

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات  
على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين  
الموضوع الأول:

## التمرين الأول:

لتكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بـ :  $U_0 = \frac{1}{4}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+4}$

(1) عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n+4}$

(2) أ) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-2 < U_n < 1$

ب) برهن أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

ج) هل المتتالية  $(U_n)$  متقاربة ؟

(3) لتكن المتتالية  $(V_n)$  المعرفة كما يلي :  $V_n = \frac{U_n+2}{1-U_n}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

أ) بين أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) اكتب  $V_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $U_n$  بدلالة  $n$ .

ج) احسب المجموع :  $S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{5}{V_1} + \frac{5^2}{V_2} + \dots + \frac{5^n}{V_n}$

## التمرين الثاني:

يحتوي وعاء على  $n$  كرة بيضاء، 5 كرات حمراء و 3 خضراء، نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

(1) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

(2) نرمز بـ  $P(n)$  إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن :  $P(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+7)(n+8)}$

ب) أحسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$  ثم فسّر النتيجة .

(3) نضع  $n = 4$  يقوم لاعب بسحب كرتين من الوعاء في آن واحد ثم يرجعهما و يسحب كرتين أخريين. لإجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مبلغا قدره 30 ديناراً و بعد كل سحب يتحصل على 40 دينار إذا كانت الكرتان من نفس اللون، وإلا يتحصل على 5 دنانير فقط.

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبين ربح هذا اللاعب .

أ) عين قيم المتغير العشوائي  $X$  .

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  .

ج) أحسب الأمل الرياضي  $E(X)$  للمتغير العشوائي  $X$  .

### التمرين الثالث:

بين صحة أو خطأ كل من الجمل التالية مع التعليل:

1. الدالة  $x \mapsto e^{-2x}$  هي حل المعادلة التفاضلية  $y' = 2y$ .

2.  $\ln(3e^\pi) = \pi + \ln 3$ .

3. المتراجحة  $e^{1-2x} > e^{x+1}$  لا تقبل حلول في  $\mathbb{R}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^x + 4) = 2 \ln 2$ .

### التمرين الرابع:

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $]-1, +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أحسب  $g(0)$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]-1, +\infty[$ .

(II) لتكن الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أحسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1, +\infty[$  يكون :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

ج) استنتج أنه إذا كان  $x \in [0, 4]$  فإن  $f(x) \in [0, 4]$ .

د) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

(3) أرسم كلا من المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

(4) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = 0$  و  $x = 1$ .

(III)  $(U_n)$  متتالية معرفة على المجموعة  $\mathbb{N}$  بما يلي:  $U_0 = 4$  و  $U_{n+1} = f(U_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

(1) باستعمال المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  مثل على حامل محور الفواصل كل من  $U_0, U_1, U_2, U_3$ .

(2) استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  ثم استنتج أنها متقاربة

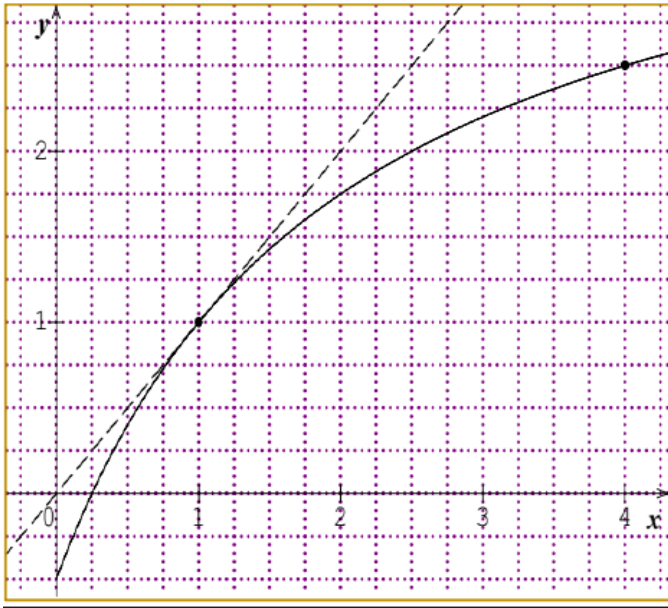
## التمرين الأول:

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 3 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و خمس خضراء تحمل الأرقام: 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3 .  
نسحب في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

(1) نعتبر الحادثتين :  $A$  : " سحب كرتين من نفس اللون " و  $B$  : " سحب كرة خضراء على الأقل " .  
(أ) أحسب احتمال الحوادث التالية :  $A$  ،  $B$  و  $A \cap B$  .  
(ب) هل الحادثتين  $A$  و  $B$  مستقلتان ؟ .

(2) نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .  
عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب الأمل الرياضي  $E(X)$  .

## التمرين الثاني:



$f$  معرفة على  $[0; 4]$  كما يلي:  $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$  و  $(C)$

تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1. أستنتج اتجاه تغير  $f$  ، وتحقق أن المنصف الأول يمس المنحنى  $(C)$  في النقطة ذات الفاصلة 1 .

2. نعرف المتتالية  $(u_n)$  بـ : 
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- أنقر الشكل ومثل على محور الفواصل الحدود:  $u_0, u_1, u_2$  و  $u_3$  للمتتالية  $(u_n)$  (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء .)

ب- أعط تخميناً فيما يخص اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، وتخمينا حول تقاربها .

3. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 1 < u_n \leq 4$

ب- أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ، واستنتج أنها متقاربة .

4. نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ- أثبت أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها ، وأحسب حدها الأول .

ب- أكتب بدلالة  $n$  عبارة  $v_n$  ، واستنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ت- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ث- أثبت أن من أجل  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{n+1}{6}(8+n)$

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي:

| الجواب - أ -                                      | الجواب - ب -                    | الجواب - ج -                                 |
|---------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------------------|
| حلول المعادلة التفاضلية<br>$2y' + y - 3 = 0$ هي   | $y = ce^{\frac{-x}{2}} + 2$     | $y = ce^{\frac{-x}{2}} + 3$                  |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e) - 1}{x}$   | $e^{-1}$                        | $2e$                                         |
| حلول المتراجحة $\ln(-2x+1) < 3$ هي                | $S = ]-\infty; \frac{1}{2}[$    | $S = ]-\infty; \frac{1-e^3}{2}[$             |
| إذا كان $f(x) = \ln(e^{2x} + 1)$ فإن $(C_f)$ يقبل | مقارب عمودي معادلته<br>$x = -1$ | مقارب أفقي معادلته<br>$y = -1$ عند $-\infty$ |
| مقارب مائل معادلته<br>$y = 2x$ عند $+\infty$      |                                 |                                              |

### التمرين الرابع:

(I) دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  وشكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

$(C_f)$  المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  (وحدة الطول 1 cm).

(1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

ب) اثبت أن المستقيم  $(d)$  ذو المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

ج) ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(d)$ .

(2) اثبت أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $0,1 < \alpha < 0,2$

ب) اثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $I$  يطلب تعيين إحداثياتها.

ج) عين معادلة المماس  $(T)$  الذي يوازي المستقيم  $(d)$ .

(4) ارسم  $(d)$  ,  $(T)$  و  $(C_f)$ .

(5) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

(6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $\mathbb{R}$  حيث :  $h(x) = xe^{2-x}$  والتي تنعدم عند  $x = -1$ .

ب) احسب  $A$  مساحة الحيز المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(d)$  والمستقيمين  $x = 0$  و  $x = 2$ .