. ($B = 2099$ غير مطلوب)(II-1) - $\sqrt{337} \approx 18.35$, لا يقبل القسمة على : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ومنه العدد 337 أوليا..... (0.5ن)(2) - (أ) - $PGCD(14, 337) = 1$ ($\frac{1}{2022}$) ومنه المعادلة (1) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$. (0.25ن)(ب) - $2022 = 2 \times 3 \times 337$ (0.25ن)(ج) - $14x - 337y = 2022$ يكافئ : $14x = 337(y + 6)$, لكن : 14 و 337 أوليان فيما بينهما و منه :

حسب مبرهنة غوص : $\frac{337}{x}$ (0.25ن)

- $(k \in \mathbb{Z})$ ، بتعويض x بما يساويه في المعادلة (1) نجد : $y = 14k - 6$ و منه :

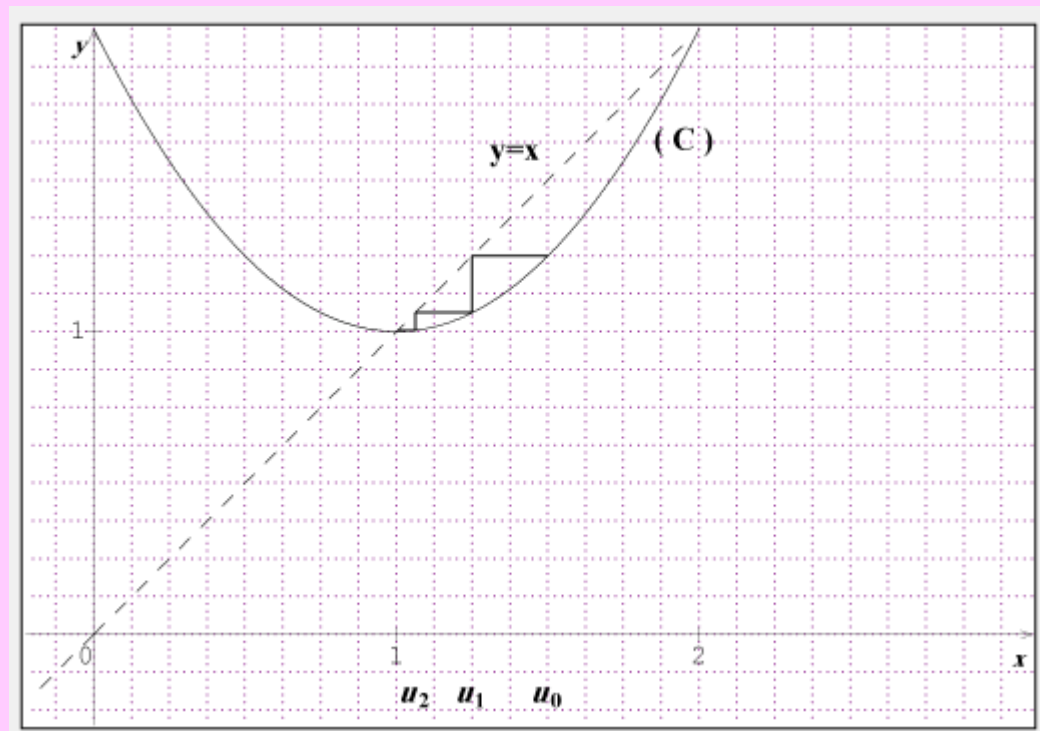
(01ن)..... $S = \{(337k, 14k - 6) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(د) - $x \times y - 2696 = 0$ يكافئ : $337k(14k - 6) - 2696 = 0$ أي أن : $7k^2 - 3k - 4 = 0$

(0.5ن)..... $S' = \{(337, 8)\}$: منه $k_2 = \frac{-4}{7}$ ، $k_1 = 1$ ، $\Delta = 121$

التمرين الثاني: ☺☺☺

(1-أ)- تمثيل الأربع حدود الأولى من (U_n) . (0.25ن)



(ب)- (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$. (U_n) متقاربة . (0.5ن)

(ج)- البرهان بالتراجع (0.75ن)

(د)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 3U_n + 2 = (U_n - 1)(U_n - 2)$

بما أن $1 < U_n < 2$ فإن : (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$. (0.5ن)

(0.25ن)..... $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$: متقاربة : l و محدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة :

(0.25ن)..... $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$: ومنه $l_1 = 1$ ، $l_2 = 2$ ، $\Delta = 1$ مرفوض ، $l^2 - 3l + 2 = 0$

$$V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - 1) = \ln(U_n^2 - 2U_n + 2 - 1) = \ln[(U_n - 1)^2] : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ أجل كل } (2) \text{-(أ)}$$

$$V_{n+1} = 2 \ln(U_n - 1) = 2V_n \quad (1 < U_n < 2) \text{ ومنه : } (V_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 2 \text{ و حدها الأول :}$$

$$V_0 = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \quad (0.25) \text{ (ن) (0.25) (ن) (0.5) (ن) (0.25)}$$

$$U_n = e^{V_n} + 1 = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + 1, \quad V_n = -2^n \ln 2 : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ أجل كل } (ب) \text{-(ب)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1 \text{ ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0 \text{ بما ان : } (0.25) \text{ (ن) (0.25)}$$

$$S_n = \frac{1}{2 \ln 10} [\ln(U_0 - 1) + \ln(U_1 - 1) + \dots + \ln(U_n - 1)]$$

$$S_n = \frac{1}{2 \ln 10} [V_0 + V_1 + \dots + V_n] = \frac{1}{2 \ln 10} \left[\frac{-\ln 2}{1 - 2} (1 - 2^{n+1}) \right] \quad (ج) \text{-(ج)}$$

$$S_n = \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{2} \right) \log 2 \text{ ومنه : } (0.5) \text{ (ن) (0.5)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty \quad (0.25) \text{ (ن) (0.25)}$$

$$\frac{1}{e^{V_n}} = e^{-V_n} = \frac{1}{U_n - 1} \quad e^{V_n} = U_n - 1 \quad (د) \text{-(د)}$$

$$P_n = e^{-V_0} \times e^{-V_1} \times \dots \times e^{-V_n} = e^{-V_0 - V_1 - \dots - V_n} = e^{-(V_0 + V_1 + \dots + V_n)}$$

$$P_n = e^{-\ln 2 (1 - 2^{n+1})} = e^{\ln \frac{1}{2} + 2^{n+1} \ln 2} = \frac{1}{2} e^{2^n \times 2 \ln 2} = \frac{1}{2} e^{2^n \ln 4} \quad (0.5) \text{ (ن) (0.5)}$$

التمرين الثالث: ☺☺☺ 08 نقا

الجزء الأول :

(1) - مبرهنة القيم المتوسطة (0.25) (ن)

(2) - إشارة $g(x)$: (0.5) (ن)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	+	○	-

الجزء الثاني

(1)..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{x-2} - \frac{1}{4} \right) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(e^{x-2} - \frac{1}{4} \right) = -\infty$ (0.5ن)

(2) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2xe^{x-2} + x^2e^{x-2} - \frac{1}{2}x = \frac{4xe^{x-2} + 2x^2e^{x-2} - x}{2} = \frac{-x(-4e^{x-2} - 2xe^{x-2} + 1)}{2}$$

(0.5ن)..... $f'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$-\frac{1}{2}x$	+		-	-
$g(x)$	+	+		-
$f'(x)$	+		-	

و منه : f متناقصة تماما على المجال : $[0, \alpha]$ ، f متزايدة تماما على المجال : $[\alpha, +\infty[$: (0.5ن)

جدول تغيرات الدالة f : (0.75ن)

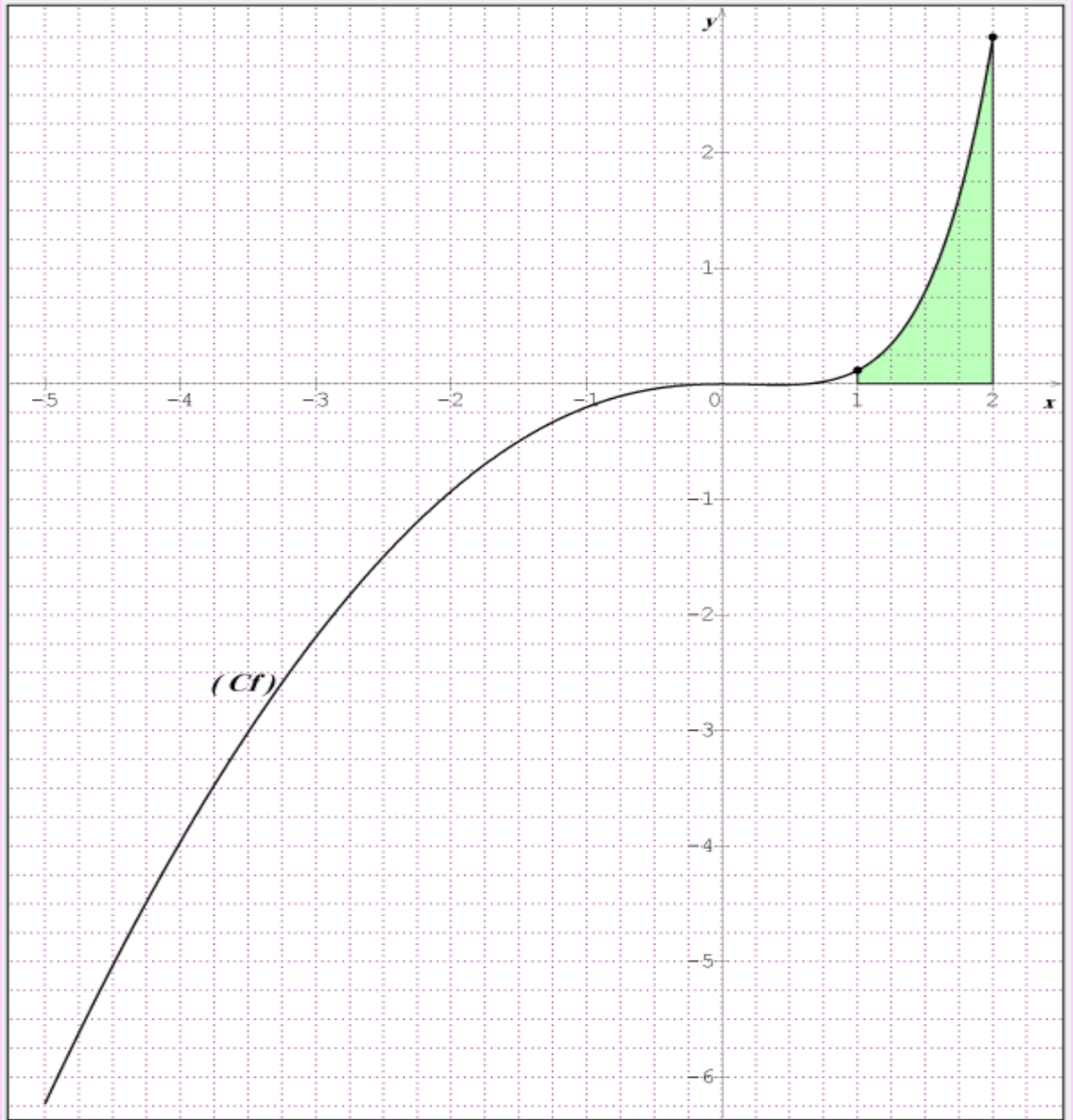
x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

(0.25ن)..... (3) $(T) : y = f'(x)(x - 2) + f(2) = 7x - 11$

(4) $(C_f) \cap (xx') : f(x) = 0$: $x^2 \left(e^{x-2} - \frac{1}{4} \right) = 0$: $x = 0$ أو $x = 2 - \ln 4$.

(0.5ن)..... $(C_f) \cap (xx') = \{O, A(2 - \ln 4, 0)\}$

(5) إنشاء (C_f) : (01ن)



..... $m \in]-0.2; 0[$: للمعادلة ثلاث حلول يكافئ : $f(x) = m$ ، $e^x = \left(\frac{m}{x^2} + \frac{1}{4}\right) \times e^2 - (6)$ (0.5ن)

$G'(x) = (2x - 2)e^{x-2} + (x^2 - 2x + 2)e^{x-2} = (2x - 2 + x^2 - 2x + 2)e^{x-2} = x^2 e^{x-2} = g(x)$: $\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على G

..... $G'(x) = x^2 e^{x-2} = g(x)$: ومنه (0.25ن)

..... $\int_1^2 g(x) dx = G(2) - G(1) = 2 - e^{-1}$ (0.5ن)

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 g(x) dx + \int_1^2 \frac{-1}{4} x^2 dx = 2 - e^{-1} - \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{12} - e^{-1}$$

: ومنه

..... $S = \left(\frac{17}{3} - \frac{4}{e} \right) cm^2$ (0.75ن)

الجزء الثالث :

h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $h'(x) = -f'(x)e^{1-f(x)}$ (0.5ن)

h و f متعاكستان في اتجاه التغير (0.25ن)

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$h'(x)$		-	+	-

جدول تغيرات الدالة f : (0.5ن)

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$h'(x)$	-	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$	e	$e^{1.2}$	0