إختبار بكالوريا تجريبي للثالثة علوم تجريبية

من إعداد : خالد بخاخشة

الموضوع الأول

التمرين الأول(4ن):

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي :

1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $1+\ln(2e)+\ln(3e)+....+\ln(en)=n+\ln(n!)$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}=1$.

3) المعادلة $8^x-4^x-2^x=0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

4) إذا كانت الأعداد a ، b ، c حقيقية موجبة تماما و كان $\ln a$ ، $\ln b$ ، $\ln c$ و بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية و كان e^a ، e^b ، e^c و بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن : $a=b=c$.

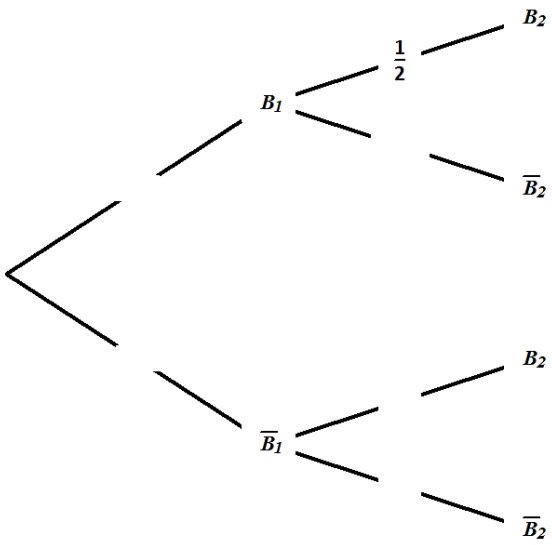
التمرين الثاني(4ن):

يحتوي كيس U_1 على ثلاث كرات بيضاء و كرتين سوداوين ، و يحتوي كيس U_2 على كرتين سوداوين و كرة بيضاء .
(كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

الجزء **I)** و **II)** مستقلان .

I) نقترح التجربة العشوائية التالية :

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 و نضعها في الكيس U_2 ، ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_2 و نضعها في الكيس U_1 .



نعتبر الأحداث التالية :

B_1 : "الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء".

B_2 : "الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء".

1) أ ـ بيّن أن : $P_{B_1}(B_2)=\dfrac{1}{2}$.

بـ ـ أنقل و أكمل شجرة الإحتمالات .

جـ ـ أحسب $P(B_2)$.

د ـ علما أن الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء .

ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ؟

2) أحسب إحتمال الحدث : E : "عند نهاية التجربة بقي توزيع الكرات في الكيسين كما هو".

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 عند نهاية التجربة .

أحسب $P(X=2)$.

II) نسحب الكرات من الكيس U_1 الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .

ليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .

عرف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي Y ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(Y)$.

التمرين الثالث(4ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـــ: $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n}{3+u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

بـــ أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2+u_n}$.

أ ـ أثبت أن المتتالية (v_n) ثابتة .

بـــ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2}{5\times 3^n-1}$.

جـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}$ و $P_n=(u_0+3)\times(u_1+3)\times(u_2+3)\times...\times(u_n+3)$.

أحسب S_n و P_n بدلالة n .

التمرين الرابع(8ن):

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x+e^x$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة g .

2) أ ـ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-0.57<\alpha<-0.56$.

بـــ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-xe^{1-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـــ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{1-x}g(x-1)$.

بـــ استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيّراتها .

4) بين أن : $f(\alpha+1)=\alpha+2+\frac{1}{\alpha}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha+1)$.

5) بين أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

6) أ ـ حل $\mathbb{R}$ في كلا من المعادلتين : $f(x)=0$ و $f'(x)=1$. ثم فسر بيانيا النتائج المحصل عليها .

بـــ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

7) أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) . (نأخذ : $f(\alpha+1)\approx-0.4$)

8) عيّن بيانيا قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة $e^{m-1+x}=x$ حلين متمايزين .

9) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=|x|-|xe^{1-x}|$. (C_h) تمثيلها البياني .

إشرح كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) ، ثم أنشئه .

III) λ عدد حقيقي موجب تماما .

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{1-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0 .

2) أ ـ أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=0$ ، $x=\lambda$ و $y=x$.

بـــ تحقق أن : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=e$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4ن):

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي :

1) حلول المعادلة التفاضلية $y - 2022y' = 0$ هي الدوال من الشكل : $x \mapsto Ce^{2022x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x} = 0$.

3) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ على المجال $[1;2]$ هي : $\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

4) الجملة $\begin{cases} e^{x-y} - e^{x+y} = 2 \\ \ln(x-y) - \ln(x+y) = \ln 2 \end{cases}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}^2$.

التمرين الثاني(4ن):

يحتوي كيس U_1 على كرتين بيضاوين و كرتين سوداوين . و يحتوي كيس U_2 على ثلاث كرات بيضاء وكرة سوداء .
(كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

نقترح التجربة العشوائية التالية :

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 .

- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ، نرجعها إلى الكيس و نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس U_2 .
- إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء ، نضعها في الكيس U_2 و نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس U_2 .

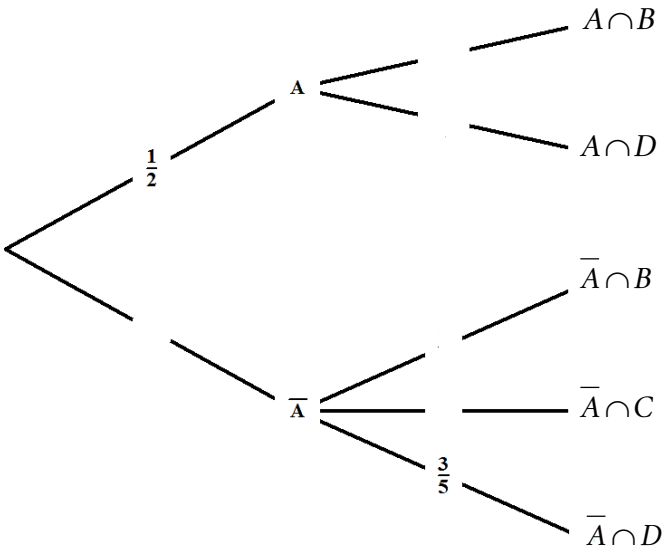
نعتبر الأحداث التالية :

A : " الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ".

B : " سحب كرتين بيضاوين من الكيس U_2 " .

C : " سحب كرتين سوداوين من الكيس U_2 " .

D : " سحب كرتين مختلفتين في اللون من الكيس U_2 " .



1) أنقل و أكمل شجرة الإحتمالات التالية :

2) أحسب $P(B)$ و $P(D)$.

3) بيّن أن إحتمال ألا تبقى كرة سوداء في الكيس U_2 هو $\dfrac{3}{10}$.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 .

أ- حدّد القيم الممكنة لـ X .

ب- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

جـ- ما احتمال أن يبقى على الأقل كرة سوداء واحدة في الكيس U_2 ؟

التمرين الثالث(4ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{2+u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 < u_n \leq 4$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_n - 2)$.

أ ـ أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

بـ ـ أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{2}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$.

جـ ـ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_n}$ و $P_n = (u_0+2)\times(u_1+2)\times(u_2+2)\times...\times(u_n+2)$.

أحسب S_n و P_n بدلالة n .

التمرين الرابع(8ن):

f الدالة العددية المعرّفة على $D =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)$. ثم فسر النتيجتين بيانيا .

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \dfrac{x^2-x+2}{2x(x-1)}$.

بـ ـ استنتج إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \dfrac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

بـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن النقطة $\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $1.72 < \alpha < 1.73$ و $-1.21 < \beta < -1.20$.

6) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f) .

7) a عدد حقيقي .

أ ـ بيّن أن الدالة : $x \mapsto (x-a)\ln(x-a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-a)$ على المجال $]a;+\infty[$.

بـ ـ استنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

جـ ـ أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = \dfrac{x}{2}$ ، $x = 2$ و $x = 3$.

8) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $w_n = f(n)$ و $A_n = w_2 + w_3 + ... + w_n$.

بيّن أن : $A_n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{4} - \ln n$.

تصحيح مقترح للموضوع الأول

حل مقترح للتمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $1+\ln(2e)+\ln(3e)+....+\ln(en)=n+\ln(n!)$ .....صحيح .

التبرير :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$1+\ln(2e)+\ln(3e)+....+\ln(en)=1+\ln 2+\ln(e)+\ln 3+\ln(e)+...+\ln n+\ln(e)$$
$$=(1+1+....+1)+\ln(2\times 3\times....\times n)=n+\ln(n!)$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}=1$ .....خطأ .

التبرير :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[(1-x)(1+x)\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1-x)}{-x}\right]=1-1=0$$

3) المعادلة $8^x-4^x-2^x=0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ .....خطأ .

التبرير :

$8^x-4^x-2^x=0$ تكافئ $2^x(2^{2x}-2^x-1)=0$ تكافئ $2^{2x}-2^x-1=0$ تكافئ $Y^2-Y-1=0$

تكافئ $\begin{cases}Y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ Y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ أو تكافئ $2^x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ تكافئ $x=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln 2}$

4) إذا كانت الأعداد a ، b ، c حقيقية موجبة تماما و كان $\ln a$ ، $\ln b$ ، $\ln c$ و بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية و كان e^a ، e^b ، e^c و بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن : $a=b=c$ .....صحيح .

التبرير :

$\ln a$ ، $\ln b$ ، $\ln c$ و بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية معناه : $2\ln b=\ln a+\ln c$ أي : $b^2=ac$ .... (1) .

e^a ، e^b ، e^c و بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية معناه $(e^b)^2=e^a\times e^c=e^{a+c}$ أي : $2b=a+c$ ..... (2)

من (1) و (2) نجد $ac=\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2$ أي $\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2=0$ أي $a-c=0$ أي $a=c$. إذن : $a=b=c$.

حل مقترح للتمرين الثاني:

يحتوي كيس U_1 على ثلاث كرات بيضاء و كرتين سوداوين ، و يحتوي كيس U_2 على كرتين سوداوين و كرة بيضاء .

(كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

الجزء **I)** و **II)** مستقلان .

I) نقترح التجربة العشوائية التالية :

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 و نضعها في الكيس U_2 ، ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_2 و نضعها في الكيس U_1 .

نعتبر الأحداث التالية :

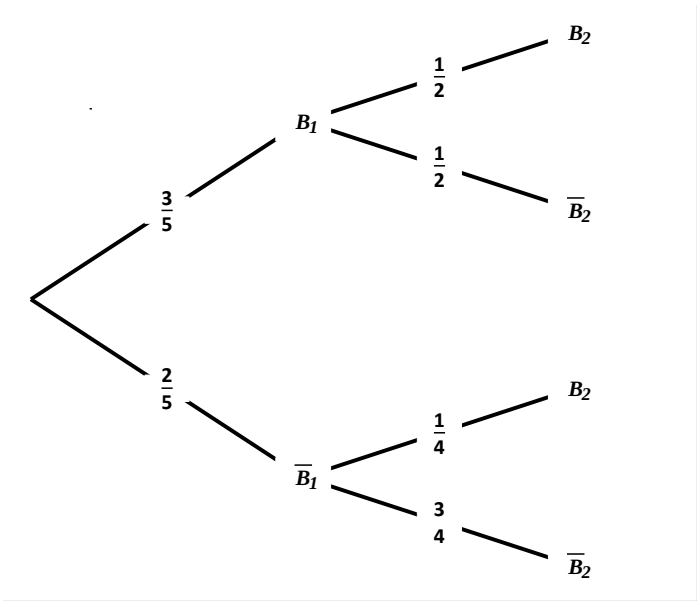
B_1 : " الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء".

B_2 : " الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء".

1) أ ـ تبيان أن : $P_{B_1}(B_2)=\dfrac{1}{2}$.

$P_{B_1}(B_2)$ هو إحتمال سحب كرة بيضاء من الكيس U_2 علما أن الكرة المسحوبة من الكيس بيضاء U_1 و منه $P_{B_1}(B_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

بـ ـ شجرة الإحتمالات :



جـ ـ حساب $P(B_2)$.

$$P(B_2)=P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap B_2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

د ـ علما أن الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء . ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء ؟

$$P_{B_2}(B_1)=\frac{P(B_1\cap B_2)}{P(B_2)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}}=\frac{3}{4}$$

2) حساب إحتمال الحدث : E : " عند نهاية التجربة بقي توزيع الكرات في الكيسين كما هو ".

$$P(E)=P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2})=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 عند نهاية التجربة .

$P(X=2)=P(E)=\frac{3}{5}$.

II) نسحب الكرات من الكيس U_1 الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .

ليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .

قيم Y هي : $\{1;2;3\}$.

لدينا : $p(Y=1)=\frac{3}{5}$ ، $p(Y=2)=\frac{A_2^1\times A_3^1}{A_5^2}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ و $p(Y=3)=\frac{A_2^2\times A_3^1}{A_5^3}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$.

Y_i	1	2	3
$P(Y=Y_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

الأمل الرياضياتي : $E(Y)=1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{13}{10}$.

حل مقترح للتمرين الثالث:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـــ: $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n}{3+u_n}$.

1) أ ـ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ و منه $0<u_0<1$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $0<u_n<1$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$.

لدينا حسب الفرض $0<u_n<1$ و منه : $u_{n+1}-1=\frac{u_n}{3+u_n}-1=\frac{-3}{3+u_n}<0$ و $u_{n+1}-0=\frac{u_n}{3+u_n}>0$

و منه $0<u_{n+1}<1$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

بـ ـ دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{3+u_n}-u_n=\frac{-{u_n}^2-2u_n}{3+u_n}=\frac{-u_n(u_n+2)}{3+u_n}$.

و لدينا : $0<u_n<1$ و منه $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة .

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2+u_n}$.

أ ـ إثبات أن المتتالية (v_n) ثابتة .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2+u_{n+1}}=\frac{\frac{3^{n+1}u_n}{3+u_n}}{2+\frac{u_n}{3+u_n}}=\frac{3^{n+1}u_n}{6+3u_n}=\frac{3^{n+1}u_n}{3(2+u_n)}=\frac{3^n u_n}{2+u_n}=v_n$.

بـ ـ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2}{5\times 3^n-1}$.

لدينا : المتتالية (v_n) ثابتة و من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0=\frac{u_0}{2+u_0}=\frac{1}{5}$.

و لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2+u_n}$ و منه $2v_n+v_n u_n=3^n u_n$ و منه $2v_n=u_n(3^n-v_n)$ أي $u_n=\frac{2v_n}{3^n-v_n}=\frac{\frac{2}{5}}{3^n-\frac{1}{5}}=\frac{2}{5\times 3^n-1}$

جـ ـ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{5\times 3^n-1}=0$.

3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}$ و $P_n=(u_0+3)\times(u_1+3)\times(u_2+3)\times...\times(u_n+3)$.

حساب S_n و P_n بدلالة n .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{u_n}=\frac{5\times 3^n-1}{2}=\frac{5}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}$

و منه $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}=\frac{5}{2}\left(\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right)-\frac{1}{2}(n+1)=\frac{5}{4}(3^{n+1}-1)-\frac{1}{2}(n+1)=\frac{5}{4}\times 3^{n+1}-\frac{1}{2}n-\frac{7}{4}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n+3=\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ و منه

$$P_n=(u_0+3)\times(u_1+3)\times(u_2+3)\times\ldots\times(u_n+3)=\frac{u_0}{u_1}\times\frac{u_1}{u_2}\times\frac{u_2}{u_3}\times\ldots.\times\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{u_0}{u_{n+1}}=5\times3^{n+1}-1$$

حل مقترح للتمرين الرابع:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x+e^x$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g .

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $g'(x)=1+e^x$.

لدينا : $g'(x)>0$ من أجل كل x ، و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ ـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-0.57<\alpha<-0.56$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases}g(-0.57)\approx-0.004\\g(-0.56)\approx0.01\end{cases}$ أي $g(-0.57)\times g(-0.56)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-0.57<\alpha<-0.56$.

بـ ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-xe^{1-x}$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-xe^{1-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{x}{e^x}e\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x(1-e^{1-x})=+\infty$.

2) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-xe^{1-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{e^x}e\right)=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x)-x=-xe^{1-x}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$.

- من أجل $x\in]-\infty;0]$ ، المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .
- من أجل $x\in[0;+\infty[$ ، المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ) .
- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $O(0;0)$.

3) أ ـ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=1-e^{1-x}+xe^{1-x}=e^{1-x}(e^{x-1}+x-1)=e^{1-x}g(x-1)$.

بـ ـ استنتاج إتجاه تغيّر الدالة f :

لدينا : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x-1)$ و بالتالي :

- $g(x-1)\geq0$ من أجل $x-1\geq\alpha$ أي $x\geq\alpha+1$ و منه الدالة f متزايدة على المجال $[\alpha+1;+\infty[$.
- $g(x-1)\leq0$ من أجل $x-1\leq\alpha$ أي $x\leq\alpha+1$ و منه الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;\alpha+1]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		$\alpha+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha+1)$	↗	$+\infty$

4) تبيان أن : $f(\alpha+1)=\alpha+2+\dfrac{1}{\alpha}$.

لدينا : $g(\alpha)=0$ و منه $e^{\alpha}=-\alpha$ أي $e^{-\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}$ و بالتالي : $f(\alpha+1)=\alpha+1-(\alpha+1)e^{-\alpha}=\alpha+2+\dfrac{1}{\alpha}$.

حصر $f(\alpha+1)$:

لدينا $-0.57<\alpha<-0.56$ ومنه $\begin{cases}1.43<\alpha+2<1.44\\ -\frac{1}{0.56}<\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{0.57}\end{cases}$ أي : $1.43-\frac{1}{0.56}<\alpha+2+\frac{1}{\alpha}<1.44-\frac{1}{0.57}$.

أي : $-0.35<f(\alpha+1)<-031$.

5) تبيان أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f''(x)=e^{1-x}+e^{1-x}-xe^{1-x}=2e^{1-x}-xe^{1-x}=(2-x)e^{1-x}$.

إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2-x)$ و بالتالي النقطة $\Omega(2;2-2e^{-1})$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6) أ ـ حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين : $f(x)=0$ و $f'(x)=1$.

لدينا $f(x)=0$ تكافئ $x(1-e^{1-x})=0$ تكافئ $\begin{cases}x=0\\ e^{1-x}=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}$ تكافئ أو .

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $1-e^{1-x}+xe^{1-x}=1$ تكافئ $(x-1)e^{1-x}=0$ تكافئ $x=1$.

تفسير النتائج المحصل عليها بيانيا :

حلول المعادلة $f(x)=0$ ، بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل و منه المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين $O(0;0)$ و $A(1;0)$.

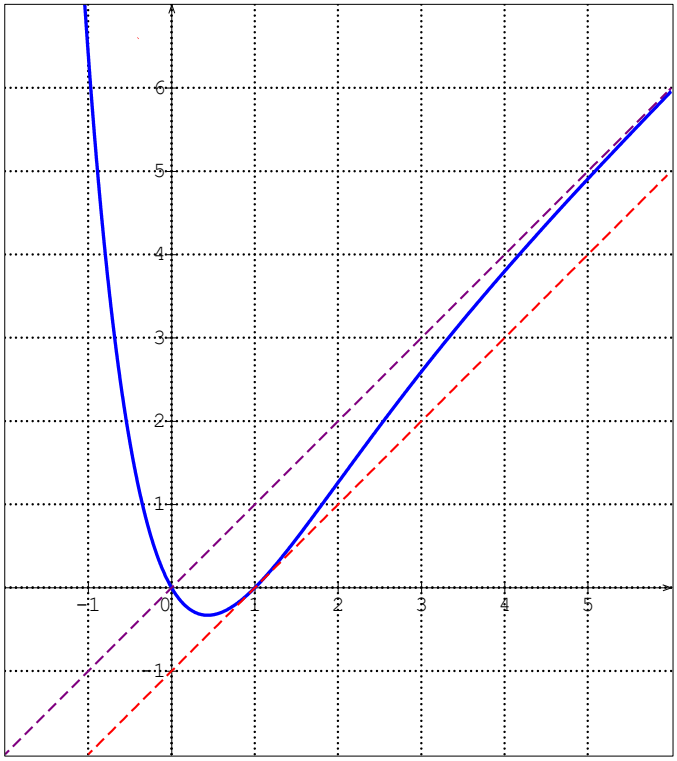
حلول المعادلة $f'(x)=1$ ، بيانيا هي فواصل النقط من المنحنى (C_f) و التي يكون فيها المماس معامل توجيهه 1 و بما أنه للمعادلة $f'(x)=1$ حل وحيد فإن للمنحنى (C_f) مماس وحيد في النقطة A معامل توجيهه 1 أي أنه مماس موازي للمستقيم (Δ) .

بـ ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $(T):y=x-1$.

7) $f(-1)=-1+e^2\approx 6.38$.

الرسم :



8) تعيين ، بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة $e^{m-1+x}=x$ حلان متمايزان .

$e^{m-1+x}=x$ تكافئ $e^m=xe^{1-x}$ تكافئ $x-e^m=x-xe^{1-x}$ تكافئ $f(x)=x-e^m$

و منه حلول المعادلة $e^{m-1+x}=x$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x-e^m$.

يكون للمعادلة $e^{m-1+x}=x$ حلان متمايزان إذا كان $0<e^m<1$ أي $m\in]-\infty;0[$.

9) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=|x|-|xe^{1-x}|=|x|(1-e^{1-x})=\begin{cases}x(1-e^{1-x}) & ;\ x\geq 0\\ -x+xe^{1-x} & ;\ x\leq 0\end{cases}$.

شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) :

المنحنى (C_h) منطبق على المنحنى (C_f) من أجل $x \in [0;+\infty[$ ، و نظيره بالنسبة لحامل محور الفواصل من أجل $x \in]-\infty;0]$.

III) λ عدد حقيقي موجب تماما .

1) تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{1-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0 .

$$\int_0^x te^{1-t}dt = \left[-te^{1-t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{1-t}dt = \left[-te^{1-t}\right]_0^x - \left[e^{1-t}\right]_0^x = \left[(-t-1)e^{1-t}\right]_0^x = (-x-1)e^{1-x} + e$$: لدينا

2) أ ـ حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$ ، $x = \lambda$ و $y = x$.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda (x - f(x))dx = \int_0^\lambda xe^{1-x}dx = (-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e$$: لدينا

بـ ـ التحقق أن : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = e$.

لدينا : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e\right] = e$ ، لأن : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty}(-\lambda-1)e^{1-\lambda} = 0$.

تصحيح مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح للتمرين الأول :

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

1) حلول المعادلة التفاضلية $y-2022y'=0$ هي الدوال من الشكل : $x\mapsto Ce^{2022x}$ ..... خطأ .

التبرير :

حلول المعادلة التفاضلية $y-2022y'=0$ هي الدوال من الشكل : $x\mapsto Ce^{\frac{1}{2022}x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}=0$ ..... صحيح .

التبرير :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$ ، مع $f(x)=e^{x^2}$ و $f'(x)=2xe^{x^2}$.

3) القيمة المتوسطة للدالة $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x^2}$ على المجال $[1;2]$ هي : $\dfrac{1-\ln 2}{2}$ ..... صحيح .

التبرير :

$$M=\frac{1}{2-1}\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2-\int_1^2-\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln 2}{2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{1-\ln 2}{2}$$

4) الجملة $\begin{cases}e^{x-y}-e^{x+y}=2\\ \ln(x-y)-\ln(x+y)=\ln 2\end{cases}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}^2$ ..... خطأ .

التبرير :

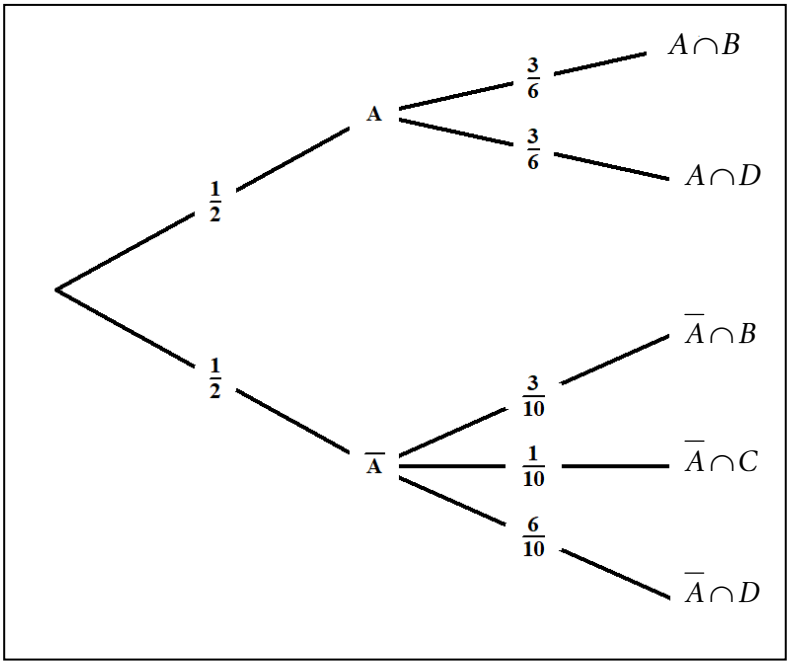
$$\begin{cases}e^{x-y}-e^{x+y}=2\\ \ln(x-y)-\ln(x+y)=\ln 2\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}e^{x-y}-e^{x+y}=2\\ \ln\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)=\ln 2\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}e^{x-y}-e^{x+y}=2\\ \dfrac{x-y}{x+y}=2\end{cases}\text{ تكافئ }\begin{cases}e^{x-y}-e^{x+y}=2\\ x=-3y\end{cases}$$

تكافئ $e^{-4y}-e^{-2y}-2=0$ تكافئ $Z^2-Z-2=0$ أو $\begin{cases}Z=-1\\ Z=2\end{cases}$ تكافئ أو $\begin{cases}e^{-2y}=-1\\ e^{-2y}=2\end{cases}$.

تكافئ $y=-\dfrac{\ln 2}{2}$ و منه حل الجملة هو الثنائية $\left(\dfrac{3\ln 2}{2};-\dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

حل مقترح للتمرين الثاني:

1) شجرة الإحتمالات :



2) حساب $P(B)$ و $P(D)$.

لدينا : $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{4}+\frac{3}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ و $P(D)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{4}+\frac{6}{20}=\frac{11}{20}$.

3) تبيان أن إحتمال ألا تبقى كرة سوداء في الكيس U_2 هو $\frac{3}{10}$.

لدينا : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

4) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 .

أ ـ القيم الممكنة لـ X هي : $\{0;1;2\}$.

بـ ـ قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X .

لدينا : $P(X=0)=\frac{3}{10}$ ، $P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}=\frac{1}{4}+\frac{6}{20}=\frac{11}{20}$ و $P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$.

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{3}{20}$

جـ ـ ما احتمال أن يبقى على الأقل كرة سوداء واحدة في الكيس U_2 ؟

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{11}{20}+\frac{3}{20}=\frac{14}{20}$$

حل مقترح للتمرين الثالث:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4u_n}{2+u_n}$.

1) أ ـ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2<u_n\leq 4$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " من أجل كل عدد طبيعي n ، $2<u_n\leq 4$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=4$ و منه $2<u_0\leq 4$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $2<u_n\leq 4$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2<u_{n+1}\leq 4$.

لدينا حسب الفرض $2<u_n\leq 4$ و منه :

$$u_{n+1}-4=\frac{4u_n}{2+u_n}-4=\frac{-8}{2+u_n}<0 \quad \text{و} \quad u_{n+1}-2=\frac{4u_n}{2+u_n}-2=\frac{2u_n-4}{2+u_n}=\frac{2(u_n-2)}{2+u_n}>0$$

و منه $2<u_{n+1}\leq 4$ و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2<u_n\leq 4$.

بـ ـ تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n}{2+u_n}-u_n=\frac{-u_n^{\,2}+2u_n}{2+u_n}=\frac{u_n(2-u_n)}{2+u_n}$.

و لدينا : $2<u_n\leq 4$ و منه $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة .

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(u_n)-\ln(u_n-2)$.

أ ـ إثبات أن (v_n) متتالية حسابية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-\ln(u_{n+1}-2)=\ln\left(\frac{4u_n}{2+u_n}\right)-\ln\left(\frac{2u_n-4}{2+u_n}\right)=\ln(4u_n)-\ln(2u_n-4)=\ln 2+v_n$$

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\ln 2$ و حدها الأول $v_0=\ln 2$.

بـ ـ كتابة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln 2 + n\ln 2 = (n+1)\ln 2$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{2}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_n - 2)$ ومنه $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_n-2}\right)$ ومنه $\dfrac{u_n}{u_n-2} = e^{v_n}$

أي : $u_n = e^{v_n}u_n - 2e^{v_n}$ أي $2e^{v_n} = u_n(e^{v_n}-1)$ أي $u_n = \dfrac{2e^{v_n}}{e^{v_n}-1}$ إذن : $u_n = \dfrac{2e^{(n+1)\ln 2}}{e^{(n+1)\ln 2}-1} = \dfrac{2\times 2^{n+1}}{2^{n+1}-1} = \dfrac{2}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

جـ ـ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}\right) = 2$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.

3) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\ldots+\dfrac{1}{u_n}$ و $P_n = (u_0+2)\times(u_1+2)\times(u_2+2)\times\ldots\times(u_n+2)$.

حساب S_n و P_n بدلالة n .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{2} = \dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

ومنه $S_n = \dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\ldots+\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{2}(n+1) - \left(\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+3}}{1-\dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}(n+1) - 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+3}\right) = \dfrac{1}{2}n - \dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + 2 = \dfrac{4u_n}{u_{n+1}}$ ومنه

$$P_n = (u_0+2)\times(u_1+2)\times(u_2+2)\times\ldots\times(u_n+2) = \frac{4u_0}{u_1}\times\frac{4u_1}{u_2}\times\frac{4u_2}{u_3}\times\ldots\times\frac{4u_n}{u_{n+1}} = \frac{4^{(1+2+\ldots+n)}u_0}{u_{n+1}}$$

$$= 4^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right) = 2^{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right)$$

حل مقترح للتمرين الرابع:

f الدالة العددية المعرّفة على $D =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. لأن : $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 0$.

بـ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$.

التفسير : المستقيميان اللذان معادلتاهما $x=1$ و $x=0$ مقاربان للمنحنى (C_f) .

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ فإن : $f'(x) = \dfrac{x^2-x+2}{2x(x-1)}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ و :

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)+2}{2x(x-1)}=\frac{x^2-x+2}{2x(x-1)}$$

بـ- إتجاه تغيّر الدالة f :

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x+2		$+$					
$x-1$			$-$		0	$+$	
x		$-$	0	$+$			
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$		$+\infty$	↗	$-\infty$

3) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=0$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

بـ- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ و إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ من إشارة $-x$ و منه :

- من أجل $x\in]-\infty;0]$ ، المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .
- من أجل $x\in]1;+\infty[$ ، المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

4) تبيان أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

من أجل كل $x\in D$ ، $(1-x)\in D$ و

$$f(1-x)+f(x)=\frac{1-x}{2}+\ln\left(\frac{-x}{1-x}\right)+\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

5) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $1.72<\alpha<1.73$ و $-1.21<\beta<-1.20$.

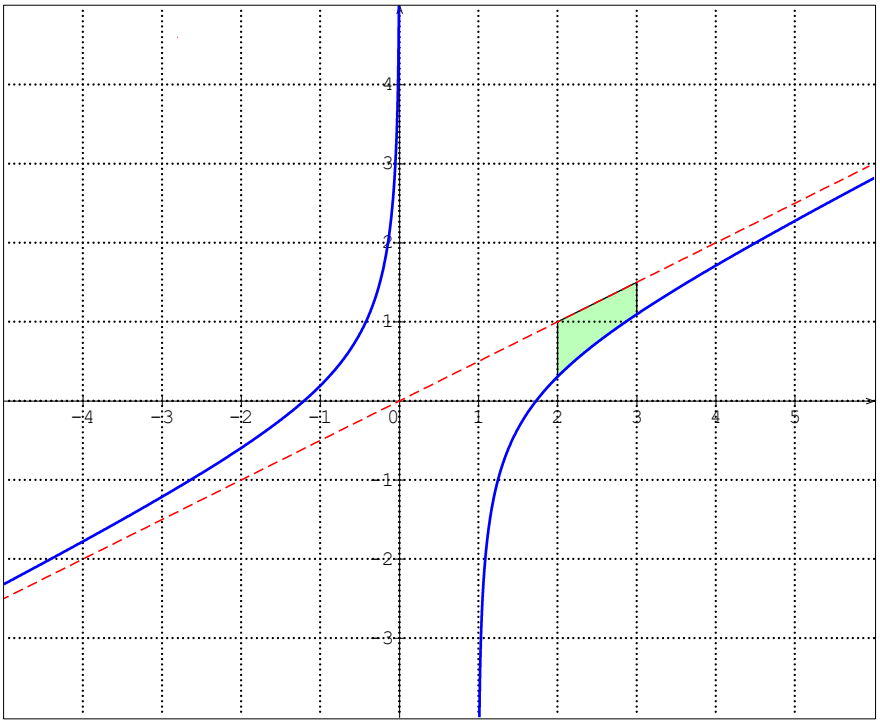
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1.72;1.73[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(1.72)\approx-0.01\\f(1.73)\approx0.002\end{cases}$

أي $f(1.72)\times f(1.73)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث : $1.72<\alpha<1.73$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و $]-1.21;-1.20[\subset]-\infty;0]$ و $\begin{cases}f(-1.21)\approx-0.01\\f(-1.20)\approx0.002\end{cases}$

أي $f(-1.20)\times f(-1.21)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0]$ حلا وحيدا β حيث : $-1.21<\beta<-1.20$.

6) الرسم :



7) a عدد حقيقي .

أ ـ تبيان أن الدالة : $x \mapsto (x-a)\ln(x-a)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-a)$ على المجال $]a;+\infty[$.

لدينا : من أجل كل $x \in]a;+\infty[$ ، $\left[(x-a)\ln(x-a)-x\right]' = \ln(x-a)+\frac{1}{x-a}\times(x-a)-1=\ln(x-a)$.

بـ ـ استنتاج دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

لدينا : من أجل كل $x \in]1;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=\ln(x-1)-\ln x$ ومنه دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

من الشكل : $x \mapsto \left[(x-1)\ln(x-1)-x\ln x\right]$.

جـ ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=\frac{x}{2}$ ، $x=$ و $x=$.

$$S=\int_2^3\left[\frac{x}{2}-f(x)\right]dx=\int_2^3-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx=\left[x\ln x-(x-1)\ln(x-1)\right]_2^3=3\ln 3-4\ln 2=\ln\left(\frac{27}{16}\right)$$

8) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $w_n=f(n)$ و $A_n=w_2+w_3+....+w_n$.

تبيان أن : $A_n=\frac{(n-1)(n+2)}{4}-\ln n$.

لدينا : أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$A_n=w_2+w_3+...+w_n=\frac{2}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+...+\frac{n}{2}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)=\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}\right)+\ln\left(\frac{1\times2\times...\times(n-1)}{2\times3\times...\times n}\right)$$

$$=\frac{n-1}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(n-1)(n+2)}{4}-\ln n$$

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2022

لا تنسونا بصالح دعائكم

نشر يوم 16.05.2022