الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات | دورة: جوان 2022

الموضوع التجريبي رقم: 05 | شعبة: علوم تجريبية

اختبار مادة الرياضيات | @xpi4math | المدة: 03 سا و 30 د

التمرين الأول: (03 نقاط)

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل:

❶ الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة:

أ) فردية ب) زوجية ج) لافردية و لا زوجية

❷ β عدد حقيقي، تكون الأعداد $e^{\beta}+1$ ، $e^{\beta}+2$ ، $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

أ) $\beta=\ln(\sqrt{5}-1)$ ب) $\beta=\ln(\sqrt{5}+1)$ ج) $\beta=0$

❸ حلول المعادلة التفاضلية $y''+3y'+4e^{-2x}=0$ هي الدوال:

أ) $x\mapsto\dfrac{2}{e^{2x}}+c$ ب) $x\mapsto\dfrac{1}{e^{2x}}+c$ ج) $x\mapsto e^{-2x}+c$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و $u_1=2$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$u_{n+1}=2\alpha u_n+3\alpha^2u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_{n+1}-3\alpha u_n$

❶ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α.

❷ هل المتتالية (v_n) متقاربة.

❸ أحسب بدلالة α و n المجموع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

❹ عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim\limits_{x\to+n}S_n=\dfrac{3}{4}$ ، استنتج عندئذ u_n بدلالة n ثم بين أن (u_n) متقاربة .

❺ في كل ما يلي نضع $\alpha=\dfrac{-1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$.

أ) بين أن : $A_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$.

ب) عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $A_n \leq 3^{-44}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0،1،1،2 و أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1،1،2،2

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

❶ أحسب احتمال الحصول على : أ) ثلاث كرات من نفس اللون

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم ج) ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى

❷ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات التي تحمل الرقم 1.

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$، ثم استنتج $E(1995X+1997)$.

ج) أحسب الانحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(0)=0$ و من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 2cm)

❶ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها مبينا كل المستقيمات المقاربة إن وجدت.

❷ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[e;+\infty[$، ثم بين أن $4,6<\alpha<4,7$.

❸ أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

❹ لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g.

ب) استنتج وضعية (T) بالنسبة الى (C_f).

ت) احسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (T).

II. n عدد طبيعي غير معدوم.

❶ باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x dx$ بدلالة n.

❷ استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$

❸ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات | دورة: جوان 2022

حل الموضوع التجريبي رقم: 05 | شعبة: علوم تجريبية

اختبار مادة الرياضيات | @xpi4math | المدة: 03 سا و 30 د

التمرين الأول: (03 نقاط)

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل:

❶ الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة: فردية

التبرير:

$$f(-x)+f(x)=-3x+\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}+3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{(e^{-2x}-1)(e^{2x}+1)+(e^{2x}-1)(e^{-2x}+1)}{(e^{-2x}+1)\times(e^{2x}+1)}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{1+e^{-2x}-e^{2x}-1+1+e^{2x}-e^{-2x}-1}{(e^{-2x}+1)\times(e^{2x}+1)}=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$$

❷ β عدد حقيقي، تكون الأعداد $e^{\beta}+1$ ، $e^{\beta}+2$ ، $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

ب) $\beta=\ln(\sqrt{5}+1)$ لأن: $\left(e^{\ln(\sqrt{5}+1)}+1\right)\times\left(2e^{\ln(\sqrt{5}+1)}\right)=\left(e^{\ln(\sqrt{5}+1)}+2\right)^2$

(خاصية الوسط الهندسي: $a\times b=c^2$ حيث a و b و c ثلاث حدود متتابعة للمتتالية)

❸ حلول المعادلة التفاضلية $y''+3y'+4e^{-2x}=0$ هي الدوال: $x\mapsto\dfrac{2}{e^{2x}}+c$

لأن:

$$\left(\frac{2}{e^{2x}}+c\right)''+3\left(\frac{2}{e^{2x}}+c\right)'+4e^{-2x}=\left(-4e^{-2x}\right)'+3\left(-4e^{-2x}\right)+4e^{-2x}$$

$$=8e^{-2x}-12e^{-2x}+4e^{-2x}=0$$

XPi4Math
الأستاذ: بوكحول كمال
07.91.19.77.27
الحدادة ـ جيجل
BAC BEM 2022

التمرين الثاني: (05 نقاط)

❶ اثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α:

$$v_{n+1}=2\alpha u_{n+1}+3\alpha^2 u_n-3\alpha u_{n+1}$$
$$v_{n+1}=-\alpha u_{n+1}+3\alpha^2 u_n$$
$$v_{n+1}=-\alpha(u_{n+1}-3\alpha u_n)=-\alpha v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ و حدها الأول $v_0=2-3\alpha$

❷ هل المتتالية (v_n) متقاربة ؟

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=(2-3\alpha)(-\alpha)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ لأن : $(\alpha\neq 0;-1<\alpha<1)$

و منه (v_n) متقاربة.

❸ حساب بدلالة α و n المجموع: $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$:

$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$$
$$S_n=(2-3\alpha)\times\left(\frac{1-(-\alpha)^{n+1}}{1-\alpha}\right)$$

❹ تعيين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{4}$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}(2-3\alpha)\times\left(\frac{1-(-\alpha)^{n+1}}{1-\alpha}\right)=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow\frac{(2-3\alpha)}{1-\alpha}=\frac{3}{4}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}$$

استنتاج u_n بدلالة n:

$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$$
$$=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\ldots+(u_{n+1}-u_n)$$
$$=u_{n+1}-u_0=\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

معناه : $u_{n+1}=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n}$

تبيين أن (u_n) متقاربة : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)=\frac{7}{4}$ و منه (u_n) متقاربة.

❺ في كل ما يلي نضع $\alpha=\frac{-1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$.

تبيين أن : $A_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$:

XPi4Math
الأستاذ:
بوكحول كمال
07.91.19.77.27
الحدادة _ جيجل
BAC BEM 2022

$$A_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$

$$A_n = 3 \times 3\left(\frac{1}{3}\right) \times \ldots \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$A_n = 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

أ) تعيين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $A_n \leq 3^{-44}$:

$$A_n \leq 3^{-44} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}} \leq 3^{-44}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{-(n^2-n-2)}{2}} \leq 3^{-44}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(n^2-n-2)}{2} \leq -44$$

$$\Leftrightarrow -n^2+n+2 \leq -88 \Leftrightarrow -n^2+n+90 \leq 0$$

بحل المتراجحة نجد $n \geq 10$ و منه أصغر عدد طبيعي يحقق $A_n \leq 3^{-44}$ هو 10.

حل التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0،1،1،2 و أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1،1،2،2

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

أولا حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب : $C_8^3 = 56$

❶ حساب احتمال الحصول على : أ) ثلاث كرات من نفس اللون $\frac{C_4^3 + C_4^3}{56} = \frac{1}{7}$

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم $\frac{C_4^3 + C_3^3}{56} = \frac{5}{56}$

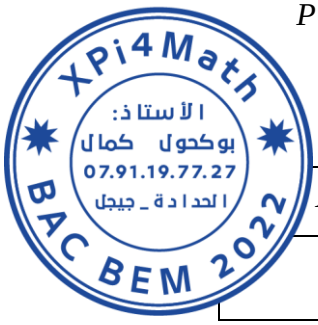
ج) ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى $\frac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{56} = \frac{3}{14}$

❷ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات التي تحمل الرقم 1.

أ) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X: القيم الممكنة لـ X هي $X = \{0;1;2;3\}$

$P(X=0)=\frac{C_3^3+C_3^2\times C_1^1}{56}=\frac{4}{56}$ ، $P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_1^1+C_4^1\times C_3^2}{56}=\frac{24}{56}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_3^1+C_4^2\times C_1^1}{56}=\frac{24}{56}$ ، $P(X=3)=\frac{C_4^3}{56}=\frac{4}{56}$



نلخص في جدول :

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=1,5$

استنتاج $E(1995X+1997)$: $E(1995X+1997)=1995E(X)+1997=4989.5$

ج) حساب الانحراف المعياري $\sigma(X)$: لدينا $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ حيث $V(X)=\sum_{i=1}^{4}(x_i)^2P_i-(E(X))^2=0,54$

و منه : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=0,73$

حل التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(0)=0$ و من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 2cm)

❶ دراسةاتجاه تغير الدالة f :

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right)=-\infty$

المشتقة : ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر.

من الواضح أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار الصفر لأنها غير معرفة على يساره.

ندرس قابلية الاشتقاق على يمين الصفر :

$$\lim_{x\to^{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to^{>}0}\frac{\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to^{>}0}\frac{1}{2}x(3-2\ln x)=0$$

و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0;1)$

لدينا الدالة f مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و :

$$f'(x) = x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x^2(\frac{-2}{x})$$
$$= 3x-2x\ln x-x$$
$$= 2x-2x\ln x = 2x(1-\ln x)$$

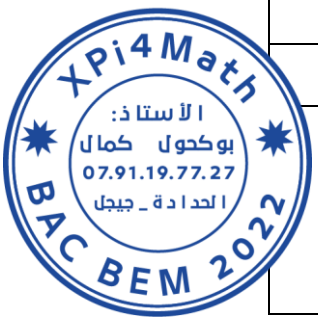
إشارة المشتقة : لدينا $2x>0$ مهما يكن x من المجال $]0;+\infty[$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-\ln x)$

و منه : $(1-\ln x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

اتجاه تغير الدالة f : الدالة f متزايدة على المجال $[0;e]$ و متناقصة على المجال $[e;+\infty[$

جدول التغيرات : $f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}e^2+1$	↗	$-\infty$



❷ اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[e;+\infty[$، و التحقق أن $4,6<\alpha<4,7$:

من جدول التغيرات نجد أن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[e;+\infty[$ و لدينا:

$$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[e;+\infty[$

التحقق أن $4,6<\alpha<4,7$: لدينا $f(4,6)\times f(4,7)<0$ و منه $4,6<\alpha<4,7$

❸ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1:

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1) \Rightarrow y=2x+\frac{1}{2}$$

❹ لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$.

أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^{>}} g(x)=-\frac{1}{2}$

المشتقة: الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $g'(x)=2x(1-\ln x)-2$

دراسة إشارة المشتقة : نلاحظ أن دراسة إشارة المشتقة ليست سهلة و لهذا سوف نقوم بحساب المشتقة الثانية

المشتقة الثانية : لدينا الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $g''(x)=-2\ln x$

دراسة اتجاه تغير g' : $g''(x)\geq 0$ تكافئ $0<x\leq 1$ اذن الدالة g' متزايدة على المجال $]0;1]$

$g''(x)\leq 0$ تكافئ $x\leq 1$ اذن الدالة g' متناقصة على المجال $[1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g' :

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	-2	↗	0	↘	$-\infty$

جدول تغيرات الدالة g' :

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	-2	↗	0	↘	$-\infty$

إشارة الدالة g' : من جدول التغيرات نجد أن $g'(x)\leq 0$ مهما يكن x من المجال $]0;+\infty[$

اتجاه تغير الدالة g : لدينا $g'(x)\leq 0$ و منه الدالة g متناقصة على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$g(x)$	1	↘	0	↘	$-\infty$

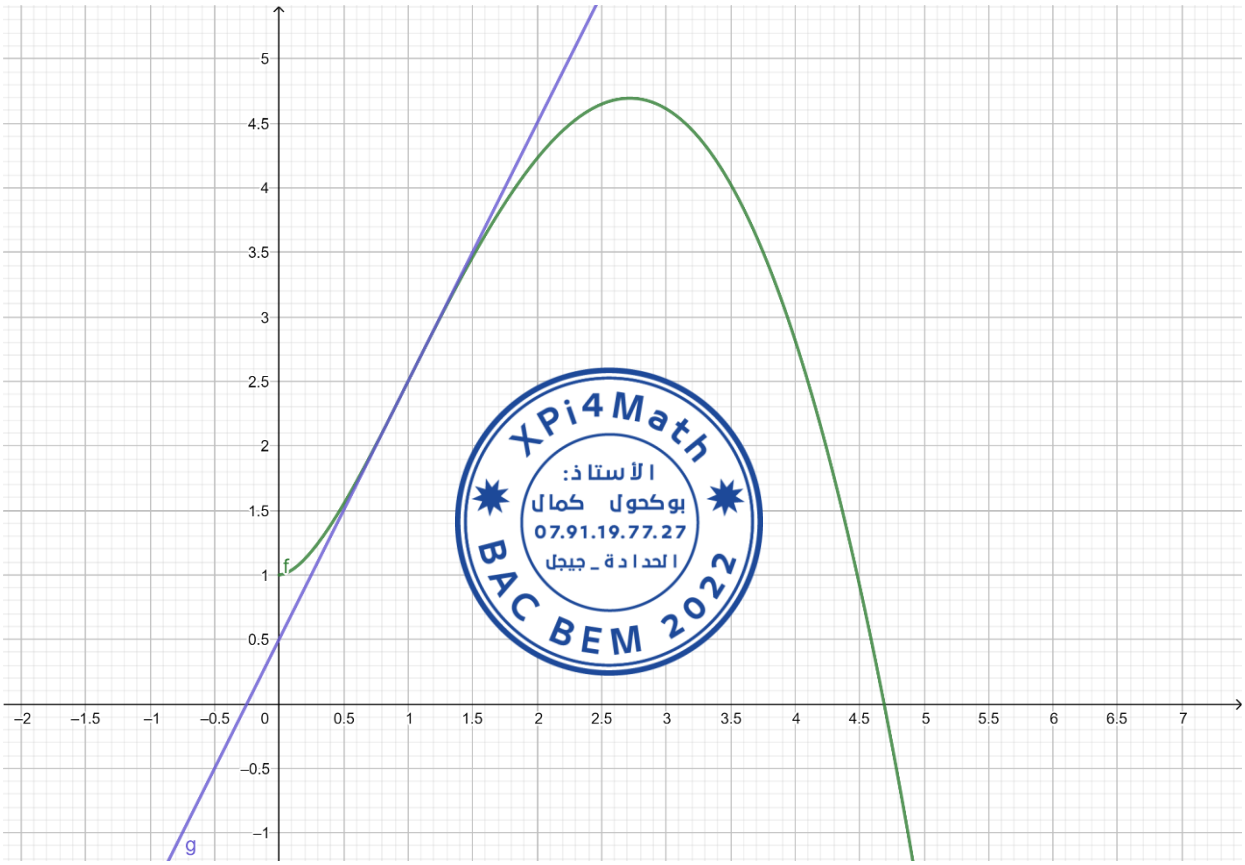
من جدول التغيرات نجد أن $g(x)\geq 0$ على المجال $]0;1]$ و $g(x)\leq 0$ على المجال $[1;+\infty[$

ب) استنتاج وضعية (T) بالنسبة الى (C_f) : نلاحظ أن إشارة الفرق $f(x)-y_{(T)}$ من إشارة $g(x)$

نلخص في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(T) فوق (C_f)	(C_f) (T) يقطع	(T) تحت (C_f)	

ج) انشاء (C_f) و (T):



II. n عدد طبيعي غير معدوم.

❶ باستعمال التكامل بالتجزئة نحسب $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$ بدلالة n:

نضع $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ و منه $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ اذن :

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$= \frac{1}{3n^2}\left(\frac{1}{3} + \ln(n)\right) - \frac{1}{9}$$

❷ استنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(f(x) - (2x + \frac{1}{2}) \right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(x^2 \ln x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$$

$$= \left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right) + \frac{1}{9} \right) u.a$$

❸ حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n)$: $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n) = \frac{1}{9}$

ربي يوفق الجميع في شهادة البكالوريا

لا نطلب منكم سوى الدعاء لنا بالخير ^^