



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام :  $-2; -1; 0; 1; 2$  و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام :  $-1; 0; 1$  و كرتان سوداوان تحملان الرقمين :  $-1; 0$  ( الكريات لا نفرق بينها عند اللمس).

1/ نسحب عشوائيا ودون إرجاع كرتين من هذا الكيس و ليكن الحدثان :

$A$ : "الكرتان المسحوبتان لوناها مختلفان",  $B$ : "الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما"

- أحسب  $p(A)$  و  $p(B)$  ثم بين أن  $p(A \cup B) = \frac{32}{45}$ .

2/ نعيد الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كرتين في آن واحد .

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي  $|x - y|$  حيث  $x$  و  $y$  هما الرقمان اللذان تحملهما الكرتان المسحوبتان من الكيس.

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي  $X$  ثم أكتب قانون إحصائه .

ب/ أحسب الأمل الرياضي  $E(X)$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

$(u_n)$  متتالية معرفة  $\mathbb{N}$  على كما يلي :  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(u_n^2 - u_n + \frac{1}{2})}$

(1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(u_n - \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{8}$

(2) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq 1$

(3) أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$ . هل هي متقاربة ؟

II) لتكن  $(v_n)$  متتالية المعرفة على كمايلي :  $v_n = u_n^2 - u_n$

(1) بين ان  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول

(2) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  و أحسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

(3) أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$  المجموع حيث:  $S_n = (u_0 - u_0^2) + (u_1 - u_1^2 + 1) + (u_2 - u_2^2 + 2) + \dots + (u_n - u_n^2 + n)$

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

(1) أ- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $5^n$  على 7

ب- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$

ج- استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعددين  $S_{2021}$  و  $S_{2022}$

(2) حل في المجموعة  $\mathbb{Z}^2$  الجملة :  $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ p \gcd(x, y) = 7 \end{cases}$

(3) نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة  $\mathbb{Z}$  المعادلة  $(E)$  ذات المجهول  $x$  :  $3x(x+2) \equiv 2[7]$

أ- حل في المجموعة  $\mathbb{Z}$  المعادلة  $(E)$  .

ب-  $N$  عدد طبيعي يكتب  $\overline{361}$  في نظام التعداد الذي أساسه  $\alpha$  وباقي القسمة الاقليدية للعدد  $N$  على 7 هو 3

عين قيم العدد الطبيعي  $\alpha$  ثم تحقق ان العدد 1436 قيمة ممكنة للعدد  $\alpha$  .

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

( I ) نعتبر  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة :  $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$

1 - أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  وشكل جدول تغيراتها

2 - استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$  يكون :  $g(x) > 0$

( II ) نعتبر  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة :  $f(x) = \frac{2}{x} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$

ليكن  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  تكون :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  .

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها .

ج- أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  معادلته  $y = x$  ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  .

(3) أ- تحقق انه من أجل كل  $x$  و  $-x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $f(x) + f(-x) = 0$  ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة هندسيا .

ب- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $0,3 < \alpha < 0,4$  ، ثم استنتج انها تقبل حلا اخر  $\beta$

يطلب تعيين حصرا له .

(4) أ- بين ان المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسيين  $(T_1)$  و  $(T_2)$  موازيين للمستقيم  $(\Delta)$  يطلب كتابة معادلتيهما .

ب- انشئ كل من  $(T_1)$  و  $(T_2)$  والمنحنى  $(C_f)$

(5) أ- بين ان الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}(\ln x^2)^2 + 2\ln|x|$  هي دالة اصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}^*$  .

ب - عين الدالة الاصلية للدالة  $f$  والتي تنعدم من اجل  $x = 1$  .

ج - نعتبر  $\lambda$  عدد حقيقي حيث  $\lambda > 1$  احسب التكامل  $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$

- فسر النتيجة هندسيا ثم احسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$  .

الموضوع الثاني:التمرين الأول: (4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية حيث  $u_1 = 2$  وأساسها  $\frac{1}{2}$  - نعتبر الجداء:  $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n+1}$

(أ)  $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-1}$  (ب)  $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}$  (ج)  $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}$

(2) حلول المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية  $-2 \times 3^{2x} + 2 \times 3^x + 4 = 0$  هي:

(أ)  $S = \left\{ \frac{-1}{\ln 3}; \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$  (ب)  $S = \left\{ \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$  (ج)  $S = \emptyset$

(3) (أ)  $\int_1^e \ln(x) dx = 1$  (ب)  $\int_1^e \ln(x) dx = e + 1$  (ج)  $\int_1^e \ln(x) dx = e - 1$

(4) (أ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = +\infty$  (ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$  (ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 1$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

$n$  عدد طبيعي حيث:  $n \geq 4$

يحتوي صندوق  $U$  على  $n$  كرية لا يمكن التمييز بينها في اللمس ، منها 3 حمراء و البقية سوداء . نسحب في آن واحد كرتين .

(1) أحسب احتمال الحدثين :  $A$  : سحب كرتين من نفس اللون .  $B$  : سحب كرية حمراء على الأكثر .

(2) أحسب احتمال الحدث  $C$  : سحب كرية حمراء على الأقل

(3) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ  $U_k$  للصندوق  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) الذي يحتوي على  $k$  كرية حمراء و  $n - k$  كرية سوداء ، نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين .

نسمي  $RR$  حادثة " الحصول على كرتين حمراويتين " و  $NN$  حادثة " الحصول على كرتين سوداويتين "

و  $RN$  حادثة " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

ليكن المتغير  $X$  العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء .

(أ) انجز شجرة الاحتمالات

(ب) عين مجموعة قيم  $X$  .

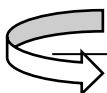
(ج) أثبت أن :  $P(X = 1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$  و  $P(X = 2) = \frac{8}{3n(n-1)}$  .

(د) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ثم أحسب أمله الرياضيائي .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

1.  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل  $a = \overline{201}$  و  $b = \overline{100}$

أكتب العددين  $a$  و  $b$  في النظام العشري .



2.  $x, y$  عددان صحيحان و  $(E)$  المعادلة ذات المجهول  $(x; y)$  التالية :  $ax - by = 3$

(أ) بين أنه إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  حلا للمعادلة  $(E)$  فإن :  $x \equiv 0[3]$

(ب) استنتج حلا خاصا  $(x_0; y_0)$  حيث  $0 \leq x_0 < 5$  ثم حل المعادلة  $(E)$

3. نرمز بالرمز  $d$  إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين  $x$  و  $y$  حيث  $(x; y)$  حل للمعادلة  $(E)$  .

(أ) ماهي القيم الممكنة للعدد  $d$  ؟

(ب) بين ان  $\text{pgcd}(x, y) = \text{pcgd}(y, 3)$  .

(ج) عين الثنائيات  $(x; y)$  حلول المعادلة  $(E)$  حتى يكون  $\frac{y}{x}$  كسرا قابلا للإختزال .

4.  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متالتان حسابيتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  :  $u_0 = 2$  ،  $u_{n+1} = u_n + 19$  و  $v_0 = 5$  ،  $v_{n+1} = v_n + 9$

- عين كل الثنائيات  $(p; q)$  للأعداد الطبيعية التي تحقق  $u_p = v_q$  و  $|q - p| \leq 20$  .

### التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

1| نعتبر الدالة  $g_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g_n(x) = n(x+1) + e^x$  حيث  $n$  عدد طبيعي غير معدوم

أ- أدرس تغيرات الدالة  $g_n$  ثم شكل جدول تغيراتها .

ب- برهن أن المعادلة  $g_n(x) = 0$  تقبل على  $\mathbb{R}$  حلا وحيدا  $\alpha_n$  ثم تحقق أن  $-2 < \alpha_n < -1$

ج- استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g_n(x)$

2| نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  حيث :  $f_n(x) = \frac{x e^x}{n + e^x}$  و نسمي  $(C_n)$  منحنيا البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ- أحسب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - x]$  ثم فسر النتائج بيانيا

ب- برهن انه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'_n(x) = \frac{e^x \cdot g_n(n)}{(n + e^x)^2}$

ج- بين أن :  $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f_n$

3| أ- أدرس وضعية المنحني  $(C_n)$  بالنسبة للمستقيم  $(D)$  الذي معادلته :  $y = x$

ب- أدرس وضعية المنحنيين  $(C_n)$  و  $(C_{n+1})$  ثم أنشئ المنحنيين  $(C_1)$  و  $(C_2)$

|| نعتبر التكاملين :  $I = \int_{-1}^0 x e^x dx$  و  $U_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$

1| أحسب :  $I$  ثم برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[-1, 0]$  :  $\frac{x e^x}{n} \leq \frac{x e^x}{n + e^x} \leq \frac{x e^x}{n + 1}$

2| بين أن المتتالية  $(U_n)$  متقاربة و حدد نهايتها

3| نضع :  $V_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $k$  :  $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$

ب- استنتج ان  $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln 2$