الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية طهيري عبد الرحمان – الجلفة – **مديرية التربية لولاية الجلفة**

امتحان بكالوريا تجريبي التعليم الثانوي **دورة : 2022**

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات **المدة :03 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

أختر الاجابة الصحيحة في كل مايلي مع التبرير :

1. حلول المعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي :

أ) $y(x) = e^{x+1}$ ب) $y(x) = e^{x+1} - e^x + 1$ ج) $y(x) = e^{x+1} + 1$.

2. التكامل $\int_{-2}^{2} xe^x \, dx$ يساوي

أ) $e^{-2} - 3e^2$ ب) $4(e^2 - e^{-2})$ ج) $e^2 + 3e^{-2}$.

3. الجداء $P_n = U_0 \times U_1 \times ..... \times U_n$ حيث $U_n = e^{-4n}$ يساوي

أ) $e^{-2n(n+1)}$ ب) $e^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ ج) $e^{2n(n+1)}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ $-1; 1; 2$ وخمس كرات بيضاء مرقمة بـ $1; 1; 1; 2; 2$ وكرتان خضراء مرقمتان بـ $-1; -1$ ، نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي بدون ارجاع

1. أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى."

B " كرية خضراء واحدة على الأقل."

C " كرات مجموع أرقامها معدوم."

2. علما ان مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم ماهو احتمال أن تكون مختلفة الألوان مثنى مثى.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الخضراء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ج) أحسب الامل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (4.5 نقاط)

I) f دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x}{x+8}$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
2. استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$ فإن $f(x) \geq 0$.

(U_n) $(II$ متتالية معرفة كمايلي : $U_0 = 1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فان $U_n \geq 0$
2. أدرس اتجاه تغير (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة .
3. (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = 1 + \dfrac{7}{U_n}$.

أ) بين أن (V_n) هندسية أساسها 8 ،يطلب تعيين حدها الاول.

بـ) أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n .

4. أحسب $\lim U_n$.
5. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{1}{U_1} + ...\dfrac{1}{U_n}$

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x}{2} - ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O : \vec{i}, \vec{j}\right)$ (وحدة الطول هي $1cm$)

1. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ ، ثم استنتج ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لمحور التراتيب .
2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \dfrac{x}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) .

بـ) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

3. أ) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ فإن $f'(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)}$

بـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ،ثم شكل جدول تغيراتها .

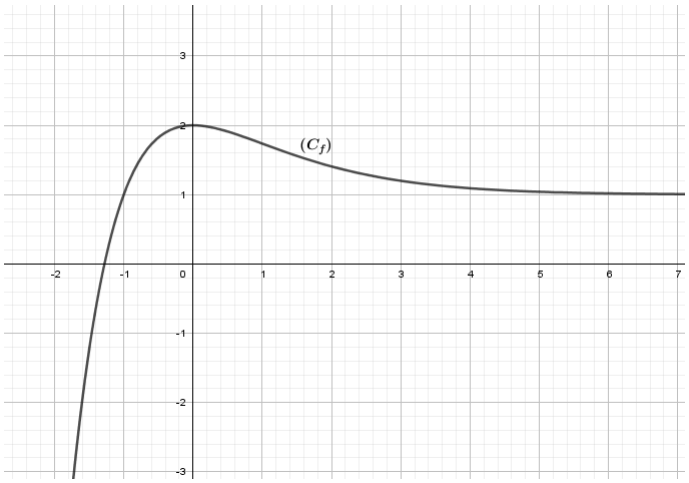
4. بين أن النقطة $E\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) .
5. ارسم (Δ) و (C_f) .
6. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = x\left(\dfrac{1}{2} + m\right)$ حلان مختلفان في الاشارة.
7. لنعتبر الدالة F المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $F(x) = \dfrac{x^2}{4} - (x-1)ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + ln(x)$

أ) بين أن F أصلية لـ f .

بـ) أحسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين $x = 2$ و $x = 3$.

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (03.5 نقاط)



I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$f(x) = (ax+b)e^{-x} + c$ حيث b, a و c أعداد حقيقية .
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى م م م $\left(O : \vec{i}, \vec{j}\right)$ (وحدة الأطوال $1cm$)

1. بقراءة بيانية عين b, a و c .

II) نضع $a = b = c = 1$

1. بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = -(x+2)e^{-x} + x$ أصلية للدالة f .
2. أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمان $x = -1$; $x = 1$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به اربع كرات بيضاء و ثلاث كريات حمراء n كرية سوداء مع $n \geq 3$ ،نسحب على التوالي بالارجاع كرتان .

1. أحسب احتمال الحوادث التالية :
   A " كرتان من نفس اللون."
   B "سحب كرية سوداء في المرة الاولى ."
   C " كرية سوداء على الأقل."
2. نعتبر أن سحب كرية بيضاء أو كرية حمراء يعطي خسارة مقدارها 60 دج وسحب كرية سوداء يعطي ربحا بقيمة 50 دج وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مقدار الربح المحقق .
   أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .
   بـ) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.
   جـ) ماهو أقل عدد من الكريات السوداء في الصندوق حتى تكون اللعبة مربحة .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) لتكن الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

1. أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .
2. بين أنه من أجل كل x من $[1;+\infty[$ فإن $f(x) \in [1;+\infty[$.

II) لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 2$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{(U_n)^2}{2U_n - 1}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإن $1 \leq U_n$.
2. بين أن (U_n) متناقصة ،ثم استنتج أنها متقاربة .
3. نضع من أجل كل n طبيعي $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$ و $W_n = ln(V_n)$.
   أ) بين أنه من أجل كل n طبيعي فإن $V_{n+1} = (V_n)^2$.
   ب) استنتج أن (W_n) متتالية هندسية أساسها 2 ، ثم أحسب W_0 .
   ج) أكتب عبارة W_n بدلالة n ،ثم استنتج عبارة V_n بدلالة n .
4. استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
5. أ) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = W_0 + W_1 ..... + W_n$
   ب) أحسب الجداء P_n حيث : $P_n = V_0 \times V_1 \times ..... \times V_n$

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = 1 + xe^x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{x + e^x}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O : \vec{i}, \vec{j}\right)$ (وحدة الطول هي $1cm$)

1. أحسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .
2. أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $\mathbb{R}^*$ لدينا : $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$
   ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
3. بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.6 < \alpha < -0.5$.
4. أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$
   ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
5. أرسم (Δ) و (C_f) .
6. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلان مختلفان في الاشارة.
7. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x) = \dfrac{|x| + e^{|x|}}{e^{|x|} - 1}$
   أ) بين أن الدالة h زوجية .
   ب) اشرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

بالتوفيــق

الموضوع 1 : التصحيح النموذجي للأكاديمية التجريبية

التمرين 1:

1/ حلول المعادلة التفاضلية $\begin{cases} y-y'=1 \\ y(0)=e \end{cases}$

حلولها هي الدوال من الشكل: $y(x)=e^{x+1}-e^x+1$ (ب: ثابت)

التبرير: لدينا $y-y'=1$ تعني $y'=y-1$

حلولها هي كل الدوال $x \mapsto ce^x+1$

نريد $y(0)=e$ أي $ce^0+1=e$

إذن $c=e-1$

ومنه $y(x)=(e-1)e^x+1$

$=e^{x+1}-e^x+1$

2/ أ) حساب التكامل $\int_{-2}^{2} xe^x dx$ يساوي:

ب) e^2+3e^{-2}

التبرير:

$$\int_{-2}^{2} xe^x dx = [xe^x]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} e^x dx$$

$$= [xe^x]_{-2}^{2} - [e^x]_{-2}^{2}$$

$$= 2e^2 + 2e^{-2} - e^2 + e^{-2}$$

$$= e^2 + 3e^{-2}$$

3/ الجداء P_n يساوي: ب) $e^{-2n(n+1)}$

التبرير:

$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$

$= e^{-4(0+1+\dots+n)}$

$= e^{-4\frac{n(n+1)}{2}}$

$= e^{-2n(n+1)}$

التمرين 2:

1/ حساب احتمال الحوادث A ; B ; C :

$A=\{RBV\}$

$P(A)=\frac{A_3^1 \cdot A_5^1 \cdot A_2^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$

$B=\{VVy, WWy\}$ $(y \hookrightarrow B)$

$P(B)=\frac{3A_2^1 \cdot A_8^2 + 3A_2^2 \cdot A_8^1}{A_{10}^3}=\frac{384}{720}$

$C=\{(-1,-1,2); \dots\}$

$P(C)=\frac{3A_3^2 \cdot A_3^1}{720}=\frac{54}{720}=\frac{3}{40}$

2/ حساب الاحتمال: $P_C(A)$

لدينا $P_C(A)=\frac{P(A \cap C)}{P(C)}$

$A \cap C=\{B(2)\, R(-1)\, V(-1)\}$

$P(A \cap C)=\frac{6 \cdot A_2' \cdot A_1' \cdot A_2'}{720}=\frac{24}{720}$

$P_C(A)=\frac{24/720}{54/720}=\frac{24}{54}=\frac{4}{9}$

3/ قيم المتغير العشوائي X :

$X \in \{0;1;2\}$

0/ قانون احتمال X :

$P(X=0)=\frac{A_2^0 \cdot A_8^3}{720}=\frac{336}{720}=\frac{7}{15}$

$P(X=1)=\frac{3 \cdot A_2^1 \cdot A_8^2}{720}=\frac{168}{720}=\frac{7}{15}$

$P(X=2)=\frac{3A_2^2 \cdot A_8^1}{720}=\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

حساب $E(x)$:

$$E(x)=\sum x_i p_i = 0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{10}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

التمرين 3:

I/ دراسة اتجاه تغير الدالة f:

$$f'(x)=\frac{8}{(x+8)^2}>0$$

f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$ 1

ب/ من جدول التغيرات نلاحظ أنه مهما يكن $x\in[0,+\infty[$ فإن $f(x)\geq 0$

II/ البرهان بالتراجع أن: $u_n\geq 0$:

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1\geq 1$

$P(0)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $u_n\geq 0$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}\geq 0$.

لدينا $u_n\geq 0$ ومنه $f(u_n)\geq 0$

(حسب السؤال I/2)

ومنه $u_{n+1}\geq 0$ ؛ إذن $P(n+1)$ محققة

ومنه صحة $P(n)$.

ج/ دراسة اتجاه تغير (u_n):

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n+8}-u_n=\frac{-u_n^2-8u_n+u_n}{u_n+8}$$

$$=\frac{-u_n^2-7u_n}{u_n+8}=-\frac{(u_n^2+7u_n)}{u_n+8}\leq 0$$

لأن $u_n\geq 0$ و $8>0$.

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

ب/ نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 8 يطلب حسابها أول:

$$v_{n+1}=1+\frac{7}{u_{n+1}}=1+\frac{7}{\frac{u_n}{u_n+8}}$$

$$=1+\frac{7(u_n+8)}{u_n}=\frac{u_n+7u_n+56}{u_n}$$

$$=\frac{8u_n+56}{u_n}=8\left(\frac{u_n+7}{u_n}\right)=8v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=8$

$$v_0=1+\frac{7}{u_0}=1+\frac{7}{1}=8$$

ج/ عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n:

$$v_n=v_0\times q^n=8\times 8^n=8^{n+1}$$

لدينا $v_n=1+\frac{7}{u_n}$ ومنه $u_n=\frac{7}{v_n-1}$

$$u_n=\frac{7}{8^{n+1}-1}$$

د/ حساب $\lim u_n$:

$$\lim u_n=\lim\frac{7}{8^{n+1}-1}=0$$

هـ/ حساب المجموع S_n:

واضح أن

$$\frac{1}{u_n}=\frac{1}{7}v_n-\frac{1}{7}$$

ومنه

$$S_n=\frac{1}{7}v_0-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}v_1-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{7}v_n-\frac{1}{7}$$

$$=\frac{1}{7}v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}-\frac{1}{7}(n+1)$$

$$=\frac{8}{7}\cdot\frac{8^{n+1}-1}{7}-\frac{1}{7}(n+1)$$

$$=\frac{8}{49}(8^{n+1}-1)-\frac{1}{7}(n+1).$$

التمرين 4:

I/ حساب نهايات f ثم تفسير النتائج بيانيا:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$ $\quad x \to 0^+$

$x = 0$ معادلة مقارب عمودي.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = +\infty$ $\quad x \to 1^-$

$x = 1$ معادلة مقارب عمودي (موازي لحامل محور التراتيب)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$

(D) معادلة مقارب مائل.

$\lim_{x \to \infty} (f(x) - y) = \lim -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$

ب/ دراسة الوضعية النسبية بين (C_f) و (D):

$f(x) - y = -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

إشارة حسب الإشارة $-\left(\frac{x-1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	‖	$+$	‖	$+$	
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (D)		(C_f) و (D)		(C_f) فوق (D)		

ج/ بيان أن: $f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)}$

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1 \cdot x - 1(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2(x-1) - 2}{2x(x-1)}$

$= \frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)}$

د/ إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - x - 2$

لدينا $x^2 - x - 2 = 0$ نجد $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	

f متزايدة على $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

ومتناقصة على $[-1, 0[\cup]0, 1[\cup [1, 2]$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2} - \ln 2$	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	$1 + \ln 2$	↗	$+\infty$

$E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر (C_f).

أ/ بيان أن A مركز تناظر (C_f):

بكفي إثبات أن $f(2(\frac{1}{2}) - x) + f(x) = 2(\frac{1}{4})$

أي $f(1-x) + f(x) = \frac{1}{2}$

$f(1-x) + f(x) = \frac{1-x}{2} - \ln\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right) + \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right) + \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$= \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$= \frac{1}{2}$

ب/ الرسم

ج/ بيان أن F دالة أصلية لـ f:

$F'(x) = \frac{2x}{4} - 1 \cdot \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - (x-1)\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x}$

$= \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$= f(x)$.

د/ حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل و $x = 2$, $x = 3$

$A = \int_2^3 f(x)\,dx = [F(x)]_2^3$

$= F(3) - F(2) = \frac{9}{4} - 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 3$

$= \frac{9}{4} - 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln 2$

$= \frac{5}{4} - 4\ln 2 + 3\ln 3$ وحدة مساحة

$$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{2}+m\right)$$

ومنه

$$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{2} + mx$$

$$-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = mx$$

$$\frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -mx$$

$$g(x) = -mx \quad \text{---(*)}$$

حتى تقبل المعادلة (*) حلين مختلفين في إشارة:

$m \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ أي $-m \in]\frac{1}{2}, +\infty[$

الموضوع الثاني

التمرين 1:

1/ تعيين a و b و c:

من البيان لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

ولدينا أيضا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (ax+b)e^{-x} + c = c$

ومنه $\boxed{c = 1}$

من البيان لدينا $f(0) = 2$ ولدينا $f(0) = b + 1$

ومنه $\boxed{b = 1}$

من البيان لدينا $f(-1) = 1$

$f(-1) = (-a+b)e + c$

$= (-a+1)e + 1 = 1$

ومنه $(-a+1)e = 0$ أي $-a+1 = 0$

$\boxed{a = 1}$

ومنه $f'(0) = 0$

II/ 1/ البرهان أن F أصلية لـ f:

$F'(x) = -1 \cdot e^{-x} + e^{-x}(x+2) + 1$

$= (-1+x+2)e^{-x} + 1 = (x+1)e^{-x} + 1 = f(x)$

2/ حساب مساحة الحيز:

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = [F(x)]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)$$

$= (-3e^{-1} + 1) - (-e - 1)$

$= 2 - 3e^{-1} + e$ cm²

التمرين 2:

1/ حساب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$:

$$P(A) = \frac{4^2 + 3^2 + n^2}{(n+7)^2} = \frac{n^2+25}{(n+7)^2}$$

$$P(B) = \frac{7n}{(n+7)^2}$$

$$P(C) = \frac{2 \cdot 7 \cdot n + n^2}{(n+7)^2} = \frac{n^2+14n}{(n+7)^2}$$

2/ أ/ القيم الممكنة لـ X: $X \in \{-120; -10; 100\}$

قانون احتمال X:

$$P(X=-120) = \frac{7^2}{(n+7)^2} = \frac{49}{(n+7)^2}$$

$$P(X=-10) = \frac{2 \cdot 7 \cdot n}{(n+7)^2} = \frac{14n}{(n+7)^2}$$

$$P(X=100) = \frac{n^2}{(n+7)^2}$$

x	-120	-10	100
$P(x)$	$\frac{49}{(n+7)^2}$	$\frac{14n}{(n+7)^2}$	$\frac{n^2}{(n+7)^2}$

ب/ حساب $E(X)$:

$$E(X) = \sum x_i P_i = \frac{-120 \cdot 49 - 10 \cdot 14n + 100 n^2}{(n+7)^2}$$

$$= \frac{100n^2 - 140n - 5880}{(n+7)^2}$$

مبرهنة:

ج/ تعيين عدد كريات السودا حتى تكون اللعبة عادلة:

أي $E(X) > 0$

بما أن المقام $(n+7)^2 > 0$ فإن إشارة $E(X)$ من إشارة $100n^2 - 140n - 5880$

نضع $t = n$ فنجد $5t^2 - 7t - 294$

لدينا $5t^2 - 7t - 294 = 0$

$t_1 \approx 8{,}4$ و $t_2 = -7$

t	$-\infty$	-7	$8{,}4$	$+\infty$
$5t^2-7t-294$	$+$	0	$-$	0 $+$

$\forall n \in \mathbb{N}$ (عدد طبيعي) $E(X) > 0$ ومنه $n > 8{,}4$

أي $\boxed{n = 9}$

التمرين 13

$f(x) = \frac{2x}{2x-1}$: $[1,+\infty[$ على f دراسة تغيرات الدالة

$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$

$= \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} \geq 0$ لأن $x \geq 1$

f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	1	$+\infty$

ب/ استنتاج أن $f(x) \in [1,+\infty[$ من أجل كل x من $[1,+\infty[$.

II/ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية n : $u_n \geq 1$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 2 \geq 1$ ومنه $P(0)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $u_n \geq 1$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq 1$

لدينا $u_n \geq 1$ ومنه $f(u_n) \geq 1$ (من السؤال I/ب) و $u_{n+1} \geq 1$ إذن $P(n+1)$ محققة

ومنه حسب مبدأ التراجع $P(n)$ صحيحة.

ج/ بيان أن (u_n) متناقصة.

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1}$

$= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1} \leq 0$

لأن $u_n \geq 1$ ومنه $1 - u_n \leq 0$

و لدينا أيضا $2u_n - 1 \geq 0$.

إذن (u_n) متناقصة.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

3/ أ/ بيان أن $v_{n+1} = (v_n)^2$

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}$

$= \frac{\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1}}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}$

$= \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = (v_n)^2$

ب/ استنتاج (w_n) ثم u_n بدلالة n.

لدينا $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = \ln (v_n)^2 = 2 \ln v_n = 2 w_n$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$.

$w_0 = \ln v_0 = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

ومنه $w_n = w_0 \times q^n = (-\ln 2) \cdot 2^n$

$v_n = e^{w_n} = e^{(-\ln 2) \cdot 2^n}$

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ ومنه

$u_n v_n = u_n - 1$

$u_n v_n - u_n = -1$

$u_n (v_n - 1) = -1$

$u_n = \frac{-1}{v_n - 1} = \frac{-1}{e^{(-\ln 2) \cdot 2^n} - 1}$

حساب $\lim u_n$:

$\lim u_n = \lim \frac{-1}{e^{(-\ln 2) \cdot 2^n} - 1} = 1$

4/ حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = w_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = (-\ln 2) \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$

$$\lim_{x<0,\ x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+e^x}{e^x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+e^x}{e^x-1} = +\infty$$

ج/

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-g(x)$		$-$	$\|$	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\|$	↗	$+\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي.

$f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$ بيان أن د/ P/ ب

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x-1) - e^x(x+e^x)}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1 - xe^x - e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \frac{-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{-(1+xe^x)}{(e^x-1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}.$$

ب/ اتجاه تغير f + جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

لدينا $f'(x) < 0$

إذن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$\|$	$\|$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\|\|$	↘	1
			$\|\|$		$-\infty$

ج/ بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,6 < \alpha < -0,5$:

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ إذن f تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;0[$

$f(-0,6) = \ldots > 0$

$f(-0,5) = \ldots < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,6 < \alpha < -0,5$

$$= (-\ln 2)(2^{n+1}-1)$$

حساب الجداء P_n:

$$P_n = e^{w_0} \cdot e^{w_1} \cdots e^{w_n}$$

$$= e^{w_0+w_1+\cdots+w_n} = e^{S_n}$$

$$= e^{(-\ln 2)(2^{n+1}-1)}$$

التمرين 4:

I/ د، استنتاج اتجاه تغير الدالة g:

$g'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $1+x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$1-e^{-1}$	↗	$+\infty$

g متناقصة على $]-\infty,-1]$ ومتزايدة على $[-1,+\infty[$.

$1-e^{-1} \approx 0,63$

ب/ إشارة g على $\mathbb{R}$:

من جدول التغيرات لدينا $g(x) \geq 1-e^{-1} > 0$

ومنه $g(x) > 0$.

II/ 1/ حساب نهايات f:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(\frac{x}{e^x}+1\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{e^x}+1}{1-\frac{1}{e^x}} = 1$$

($\frac{x}{e^x} \to 0$, $\frac{1}{e^x} \to 0$)

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+e^x}{e^x-1} = +\infty$$

($e^x \to 0$)

4/ بيان أن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+e^x}{e^x-1}+x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^x+xe^x-x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}$$

$$= 0$$

ب/ دراسة الوضعية النسبية بين (C_f) و (Δ)

$$f(x)-y = \frac{e^x+xe^x}{e^x-1} = \frac{(x+1)e^x}{e^x-1}$$

إشارة $(x+1)(e^x-1)$ على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		−	0	+		+	
e^x-1		−		−	0	+	
$f(x)-y$		+	0	−	‖	+	
الوضعية النسبية بين (C_f) و (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(-1,y_0)$	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

ج/ الرسم:

ج/ تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفان في الإشارة.

$m \in]1,+\infty[$.

6- 4/ بيان أن h دالة زوجية

$$h(-x) = \frac{|1-x|+e^{|1-x|}}{e^{|1-x|}-1}$$

$$= \frac{|x|+e^{|x|}}{e^{|x|}-1} = h(x)$$

ومنه h زوجية

ب/ شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

واضح أن $h(x) = f(|x|)$

إذن

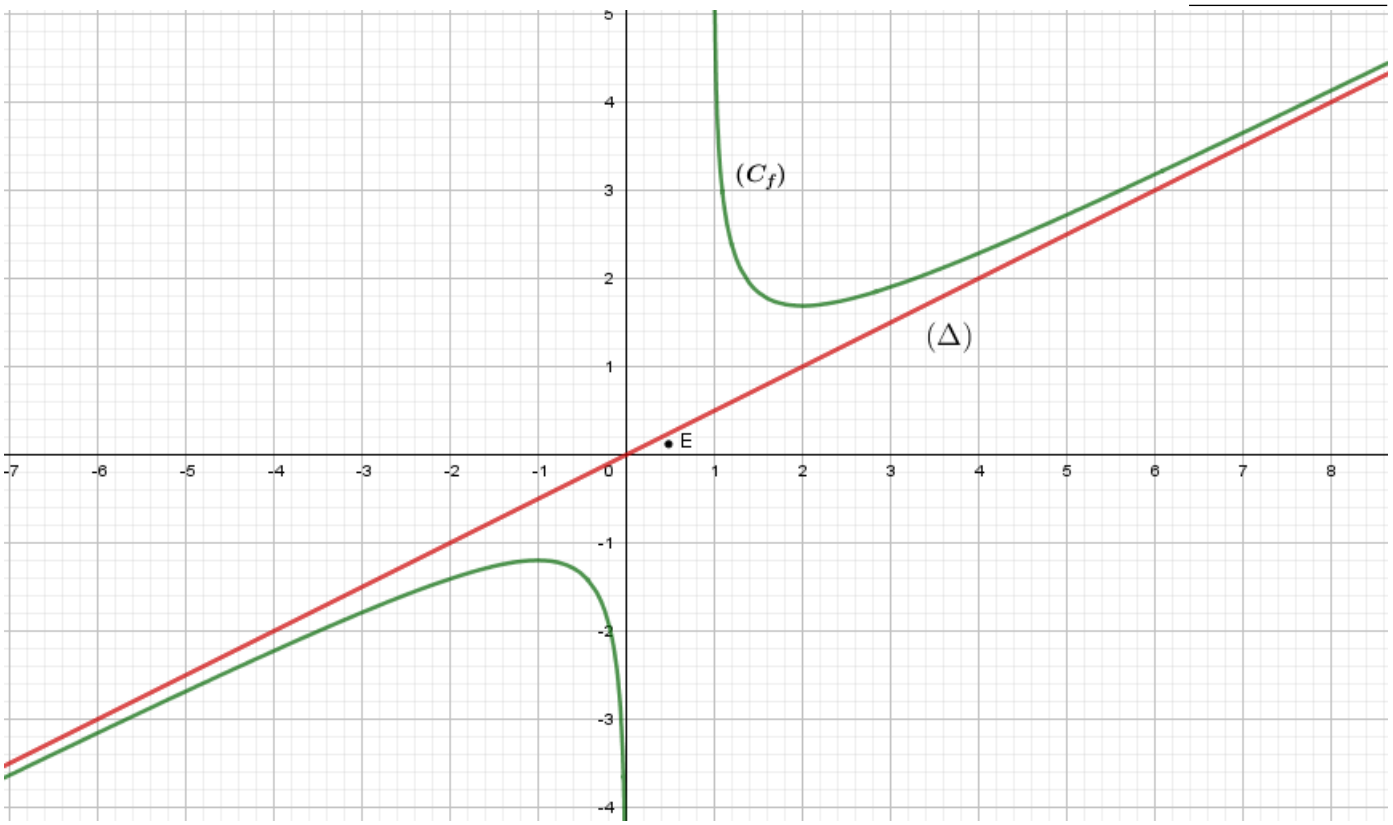
$$\begin{cases} h(x) = f(x) & ; x \in]0,+\infty[\\ h(x) = f(-x) & ; x \in]-\infty,0[\end{cases}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) على $]0,+\infty[$ لزوجية h

فتمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب (yy').

الرسم: في الصفحة 8.

الموضوع الأول



الموضوع الثاني