

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

(التمرين الأول: 4 نقاط)

نعلم أن فصائل الدم للإنسان أربعة وهي : O ، A ، B و AB

تتوزع مجموعة من عشرة أشخاص حسب فصائلهم الدموية كما يلي : ثلاثة أشخاص من فصيلة O ، أربعة من فصيلة A وشخصان من فصيلة B وشخص واحد من فصيلة AB ، نختار عشوائيا شخصين من هذه المجموعة.

(1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية : E " الشخصان المختاران لهما نفس الفصيلة الدموية "

" F " الشخصان المختاران من فصيلتين دمويتين مختلفتين " ، G " فصيلة أحد الشخصين على الأقل هي A "

(2) نرفق الفصيلة O بالعدد 4 الذي يمثل عدد الفصائل التي يمكن أن تتلقى من الفصيلة O ، وهكذا نرفق الفصيلة A

بالعدد 2 والفصيلة B بالعدد 2 والفصيلة AB بالعدد 1

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار لشخصين مجموع الرقمين المرفقين بفصيلتهما .

(أ) برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $X \in \{3;4;5;6;8\}$

(ب) بين أن $P(X=4)=\frac{1}{3}$ و $P(X=6)=\frac{2}{5}$ ثم عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) عين الأمل الرياضي للمتغير X

(د) أحسب احتمال الحدث $X=4$ إذا علمت أن فصيلة أحد الشخصين على الأقل هي A

(التمرين الثاني: 5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة و برر تقاربها .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 6 يطلب تحديد حددها الأول .

(ب) أكتب v_n بدلالة n واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) تحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\frac{1}{u_n} = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أكتب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التعليل .

(1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب : $f(x) = e^{ax} + \frac{b}{x+1}$ ، قيمتا العددين a و b بحيث يكون

المماس لمنحنائها في النقطة $A(0;2)$ موازيا لحامل محور الفواصل هما :

أ $a=1$ و $b=2$ (ب) $a=2$ و $b=1$ (ج) $a=1$ و $b=1$

(2) ليكن $I = \int_1^2 \frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} dx$ ، قيمة I هي (أ) $I = 2\ln 11$ (ب) $I = \frac{-1}{11}$ (أ) $I = \frac{1}{2} \ln 11$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي ، $u_n = \int_1^2 x^n e^{-x} dx$

المتتالية (u_n) : (أ) متزايدة (ب) متناقصة (ج) غير رتيبة

(4) (u_n) متتالية حسابية معرفة بعدها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r = 2$ ، المجموع $S_n = u_0 + u_3 + u_6 + \dots + u_{3n}$

يساوي : (أ) $S_n = \frac{n+1}{3}(6+6n)$ (ب) $S_n = \frac{3n+1}{2}(6+6n)$ (ج) $S_n = (n+1)(3+3n)$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

(2) أحسب $g(1)$ ، و أستنتج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

(ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) (أ) بين أن المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) .

(ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(4) بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = -x - 1$ مماس للمنحنى (C_f) عند نقطة يطلب تعيينها .

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,41 < \alpha < 0,42$

(6) (أ) أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

(ب) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

(7) أحسب التكامل $S = -\int_{\alpha}^1 f(x) dx$ وفسر بيانها النتيجة

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقط)

أجب بصرح أو خطأ على كل اقتراح من الاقتراحات التالية مع التعليل .

(1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + \ln x$

المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + e^{1+2\ln x}}{x} = e \quad (2)$$

(3) القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[1; 4]$ حيث $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ هي : $m = 2\sqrt{5} + 3$

(4) (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} \ln x dx$

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي كيس على 9 كرات (لا نفرق بينها باللمس) ، ثلاثة بيضاء مرقمة 1، 1، 2 ، وأربعة كرات حمراء مرقمة 1، 1، 2 ، 3 .

(1) نسحب من الكيس عشوائيا ثلاث كرات في أن واحد .

لتكن الحوادث التالية: A "الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B "الكرات الثلاثة المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى" ، C "الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم "

(أ) احسب احتمال الحادثة A واحتمال الحادثة B

(ب) بين أن $P(B \cap C) = \frac{1}{84}$

(ج) أستنتج احتمال الحادثة "الكرات الثلاثة المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى أو تحمل نفس الرقم "

(2) نسحب من نفس الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع . نفرض أنه عند سحب كرة تحمل رقما زوجيا نخسر

(10) نقاط وعند سحب كرة تحمل رقما فرديا نربح (5) نقاط .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.

(أ) برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{-20; +10; -5\}$

(ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) عين الأمل الرياضي للمتغير X . ماذا تستنتج ؟

التمرين الثالث: (5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

(1) (أ) أرسم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

والمستقيم (d) الممثل للدالة f المعرفة على IR كما يلي : $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ ،

(ب) باستعمال (d) و (Δ) مثل دون حساب على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 8$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي $v_n = \ln(8 - u_n)$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\ln \frac{3}{4}$ يطلب تحديد حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 8 - 7\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ج) أكتب بدلالة n الجداء : $P_n = \frac{1}{8 - u_0} \times \frac{1}{8 - u_1} \times \dots \times \frac{1}{8 - u_n}$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة : 2cm)

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي ، $f(x) + f(-x) = 0$ ، فسر بياناً النتيجة

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ثم استنتج أن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

(4) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي مبدأ المعلم

(5) أنشئ كلا من (Δ) ، (Δ') والمنحنى (C_f) .

(6) أ) بين أن الدالة $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذو المعادلتين

$$x = \ln 2 \text{ و } x = 0$$

(7) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) = f(-x)$

ب) استنتج طريقة لرسم (C_g) اعتماداً على (C_f) دون رسمه .

انتهى الموضوع الثاني