



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : 05 نقاط

- (1) u_n المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+5}{14-4u_n}$
- أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{12}{14-4u_n}$
- ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$
- ج - بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما واستنتج أنها متقاربة.
- (2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كإيلي : $v_n = \frac{au_{n-1}}{2u_{n-5}}$
- عين قيمة العدد الطبيعي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$
- (3) نضع في كل مايلي $a = 2$

أ - عبر بدلالة n عن u_n و v_n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ب - أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{2021}$

ج - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0-2,5} + \frac{1}{u_1-2,5} + \dots + \frac{1}{u_n-2,5}$

التمرين الثاني : 04 نقاط

يحتوي صندوق 09 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 04 كريات بيضاء مرقمة بـ 0 ; 1 ; 2 ; 3 و 04

كريات حمراء مرقمة بـ : 0 ; 1 ; 2 ; 3 و كرية سوداء تحمل الرقم : -1

(1) نسحب على التوالي ودون إرجاع كرتين من الصندوق ونعتبر الحدثين :

A : " الكريات المسحوبة مختلفة اللون " ، B : " الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 2 "

أ - بين أن $P(A) = \frac{2}{3}$ ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب .

ب- أحسب احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون ومجموع أرقامها يساوي 2 .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقام فردية المتبقية في الكيس .

- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) نضيف n كرية سوداء تحمل الرقم -1 ونسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع كرتين من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث C : " الكرتين المسحوبتين سوداوين "

- بين أن $P(C) = \frac{n^2+n}{n^2+17n+72}$ ثم عين عدد الكرات السوداء المضافة إلى الصندوق بحيث يكون $P(C) = \frac{15}{91}$

التمرين الثالث : 4 نقاط

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 3 + (x + 1)^2 e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تحقق أن الدالة $G: x \rightarrow (-x - 1)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $g: x \rightarrow xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$

(2) نضع $I = \int_0^1 xe^{-x} dx$ و $J = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $J = 2I - e^{-1}$
 ب - أحسب قيمة I ثم استنتج قيمة J .

(3) أ - بالإستعانة بنتائج السؤال (2 - ب) أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A = \int_0^1 (x + 1)^2 e^{-x} dx$
 ب - فسر النتيجة المحصل عليها هندسياً.

التمرين الرابع : 7 نقاط

I / الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ كإيلي : $g(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x-1)$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

ب - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ - بين أنه من أجل كل حقيقي x من $]1; +\infty[$ فإن : $g'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1; +\infty[$ ثم تحقق أن : $2.7 < \alpha < 2.8$
 ب - استنتج إشارة $g(x)$ على $]1; +\infty[$

II / نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ كإيلي : $f(x) = 4e^{-x} \ln(x-1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ - بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً.

ب - أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، فسر النتيجة المحصل عليها.

(2) أ - برر قابلية اشتقاق الدالة f على $]1; +\infty[$ ثم بين أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$: $f'(x) = 4e^{-x} g(x)$
 ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أنشئ المنحنيين (C_g) و (C_f) (الوحدة $2cm$) (نضع $\alpha = 2,75$ و $f(\alpha) = 0,14$)

(4) تحقق أن : $\ln(\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$

(5) - نضع : $U = \int_2^\alpha \frac{1}{x-1} dx$ و $V = \int_2^\alpha \ln(x-1) dx$

أ - أحسب العدد الحقيقي U و باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $V = 3 - \alpha$

ب - لتكن A مساحة الحيز بـ cm^2 المحدد بالمنحنى (C_g) ومحور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = \alpha$ و $x = 2$

ج - بين أن $U - V = \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1}$ واستنتج المساحة A .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 4 نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}$ (1) أحسب u_1 ، u_2 .

(2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \sqrt{2}$

ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبين أنها متقاربة .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كيلي : $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$

أ - بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج - استنتج أن $u_n = \frac{\sqrt{2}n}{n+1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$

- بين أن : $S_n = \frac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1)$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني : 5 نقاط

يحتوي صندوق U_1 على 9 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين مرققة: 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرققة : 1 ، 3 ، 3 و أربع كريات سوداء مرققة 2 ، 2 ، 3 ، 3 . نسحب عشوائيا وفي أن واحد كرتين من الصندوق U_1 نعتبر الحدثين A : " الكرتين المسحوبتين من نفس الرقم " و B : " الكرتين المسحوبتين من نفس اللون "

(1) أ - أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب .

ب - بين أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء رقي الكرتين المسحوبتين .

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

(3) نعتبر الصندوق الأول U_1 وصندوق آخر U_2 يحتوي على 6 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين

مرققة ب: 1 ، 1 و كرتين حمراوين مرققة ب : 1 ، 3 و كرتين سوداوين مرققة ب: 2 ، 2

نرمي حجر نرد متوازنة مرققة من 1 إلى 6 مرة واحدة فعند ظهور رقم فردي نسحب كرة من الصندوق الأول U_1 وعند

ظهور رقم زوجي نسحب كرة من الصندوق U_2 .

(أ) شكل شجرة الاحتمالات التي تمذج هذه الوضعية.

(ب) بين أن احتمال ظهور كرة بيضاء هو $P(B') = \frac{5}{18}$.

(ج) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني U_2 ؟

- (1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
- (2) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 ، أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A = \int_1^\lambda \frac{1}{x(x+1)^2} dx$
- (3) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ : $F(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx$
- أ - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة λ العدد الحقيقي $F(\lambda)$.
- ب - بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} = 0$ ، ثم استنتج $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda)$

التمرين الرابع : 7 نقاط

I / g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$

- (1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$
- II / نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$
- ج - أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
- ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$.
- ج - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .
- (3) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث $0,1 < a < 0,2$.
- ب - أحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ كلا من (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .
- (4) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$
- (5) أ - بين أن الدالة $K: x \rightarrow (-x-1)e^{-x+2}$ هي دالة أصلية للدالة $k: x \rightarrow xe^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.
- ب - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 2$ و $x = 3$