**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية** — **مديرية التربية لولايـــة البيض**
**امتحان بكالوريا تجريبية** — **ثانوية حميتو الحاج علي الشلالة**
**الشعبة: علوم تجريبية** — **دورة: مـــــــــــاي 2022**

**اختبار في مادة: الرياضيات** — **المدة: 3 ساعات ونصف**

## اخـــتر أحد الموضوعين وأجب عنه

## الموضوع الأول (20نقطة)

### التمرين الأول(04ن):

**اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير:**

1. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \int_0^1 (1+x^n)dx$ إذا .....

أ- متزايدة ب- متناقصة ج- ثابتة

2. باستعمال التكامل بالتجزئة التكامل $\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$ يساوي .....

أ- 2 ب- $\ln\left(\frac{64}{27}\right)$ ج- $\ln 27$

3. $f$ دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$ دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على $]-1;+\infty[$ معرفة بـ:

أ- $F(x) = \frac{x^3+x+1}{x+1}$ ب- $F(x) = \frac{-x+1}{x+1}$ ج- $F(x) = \frac{x^3-x+1}{x+1} - 1$

4. $\int_1^2 \frac{3}{x^4}\,dx = \ldots$

أ- $-\frac{9}{8}$ ب- $\frac{7}{8}$ ج- $\frac{9}{8}$

### التمرين الثاني:( 4 0ن)

يضم مصنع ورشتين $A$ و $B$ لتصنيع المصابيح الكهربائية. عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 5000 مصباح صنّعت الورشة $A$ منها 3000 وصنعت البقية الورشة $B$ . هناك نسبة $5\,\%$ من مصابيح الورشة $A$ معطوبة في حين تكون نسبة $4\,\%$ من مصابيح الورشة $B$ معطوبة. نسحب عشوائيا مصباحا من الطلب.

نرمز بـ $A$ إلى الحدث " المصباح مصنوع في الورشة $A$ " وبالرمز $B$ إلى الحدث " المصباح مصنوع في الورشة $B$ " وبالرمز $D$ إلى الحدث " المصباح به عطب ".

1. شكّل شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه الوضعية.
2. احسب احتمال الأحداث التالية:
   - أن يكون المصباح غير معطوب ومصنوعا في الورشة $A$
   - أن يكون المصباح معطوبا وليس مصنوعا في الورشة $A$
   - أن يكون المصباح معطوبا
   - أن يكون المصباح معطوبا أو مصنوعا في الورشة $A$ "
3. إذا كان المصباح معطوبا فما هو احتمال أن يكون مصنوعا في الورشة $A$ ؟

**التمرين الثالث:( 05ن)**

$(u_n)$ متتالية معرفة على $N$ بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل $n$ من $N$: $u_{n+1}=\frac{6u_n-2}{u_n+3}$

1) أ ـ بين أنه من أجل كل $n$ من $N$: $u_{n+1}=6-\frac{20}{u_n+3}$

ب ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n$ من $N$: $\frac{3}{2}\le u_n\le 2$

ج ـ بين أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) أ ـ بين أنه من أجل كل $n$ من $N$: $0\le 2-u_{n+1}\le\frac{8}{9}(2-u_n)$

ب ـ استنتج أنه من أجل كل $n$ من $N$: $0\le 2-u_n\le\frac{1}{2}\times\left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

**التمرين الرابع:( 07ن)**

I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-\ln(x^2)$

وجدول تغيراتها على المجال $]0;+\infty[$ موضح في الجدول التالي.

| $x$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | 3 | ↗ $+\infty$ |

❶ احسب $g(-x)-g(x)$ ماذا تستنتج؟

❷ شكل جدول تغيرات الدالة $g$ على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

❸ استنتج إشارة $g(x)$ على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1+\frac{\ln(x^2)}{x}$

و $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ أ) بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب) احسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين هندسيا؟

❷ أ) بين انه من اجل كل $x$ من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

❹ ادرس الوضع النسبي للمنحنى $\mathcal{C}_f$ والمستقيم $(\Delta)$.

❺ بين أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ موازيين للمستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

❻ احسب $f(1)$ ، ثم بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0,62\prec\alpha\prec-0,61$.

❼ أنشئ كلا من $(T_1)$ ، $(T_2)$ ، $(\Delta)$ والمنحنى $\mathcal{C}_f$.

**انتهى الموضوع الأول**

## الموضوع الثاني (20نقطة)

**التمرين الأول(04ن):**

**اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير:**

1. الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x(\ln x)^2}$ على المجال $]1;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $e$ هـي:

أ- $\frac{-1}{\ln x}$ ب- $1-\frac{1}{\ln x}$ ج- $\frac{1}{\ln x}$

2. $(t_n)$ متتالية ثابتة معرفة من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2t_1e+4t_2e^2+8t_3e^3+...+2^nt_ne^n$ يساوي .....

أ- $2t_1e\left(\frac{1-e^n}{1-e}\right)$ ب- $t_1\left(\frac{(2e)^{n+1}-1}{2e-1}\right)$ ج- $2t_1e\left(\frac{(2e)^n-1}{2e-1}\right)$

3. حلول المعادلة التفاضلية $y''+3y'+4e^{-2x}=0$ هي الدوال .....

أ- $x \to \frac{2}{e^{2x}}+c$ ب- $x \to \frac{1}{e^{2x}}+c$ ج- $x \to -e^{-2x}+c$

4. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\int_0^1 e^{1-x}dx$ إذا $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها.....

أ- $\frac{1}{e}$ ب- $e^2$ ج- $\sqrt{e}$

**التمرين الثاني(04ن):**

جمعية تتكون من 15 رجلا و12 امرأة نريد تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له وأمين.

1. ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها.

2. أحسب احتمال الاحداث التالية:

A:" الأمين إمراه" B:"الرئيس رجلا والأمين امرأة" C:"الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين"

D:"السيد محمد لا يترأس اللجنة" E:" أن تكون اللجنة مختلطة"

3. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد الرجال الموجودين فيها.
أ- عين قيم المتغير العشوائي X.
ب- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

**التمرين الثالث:( 05ن)**

1. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=-6$ ومن أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2n-1$ .

أ- أحسب الحدود $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 3$ : $u_n\succ 0$ ثم استنتج أنه من أجل كل $n\geq 4$ : $u_n\succ 2n-3$ .

ج- ماهي نهاية المتتالية $(u_n)$ ؟ ماذا تستنتج؟

2. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $v_n=u_n-4n+10$.

أ- برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=2^{2-n}+4n-10$

ج- أحسب بدلالة n المجموع $S_n$ حيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ثم الجداء $P_n$ حيث: $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$

**التمرين الرابع :( 07ن)**

لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $g(x)=1+x+e^x$

1)ادرس تغيرات الدالة $g$

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$حلا وحيدا $\alpha$. تحقق أن $\alpha$ من المجال $]-1.3;-1.2[$ .

3) حدد تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ .

$II$) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=\frac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي $(\Gamma)$ المنحنى البياني لها.

1)أ) أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة $f$ .

ب) أثبت أن $f(\alpha)=1+\alpha$ . .

جـ) برهن أن المنحنى $(\Gamma)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ بجوار $+\infty$ معادلته: $y=x$ .

د )اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة $O$ مبدأ المعلم، ثم ادرس وضعية المنحنى $(\Gamma)$ بالنسبة للمماس $(T)$.

3 )أ)برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x\geq 1$ لدينا : $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ .

ب) استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\Gamma)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=-\alpha$ .

**انتهى الموضوع الثاني**

**مع تمنيات أستاذة المادة مباركي .ف لكم بالتوفيق في بكالوريا 2022**

تصحيح التمرين البكالوريا علوم
2022 / 5 / 16

## الموضوع الأول

### التمرين الأول

اختيار الإجابة الصحيحة:

① الاختيار "ب" لأن:

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 (1+x^{n+1})dx - \int_0^1 (1+x^n)dx$$

$$= \int_0^1 (1+x^{n+1} - 1 - x^n)dx$$

$$= \int_0^1 x^n(x-1)dx$$

ولدينا: $0 \leq x \leq 1$ ومنه $x-1 \leq 0$ و $x^n > 0$

ومنه $\int_0^1 x^n(x-1)dx < 0$

$$U_{n+1} - U_n < 0$$

② الاختيار "ب" لأن:

$$\begin{cases} u = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & u' = \frac{-2}{x^2-1} \\ v' = 1 & v = x \end{cases}$$

$$\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{-2x}{x^2-1}dx$$

$$= \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^3 - \left[\ln(x^2-1)\right]_2^3$$

$$= 6\ln 2 - 3\ln 3$$

$$= \ln 2^6 - \ln 3^3$$

$$= \ln\left(\frac{2^6}{3^3}\right) = \ln\left(\frac{64}{27}\right)$$

③ الاختيار "ج" لأن:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$F(x) = \int (2x-1) - \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \frac{(x^2-x)(x+1)+1}{x+1} + C$$

$$= \frac{x^3+x^2-x^2-2x+1}{x+1} + C$$

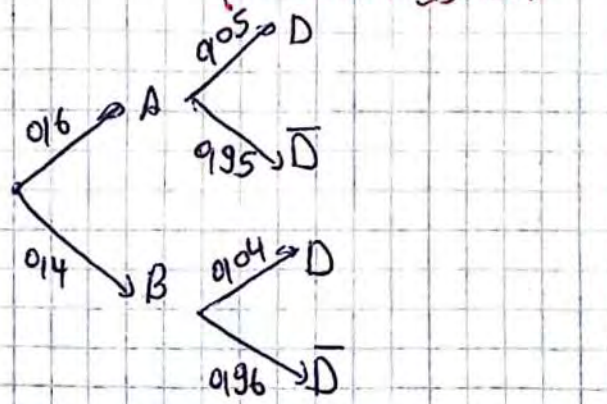
$$= \frac{x^3-x+1}{x+1} + C \quad \backslash C=-1$$

④ الاختيار "ب" لأن:

$$\int_1^2 \frac{3}{x^4}dx = \left[\frac{-1}{x^3}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$$

### التمرين الثاني:




احتمال الأحداث التالية:

* "المصباح غير معطوب ومصنوع في الورشة A" = $P(A \cap \overline{D}) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$

* "المصباح معطوب وليس مصنوع في A" =

$P(B \cap D) = 0{,}14 \times 0{,}04 = 0{,}0056$

* " أن يكون المصباح معطوبا :

$P(D) = 0{,}16 \times 0{,}05 + 0{,}0056 = 0{,}0136$

* " المصباح معطوب أو مصنوع في الورشة A "

$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$

$= 0{,}16 + 0{,}0136 - 0{,}16 \times 0{,}05$

$= 0{,}1696$

3/ احتمال ان يكون المصباح مصنوع في الورشة A علما انه معطوب :

$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}16 \times 0{,}05}{0{,}0136}$

$= 0{,}65$

التمرين الثالث :

$U_{n+1} = \frac{6U_n - 2}{U_n + 3}$ ; $U_0 = \frac{3}{2}$

1/ التبين ان : $U_{n+1} = 6 - \frac{20}{U_n + 3}$

$6 - \frac{20}{U_n + 3} = \frac{6(U_n + 3) - 20}{U_n + 3}$

$= \frac{6U_n - 2}{U_n + 3} = U_{n+1}$

ب/ البرهان بالتراجع أن : $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

لدينا : $\frac{3}{2} \leq U_0 = \frac{3}{2} \leq 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ ;

نفرض ان الخاصية صحيحة من أجل n أي : $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

ونثبت صحتها من أجل $(n+1)$ أي

$\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$

لدينا : $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

ومنه : $5 \leq U_n + 3 \leq \frac{9}{2}$

$-4 \leq \frac{-20}{U_n + 3} \leq \frac{-40}{9}$

$\frac{3}{2} \leq 2 \leq 6 - \frac{20}{U_n + 3} \leq \frac{14}{9} \leq 2$

ومنه : $\frac{3}{2} \leq U_{n+1} \leq 2$

اذا الخاصية صحيحة من أجل n حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هي صحيحة من أجل n .

ج/ تبيين ان $(U_n)$ متزايدة .

$U_{n+1} - U_n = \frac{6U_n - 2}{U_n + 3} - U_n$

$= \frac{6U_n - 2 - U_n(U_n + 3)}{U_n + 2}$

$= \frac{-U_n^2 + 3U_n - 2}{U_n + 3}$

تكافئ $U_{n+1} - U_n = 0$

$-U_n^2 + 3U_n - 2 = 0$

$\Delta = 1$

$\begin{cases} U_n = 1 \\ U_n = 2 \end{cases}$

| $U_n$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U_{n+1} - U_n$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

ولدينا : $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$ ومنه :

$U_{n+1} - U_n \geq 0$

اذا : $(U_n)$ متزايدة

المتتالية $(U_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو 2 .

P(2) / البرهن أن $0 \leq 2-U_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2-U_n)$

$2-U_{n+1} = 2 - \frac{6U_n - 2}{U_n + 3}$

$= \frac{-4U_n + 8}{U_n + 3} = \frac{4(-U_n+2)}{U_n+3}$

لدينا: $U_n \leq 2$ ومنه $\begin{cases} -U_n+2 \geq 0 \\ U_n+3 > 0 \end{cases}$

$\frac{3}{2} < U_n \leq 2$

إذا: $2-U_{n+1} \geq 0$

$\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

ومنه: $\frac{4}{5} \leq \frac{4}{U_n+3} \leq \frac{8}{9}$

إذا: بضرب الأطراف في $(2-U_n)$ نجد

$0 \leq \frac{4}{5}(2-U_n) \leq \frac{4}{(U_n+3)}(2-U_n) \leq \frac{8}{9}(2-U_n)$

إذا: $0 \leq 2-U_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2-U_n)$

الاستنتاج:

لدينا: $0 \leq 2-U_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2-U_n)$

$\begin{cases} 0 \leq 2-U_1 \leq \frac{8}{9}(2-U_0) \\ 0 \leq 2-U_2 \leq \frac{8}{9}(2-U_1) \\ \vdots \\ 0 \leq 2-U_n \leq \frac{8}{9}(2-U_{n-1}) \end{cases}$

بالجداء نجد:

$0 \leq 2-U_n \leq \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{8}{9}(2-U_0)$

$0 \leq 2-U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

حساب $\lim U_n$:

$0 \leq \lim (2-U_n) \leq \lim \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ (0)

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} 2-U_n = 0$

إذا: $\lim U_n = 2$

التمرين الرابع:

$g(x) = x^2 + 2 - \ln x^2$ $\quad D_g = \mathbb{R}^*$

(1) حساب $g(-x) - g(x)$

$g(-x) - g(x) = (-x)^2 + 2 - \ln(-x)^2 - x^2 - 2 + \ln x^2$

$= x^2 + 2 - \ln x^2 - x^2 - 2 + \ln x^2 = 0$

نستنتج أن: $g(x) = g(-x)$

ومنه الدالة g زوجية

جدول تغيرات الدالة g:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

استنتاج $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

$g(x) > 0$

$f(x) = x - 1 + \frac{\ln x^2}{x}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

الحوادث:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 - \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim x - 1 + \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$ (0 / $0^+$ / $+\infty$)

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim x - 1 + \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$ (0 / $0^-$ / $+\infty$)

ومنه: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$

② $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ / $f$ تبين أن

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{2x}{x^2} \times x - 1 \ln x^2}{x^2}$$

$$= 1 + \frac{2 - \ln x^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2 - \ln x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه: اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

أذا: $f'(x) > 0$

ومنه: الدالة $f$ متزايدة تماما على مجالي تعريفها

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

التبين ان $(\Delta)$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$

$$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\ln x^2}{x} = 0$$

ومنه: $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C_f)$

الوضع النسبي لـ $(C_f)$ و $(\Delta)$

ندرس اشارة الفرق

$f(x) - y$

$f(x) - y = 0$

$\ln x^2 = 0$ تكافئ

$x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x^2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)-y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | | تقاطع | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | تقاطع | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | |

د/ تبين أن $(C_f)$ يقبل مماسين موازيين لـ $(\Delta)$:

$(T) \parallel (\Delta)$ معناه: $f'(x) = 1$ ..

تكافئ: $\frac{x^2 + 2 - \ln x^2}{x^2} = 1$

ومنه: $x^2 + 2 - \ln x^2 = x^2$

$\ln x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = e^2$

ومنه: $x = e$ أو $x = -e$

اذا: $(C_f)$ يقبل مماسين موازيين لـ $(\Delta)$ عند النقطتين ذات الفاصلتين $x = e$ و $x = -e$

معادلة المماسين:

$(T_1): y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$y = x - 1 + 2e^{-1}$

$(T_2): y = f'(-e)(x + e) + f(-e)$

$y = x - 1 - 2e^{-1}$

⑥ حساب $f(1)$:

$f(1) = 1 - 1 + \frac{\ln 1}{1} = 0$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول:

اختيار الإجابة الصحيحة:

① الاختيار "ب" لأن:

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

حيث $F$ أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ التي تنعدم من أجل $e$،

$$F(x)=\int_{e}^{x} f(t)\,dt=\int_{e}^{x}\frac{1}{t(\ln t)^2}\,dx$$

$$=\int_{e}^{x}\frac{\frac{1}{t}}{(\ln t)^2}\,dt=\left[\frac{-1}{\ln t}\right]_{e}^{x}$$

$$\left[\frac{u'}{u^n}\right]=\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$$

$$=\frac{-1}{\ln x}+1$$

② الاختيار "ج" لأن:

$(t_n)$ ثابتة معناه: $t_1=t_2=\dots=t_n$

$$S=2t_1e+4t_2e^2+\dots+2^n t_n e^n$$

$$=2t_1e+2^2t_1e^2+\dots+2^n t_1 e^n$$

$$=t_1(2e)+t_1(2e)^2+\dots+t_1(2e)^n$$

وهو مجموع حدود متتابعة لمسألة هندسية أساسها $q=2e$ إذا:

$$S=2t_1e\times\frac{1-(2e)^n}{1-2e}$$

$$=2t_1e\times\frac{(2e)^n-1}{2e-1}$$

تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$:

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $[-0{,}62;-0{,}61]$ و:

$f(-0{,}62)=$

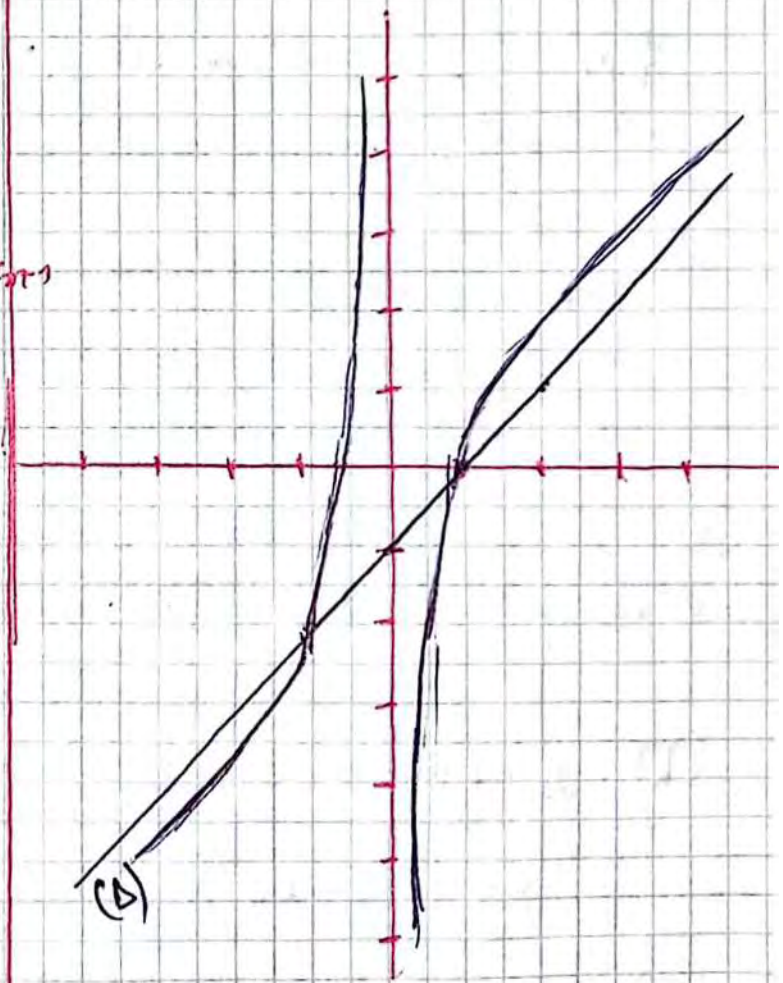
$f(-0{,}61)=$

$$f(-0{,}62)\times f(-0{,}61)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

حيث: $-0{,}62<\alpha<-0{,}61$

ب/ الاستنتاج:



③ الاختيار "أ" لأن:

$$\frac{2}{e^{2x}} + C = 2e^{-2x} + C.$$

$$(2e^{-2x}+C)'' + 3(2e^{-2x}+C)' + 4e^{-2x} =$$

$$(-4e^{-2x})' + 3\times 2(-2e^{-2x}) + 4e^{-2x}$$

$$8e^{-2x} - 12e^{-2x} + 4e^{-2x} = 0$$

ومنه:

$x \to \frac{2}{e^{2x}} + C$ حل طول المعادلة.

④ الاختيار "أ" لأن:

$$U_n = \int_n^{n+1} e^{1-x}\,dx$$

$$= \left[-e^{1-x}\right]_n^{n+1}$$

$$= -e^{1-(n+1)} + e^{1-n}$$

$$= -e^{-n} + e^{1-n}$$

$$= e^{-n}(-1+e)$$

$$= (e-1)(e^{-1})^n$$

$$= (e-1)\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

ومنه: $(U_n)$ متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{e}$

## التمرين الثاني

عدد الحالات التي يمكن تشكيلها هي:

$$A_{27}^3 = 17550$$

2/ حساب احتمال الأحداث التالية:

$$P(A) = \frac{A_{12}^1 \times A_{26}^2}{17550} = \frac{7800}{17550} = 0,144$$

$$P(B) = \frac{A_{15}^1 \times A_{12}^1 \times A_{25}^1}{17550} = \frac{4500}{17550} = 0,125$$

$$P(C) = \frac{2A_{15}^1 \times A_{12}^1 \times A_{25}^1}{17550} = \frac{9000}{17550} = 0,151$$

$$P(D) = \frac{A_{26}^1 \times A_{26}^2}{17550} = \frac{16900}{17550} = 0,96$$

$$P(E) = 1 - \frac{A_{15}^3 + A_{12}^3}{17550} = 1 - \frac{4050}{17550}$$

$$= 0,76$$

3/ قيم المتغير العشوائي:

$X = \{0; 1; 2; 3\}$.

قانون احتماله

$$P(X=0) = \frac{A_{12}^3}{17550} = \frac{1320}{17550}.$$

$$P(X=1) = \frac{3 \times A_{15}^1 \times A_{12}^2}{17550} = \frac{5940}{17550}.$$

$$P(X=2) = \frac{3 \times A_{15}^2 \times A_{12}^1}{17550} = \frac{7560}{17550}.$$

$$P(X=3) = \frac{A_{15}^3}{17550} = \frac{2730}{17550}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1320}{17550}$ | $\frac{5940}{17550}$ | $\frac{7560}{17550}$ | $\frac{2730}{17550}$ |

التمرين الثالث:

$U_0 = -6$

$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n - 1$

حساب الحدود $U_1$ ؛ $U_2$ ؛ $U_3$ :

$U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 2\times 0 - 1 = -4$

$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 2\times 1 - 1 = -1$

$U_3 = \frac{1}{2}U_2 + 2\times 2 - 1 = \frac{5}{2}$

البرهان بالتراجع ان من اجل $n \geqslant 3$ فان $U_n > 0$ .

لدينا من اجل $n = 3$ ؛ $U_3 = \frac{5}{2} > 0$ ومنه الخاصية محققة من اجل $n = 3$ .

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل $n$ اي $U_n > 0$ ونثبت صحتها من اجل $(n+1)$ اي $U_{n+1} > 3$

لدينا: $U_n > 0$

ومنه: $\frac{1}{2}U_n > 0$ ..... (1)

ولدينا $n \geqslant 3$

ومنه: $2n - 1 \geqslant 5$ ..... (2)

(1) + (2) نجد:

$\frac{1}{2}U_n + 2n - 1 > 5 > 0$

ومنه $U_{n+1} > 0$

اذا الخاصية صحيحة من اجل $(n+1)$ فهي صحيحة من اجل $n \geqslant 3$ .

استنتاج انه من اجل كل $n \geqslant 4$ فان $U_n > 2n - 3$

لدينا: من اجل $n \geqslant 3$ و $U_n > 0$

$U_n = \frac{1}{2}U_{n-1} + 2(n-1) - 1$

$= \frac{1}{2}U_{n-1} + 2n - 3$

ومن اجل $n \geqslant 4$ ؛ $U_{n-1} > 0$

ومنه: $\frac{1}{2}U_{n-1} > 0$

$\frac{1}{2}U_{n-1} + 2n - 3 > 2n - 3$

اذا: $U_n > 2n - 3$

جـ/ دهاية $(U_n)$ .

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 3 = +\infty$

$U_n > 2n - 3$ و

اذا: $\lim U_n = +\infty$

نستنتج أن $(U_n)$ متباعدة .

د/ البرهان أن $(V_n)$ متتالية هندسية.

$V_n = U_n - 4n + 10$

$= U_{n+1} - 4(n+1) + 10$

$= \frac{1}{2}U_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10$

$= \frac{1}{2}U_n - 2n + 5$

$= \frac{1}{2}(U_n - 4n + 10)$

ومنه $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول

$V_0 = U_0 - 4\times 0 + 10 = 4$

$$= (4\times4\times\dots\times4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\dots\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 4(n+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+\dots+n}$$

$$= 4n+4+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)n}{2}}$$

## التمرين الرابع :

$$g(x) = 1+x+e^x$$

① دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\underbrace{x}_{-\infty}+\underbrace{e^x}_{0}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+\underbrace{x}_{+\infty}+\underbrace{e^x}_{+\infty} = +\infty$$

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ :

$$g'(x) = 1+e^x > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

② بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$

الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ و

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

و : $0 \in ]-\infty;+\infty[$ إذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$

$\alpha \in ]-1,3;-1,2[$ التحقق أن

$$g(-1,3) \approx -0,02 \qquad g(-1,2) = 0,1$$

$$g(-1,3)\times g(-1,2) < 0$$

ومنه $\alpha \in ]-1,3;-1,2[$

التمرين الخامس :

$$U_n = 2^{2-n} + 4n - 10$$ نبين أن

لدينا :

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$V_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ولدينا : $U_n = V_n + 4n - 10$

$$U_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$$

$$U_n = 4\times 2^{-n} + 4n - 10$$

$$= 2^2 \times 2^{-n} + 4n - 10$$

$$U_n = 2^{2-n} + 4n - 10$$

ب/ حساب المجموع :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n .$$

لدينا :

$$U_n = V_n + W_n$$

حيث $W_n = 4n - 10$

$(W_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $-10$ و أساسها $4$ إذا :

$$S_n = V_0 + W_0 + V_1 + W_1 + \dots + V_n + W_n$$

$$= (V_0 + V_1 + \dots + V_n) + (W_0 + W_1 + \dots + W_n)$$

$$= V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + (n+1)\left(\frac{W_0 + W_n}{2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) + (n+1)\left(\frac{-10+4n-10}{2}\right)$$

$$= 8\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)(-10+2n)$$

حساب الجداء $P_n$ :

$$P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times 4\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \dots \times 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إشارة $g(x)$ :

من جدول التغيرات نجد:

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

إشارة $g(-x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(-x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$$f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} \qquad D_f = \mathbb{R}$$

1/ أ/ الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(1+e^x) - e^x \times xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x + e^{2x} + xe^x + xe^{2x} - xe^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{xe^x + e^{2x} + e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(x+e^x+1)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x \cdot g(x)}{(1+e^x)^2} > 0$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي $f$ متزايدة على $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty; \alpha]$

النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{1+e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^x(e^{-x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{-x}+1} = +\infty$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

إثبات أن: $f(\alpha) = 1+\alpha$ ؛

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{1+e^\alpha}$$

ولدينا: $g(\alpha) = 0$ ؛ أي $e^\alpha = -\alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{1-\alpha-1} = \frac{-\alpha^2-\alpha}{-\alpha}$$

$$= \frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

$$-0{,}3 < f(\alpha) < -0{,}2$$

ج/ إثبات أن $(\Gamma)$ يقبل مستقيم مقارب

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{xe^x}{1+e^x} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x - x - xe^x}{1+e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-xe^{-x}}{e^{-x}+1} = 0$$

ومنه: $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ $(\Gamma)$ بجوار $+\infty$

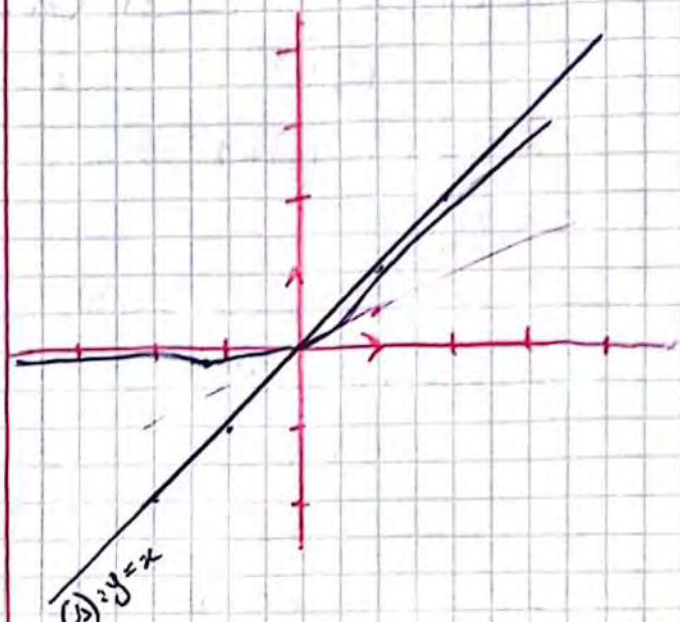
معادلة المماس $(T)$ عند $0$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= f'(0)x + f(0)$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

## انشاء المنحنى $(C_f)$ :




البرهان أنه من أجل $x \geq 1$

لدينا : $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

لدينا : $f(x) - x = \frac{xe^x}{1+e^x} - x$

$= \frac{xe^x - x - xe^x}{1+e^x}$

$\cdots = \frac{-x}{1+e^x} \leq 0$ ①

ومنه : $f(x) \leq x$

ولدينا :

$f(x) - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{xe^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$

$= \frac{e^x(x-1)}{1+e^x}$

من أجل $x \geq 1$ فإن $x-1 \geq 0$

ومنه : $f(x) \geq \frac{e^x}{1+e^x}$ ②

من ① و ② نجد :

$\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

## استنتاج حصرا للمساحة S :

لدينا : $S = \int_1^{-\alpha} f(x)\,dx$

ومنه : $\int_{+1}^{-\alpha} \frac{e^x}{1+e^x} dx \leq S \leq \int_{+1}^{-\alpha} x\,dx$

$\int_1^{-\alpha} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_1^{-\alpha}$

$= \ln(1+e^{-\alpha}) - \ln(1+e)$

$= \ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1+e}\right)$

$\int_1^{-1} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{-\alpha} = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}$

ا.ت: $\ln\left|\frac{1+e^{-\alpha}}{1+e}\right| < S \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)$

بالتوفيق في بكالوريا 2022