

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: بحيث
$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3 \\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - (\alpha - 1)u_n \end{cases}$$
 $v_n = u_{n+1} - u_n$ و $\alpha \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$.

I. نأخذ $\alpha = 2$.

1. بين أن المتتالية (v_n) ثابتة.

2. استنتج أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

II. نأخذ $\alpha = \frac{3}{2}$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

2. اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 5 - \frac{1}{2^{n-2}}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. العددان الطبيعيان a_n و b_n بحيث: $a_n = 3^{n+1} - 1$ و $b_n = 3^n$ أوليان فيما بينهما.

2. أساس التعداد الذي يكون فيه: $2003 = 21 \times 43$ هو العدد الطبيعي 8.

3. تكون المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - u_n^2}} \end{cases}$$
 بحيث $\alpha \in [0; 2[$ ثابتة من أجل $\alpha = \sqrt{2}$.

4. التمثيل البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس للدالة $x \mapsto \ln x$ يقبل مماسا وحيدا يمر من مبدأ المعلم.

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي m بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^m على العدد 13.
2. بين أن العدد $2 \times 1990^{1962} - 3^{2022} + 2019^{1443}$ مضاعف للعدد 13.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2^{12m+2} + 2m + 1 \equiv 0 [13]$.
- II. نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و d بحيث $a = 4n + 3$ ، $b = 7n + 2$ و $d = PGCD(a; b)$.
1. بين أن $d = 1$ أو $d = 13$ ثم أثبت أنه إذا كان $d = 13$ فإن: $n \equiv 9 [13]$.
2. عين قيمة d من أجل $n = 2019^{1954}$.
3. ليكن العددان الطبيعيان: $A = 4n^2 + 7n + 3$ و $B = 7n^2 + 9n + 2$.
- أ) بين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $n + 1$.
- ب) جد بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الرابع: 07 نقاط

- I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = (x^2 + x - 1)e^{x+1} + 1$.
1. ادرس تغيرات الدالة g .
2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد -1 والآخر α بحيث $0,5 < \alpha < 0,52$.
- ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (x^2 - x)e^{x+1} + x - 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. أ) تحقق أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = (x - 1)(xe^x + 1)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ب) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ج) أثبت أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيتهما.
2. اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
3. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .
4. أ) احسب $f(1)$ ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و ارسم (C_f) . يعطى $f(\alpha) \approx -1,62$.
- ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = mx - 1$ ثلاث حلول متمايضة.
5. أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + (x^2 - 3x + 3)e^{x+1}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
- ب) احسب A مساحة الحيز المحدد ب: (C_f) وحامل محور الفواصل بين العددين -1 و 1.

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $5x - 3y = 14$ بحيث x و y عددان صحيحان.

1. جد الحل $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) والذي يحقق $y_0 = 2x_0$ ، ثم حل المعادلة (E) .
2. بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x و y أوليان فيما بينهما.
3. استنتج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق:
$$\begin{cases} \lambda \equiv 17[3] \\ \lambda \equiv 3[5] \end{cases}$$
، ثم عين باقي قسمة العدد λ على 15.
4. عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) بحيث: $|2x - y| \leq 1$
5. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $2\alpha 1\beta$ في النظام ذي الأساس 10 بحيث α و β عددان طبيعيان. ✓ جد الثنائيات $(\alpha; \beta)$ التي من أجلها يكون العدد N قابلا للقسمة على 3 و 5.

الجزء الأول: في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $I = [0; 2]$ بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

(Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$ ، باستعمال الوثيقة المرفقة أجب على السؤالين التاليين:

1. حدد اتجاه تغير الدالة f على المجال I .
2. حدد الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

الجزء الثاني: نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n < 1$ و $1 < v_n \leq 2$.
ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .
3. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 2)(u_n + 2)}$.
ب) أثبت أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(v_n - u_n)$.
ج) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (v_0 - u_0)$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.
د) استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان، ثم احسب نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $D = [0; \ln 2]$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ ، $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

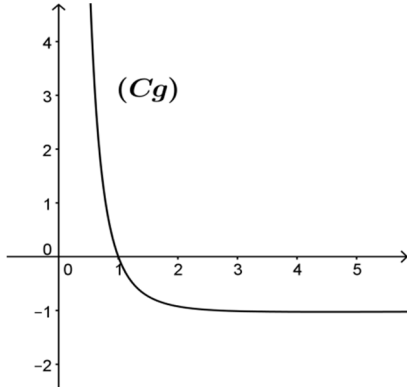
$$\text{نضع } I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx \text{ و } J = \int_0^{\ln 2} g(x) dx$$

1. بين أنه من أجل $x \in D$: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ ، ثم أعط حصرا للتكامل J .

2. أثبت أن $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = \ln 2$.

3. أ) تحقق أنه من أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$ ، ثم احسب التكامل I .
ب) استنتج قيمة التكامل J ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

التمرين الرابع: 07 نقاط



I. الدالة g معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو موضح في الشكل المقابل.

✓ بقراءة بيانية حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على المجال $]-\infty; 2[$ بـ: $f(x) = 1 - x - \frac{\ln(2-x)}{2-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل $x \in]-\infty; 2[$: $f'(x) = g(2-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة على المجال $[1; 2[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلته.

5. أ) احسب $f(0)$ ، ثم أنشئ (Δ) وارسم (C_f) .

ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ، (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = 2 - e$.

