



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية محفوظ سعد -بئر العاتر-
دورة ماي 2021

مديرية التربية لولاية تبسة
امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 سا و نصف

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (3 نقاط)

كل سؤال من الأسئلة التالية مستقل عن الأسئلة الأخرى وله جواب واحد صحيح فقط، عين الجواب الصحيح معللا اختيارك.

1. نعتبر العدد المركب $z = \frac{2+4i}{2-i}$

① $z = \frac{2}{3}i$ ② $z = \bar{z}$ ③ z تخيلي صرف.

2. نعتبر العدد المركب $z = \sqrt{3} - i$

① $-\frac{5\pi}{6}$ عمدة ل z . ② $-\frac{\pi}{6}$ عمدة ل z . ③ z^2 عدد حقيقي.

3. z عدد مركب يحقق $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$ ، الشكل الجبري ل z هو :

① $-\frac{8}{3} - 2i$ ② $\frac{8}{3} + 2i$ ③ $\frac{8}{3} - 2i$

التمرين الثاني: (6 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

المتتالية (v_n) معرفة بـ: $v_1 = u_1$ و $v_2 = u_1 \times u_2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$:

$$v_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$$

1. تحقق أن $v_2 = \frac{2}{3}$ ثم احسب v_3 .

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_n < 1$.

3. أ) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

ب) برر كون (v_n) متتالية متقاربة.



4. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} = v_n \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

ج) احسب نهاية (v_n) .

5. نعتبر المجموع S_n المعروف من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$.
أثبت ان: $S_7 = 2S_1$.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

صندوق يحتوي على ثماني كريات لانفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي: أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 1 ، 1 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3 ، 2 ، 3 - وكرية بيضاء تحمل الرقم -1.

1. نسحب عشوائيا أربع كريات في آن واحد. احسب احتمال الأحداث التالية:

A: "الحصول على أربع كريات تحمل نفس اللون".

B: "الحصول على كرتين خضراويتين على الأقل".

C: "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

D: "الحصول على أربع كريات جداء أرقامها سالب".

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

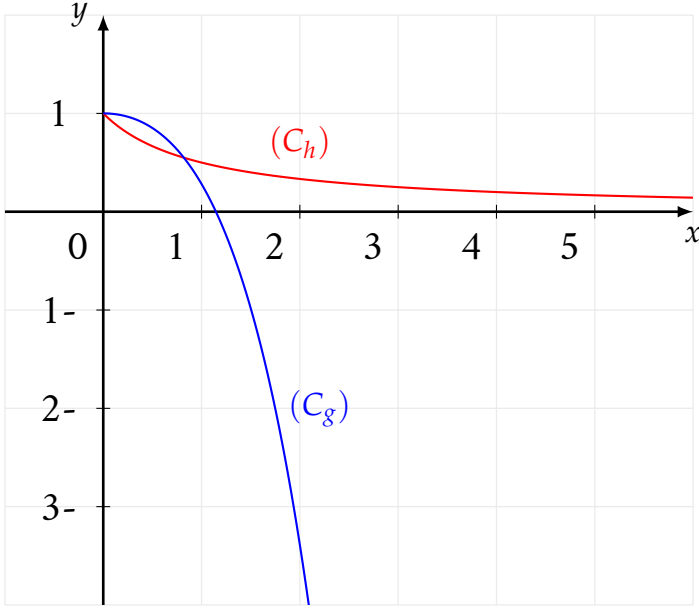
أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .



التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء الأول: في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (C_g) و (C_h) هما التمثيلان البيانيان على الترتيب للدالتين h و g المعرفتين على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = x + 2 - e^x$ و $h(x) = \frac{1}{x+1}$.



العدد الحقيقي α هو فاصلة نقطة تقاطع (C_g) مع حامل محور الفواصل.

1. أ) بقراءة بيانية تحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$ ، ثم أعط إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

ب) تحقق أن : $e^\alpha = \alpha + 2$.

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

الجزء الثاني:

1. لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. (C_f) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) أثبت أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(1 + xe^x)^2}$.

ج) استنتج اتجاه تغير f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) أثبت أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ثم أعط أدق حصر ممكن لـ $f(\alpha)$.

2. أ) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0; +\infty[$: $h(x) - f(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+xe^x)}$.

ب) استنتج الوضع النسبي لـ (C_h) و (C_f) .

ج) أعد تمثيل (C_h) على ورقة الإجابة ثم مثل (C_f) .

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (3,5 نقاط)

في ثانوية محفوظ سعد شكل أستاذ رفقة سبعة تلاميذ خمسة منهم ذكور أحدهم اسمه "عياش" والأخريات إناث ناديا لنصرة فلسطين والتعريف بالقضية الفلسطينية.

يريد الأستاذ رئيس تحرير المجلة أن يختار معه من خلال التلاميذ السبعة لجنة الإشراف على مجلة "القدس"، يقوم فيها تلميذ واحد بجمع المقالات، وتلميذ آخر بجمع الخواطر والقصائد من تلاميذ الثانوية، وتلميذ آخر بتصميم المجلة.

1. أثبت أن عدد اللجان التي يمكن تكوينها هو: 210 لجنة.

2. احسب احتمال الأحداث التالية:

الحادث A: تكوين لجنة تضم عياش.

الحادث B: تكوين لجنة تضم تلميذا واحدا وتلميذتين.

الحادث C: تكوين لجنة تضم ثلاث تلميذات.

الحادث D: تكوين لجنة لا تضم التلميذات.

3. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الذكور في اللجنة المكونة.

(أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي.

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (5,5 نقاط)

لتكن المتالتان (u_n) و (v_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \frac{2^n + 3n - 1}{2}$ ، $v_n = \frac{2^n - 3n + 1}{2}$ على الترتيب

1. احسب u_0 و u_1 و u_2 و v_0 و v_1 و v_2 .

2. لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = u_n - v_n$

(أ) أثبت أن (w_n) متتالية حسابية معينة أساسها وحدها الأول.

(ب) احسب المجموع $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10}$.

لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $t_n = u_n + v_n$

3. (أ) أثبت أن (t_n) متتالية هندسية معينة أساسها وحدها الأول.

(ب) احسب المجموع $S' = t_0 + t_1 + \dots + t_{10}$.

4. ليكن $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$ ، $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$

(أ) تحقق أن $S = S_1 - S_2$ و $S' = S_1 + S_2$

(ب) استنتج قيمة كل من S_1 و S_2 .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ نعتبر كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z) = az^2 + bz + c$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c إذا علمت أن: $P(1) = 1$ و $P(1+i) = 0$.

2. استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z) = 0$.

3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B لاحقتهما على الترتيب : $z_A = 1+i$ ، $z_B = 1-i$

أ) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

ب) بين أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ج) لتكن النقطة C التي لاحقتها $z_C = 2$ ، بين أن الرباعي $OACB$ مربع.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[\cup]-1; 0]$ بـ: $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$

ب) ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

3. أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 = x + 1 \dots (E)$

ب) نضع α الحل الموجب تماما للمعادلة (E) و β الحل السالب تماما. بين أن $\beta = -\frac{1}{\alpha}$

ج) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و $-\frac{1}{\alpha}$.

د) بين أن $y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha)$ معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة α .

هـ) تحقق أن (T) يشمل النقطة $A\left(0; -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$.

4. مثل كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

الموضوع الأول

التمرين الأول

$$z = \frac{2+4i}{2-i} = \frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i+8i-4}{4+1} = \frac{10i}{5} = 2i - 1$$

ومنه z تخيلي صرف، الإجابة الصحيحة هي ②

$$z = \sqrt{3} - i - 2$$

$$\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \text{ولدينا} \quad |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$

أي أن الإجابة الصحيحة هي ②

3- z عدد مركب يحقق $\bar{z} + |z| = 6 + 2i$ نستعمل الشكل الجبري لـ z أي نضع $z = x + iy$ حيث x و y عدداً حقيقيين، فيصبح لدينا: $x - iy + \sqrt{x^2 + y^2} = 6 + 2i$

$$\text{ومنه:} \quad \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + y^2} = 6 \\ -y = 2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 4} = 6 \\ -y = 2 \end{cases} \quad \text{نحل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } x + \sqrt{x^2 + 4} = 6$$

$$\text{لدينا: } x^2 + 4 = (6 - x)^2 \quad x^2 + 4 = x^2 + 36 - 12x \quad x^2 + 4 = x^2 + 36 - 12x \quad \text{ومنه: } x = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

إذن: $z = \frac{8}{3} - 2i$ والإجابة الصحيحة هي ③

ملاحظة

يمكن للتلميذ أن يعوض مباشرة بـ $z = \frac{8}{3} - 2i$ في العلاقة المعطاة ليتحقق أن تلك هي الإجابة الصحيحة الوحيدة الموجودة.

التمرين الثاني

1- التحقق من أن $v_2 = \frac{2}{3}$

$$\text{لدينا} \quad v_2 = u_1 \times u_2 = \frac{(1)(3)}{(2)^2} \times \frac{(2)(4)}{(3)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\star \text{ حساب } v_3 \quad v_3 = v_2 \times u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{3(5)}{(4)^2} = \frac{5}{8}$$

2- (ا) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\text{لدينا: } 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = u_n$$

(ب) لدينا $n > 0$ و $n+2 > 0$ و $(n+1)^2 > 0$ ومنه $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} > 0$

$$u_n > 0 \quad \dots(1)$$

ولدينا: $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ أي: $1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ ومنه (2) $u_n < 1$ من (1) و (2) ينتج $0 < u_n < 1$

3- (ا) إثبات كون (v_n) متناقصة تماما.

★ طريقة (1)

ومنه: $u_1 \times u_n \times \dots \times u_n > 0$ أي: $v_n > 0$ ومنه

$$v_{n+1} - v_n = v_n u_{n+1} - v_n = v_n (u_{n+1} - 1) =$$

$$v_n \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} - 1 \right) = -\frac{v_n}{(n+2)^2}$$

أي أن: (v_n) متناقصة تماما

★ طريقة (2)

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n

بما انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_1 > 0$$

$v_n > 0$ (من طريقة (1)) نقارن بين $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و 1

$$u_2 > 0$$

مما سبق $u_{n+1} < 1$ ومنه $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n u_{n+1}}{v_n} = u_{n+1}$

إذن $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ متناقصة تماما.

.

.

.

education-onec-dz.blogspot.com

$$u_n > 0$$

(ب) (v_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة.

4- (ا) التحقق من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن: $v_{n+1} = v_n \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

ومنه: $v_{n+1} = v_n u_{n+1} = v_n \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$ وهو المطلوب.

(ب) البرهان بالتراجع للقضية التالية:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

نتحقق من صحة $p(1)$ (الخاصية الابتدائية)

من أجل $n=1$ لدينا: $v_1 = \frac{0+2}{2(0+1)} = \frac{2}{2} = 1$ وبالتالي $p(1)$ صحيحة.

نفرض صحة $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $v_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+2)}$

لدينا حسب الفرض $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ ومنه

$$v_n u_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n+3}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

$$v_{n+1} = \left(\frac{n+3}{2(n+2)} \right) \left(\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} \right)$$

بالاختزال نجد:

$$v_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+2)} \text{ أي أن } p(n+1) \text{ صحيحة}$$

(ج) حساب نهاية (v_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{2(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

5- إثبات أن: $S_7 = 2S_1$

$$\ln(u_2 \times u_3 \times \dots \times u_7) = \ln(u_1) \text{ تكافئ } \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_7) = 2\ln(u_1) \text{ تكافئ } S_7 = 2S_1$$

$$\frac{9}{16} = \frac{9}{16} \text{ ومنه المطلوب. } \frac{9}{16} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \text{ تكافئ } \frac{2(8)}{3} = \frac{3}{4} \text{ تكافئ } \frac{v_7}{v_1} = u_1 \text{ تكافئ } \frac{v_2}{v_1} \times \frac{v_3}{v_2} \times \dots \times \frac{v_7}{v_6} = u_1$$

التمرين الثالث

عدد الإمكانيات الكلية: $C_4^8 = \frac{8!}{4!4!} = 70$

-1

$$p(A) = \frac{C_4^4}{C_4^8} = \frac{1}{70}$$

$$p(B) = C_3^3 C_5^1 + C_3^2 C_5^2 = \frac{5+30}{70} = \frac{35}{70}$$

$$p(C) = \frac{C_1^1 C_2^1 + C_1^1 C_1^1 + C_3^2 C_1^1 C_1^1}{C_4^8} = \frac{2+3}{70} = \frac{5}{70} \quad p(D) = \frac{C_6^3 C_2^1}{C_4^8} = \frac{40}{70}$$

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

(أ) القيم الممكنة لـ X : $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$p(X=0) = \frac{C_4^4}{C_4^8} = \frac{1}{70} \quad p(X=1) = \frac{C_4^1 C_4^3}{C_4^8} = \frac{16}{70}$$

$$p(X=2) = \frac{C_4^2 C_4^2}{C_4^8} = \frac{36}{70} \quad p(X=3) = \frac{C_4^3 C_4^1}{C_4^8} = \frac{16}{70} \quad p(X=4) = \frac{C_4^4}{C_4^8} = \frac{1}{70}$$

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$

قانون الاحتمال

(ب) حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 p_i x_i = 0 \times \frac{1}{70} + 1 \times \frac{16}{70} + \dots + 4 \times \frac{1}{70} = \frac{140}{70} = 2$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (C_g) و (C_h) هما التمثيلان البيانيان على الترتيب للدالتين h و g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = x + 2 - e^x$ و $h(x) = \frac{1}{x+1}$.

العدد الحقيقي α هو فاصلة نقطة تقاطع (C_g) مع حامل محور الفواصل.

1- ا) بقراءة بيانية نرى أن g متناقصة تماما على المجال $[0, +\infty[$ و

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0, +\infty[$

لدينا $g(1.14) \simeq -0.07$ و $g(1.15) \simeq 0.008$ ومنه $1.14 < \alpha < 1.15$ ومنه

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

ب) لدينا $g(\alpha) = 0$ يكافئ $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$ يكافئ $e^\alpha = \alpha + 2$ وهو المطلوب.

ج) حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-e^x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \left(\frac{e^x-1}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

التفسير البياني (C_f) يقبل نصف مماس أفقي $y = 1$ معادلة له لأجل كل $x \in [0, +\infty[$

الجزء الثاني

f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. (C_f) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1- ا) إثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})} = 0$$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا $y = 0$ معادلة له.

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ومن أجل كل عدد حقيقي: $x \in [0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (x+1)e^x(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

ومنه f متزايدة تماماً على المجال $[0, \alpha]$ ومتناقصة تماماً على المجال $[\alpha, +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	0	$f(\alpha)$	0

(ج) لدينا $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^{\alpha+1}}$ ونعلم أن $e^\alpha = \alpha + 2$ ومنه: $f(\alpha) = \frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+2-1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{1}{\alpha+1}$

إعطاء أدق حصر ممكن لـ $f(\alpha)$ لدينا $1.14 < \alpha < 1.15$ ومنه $\frac{1}{1.15} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1.14}$ ومنه $0.86 < f(\alpha) < 0.87$

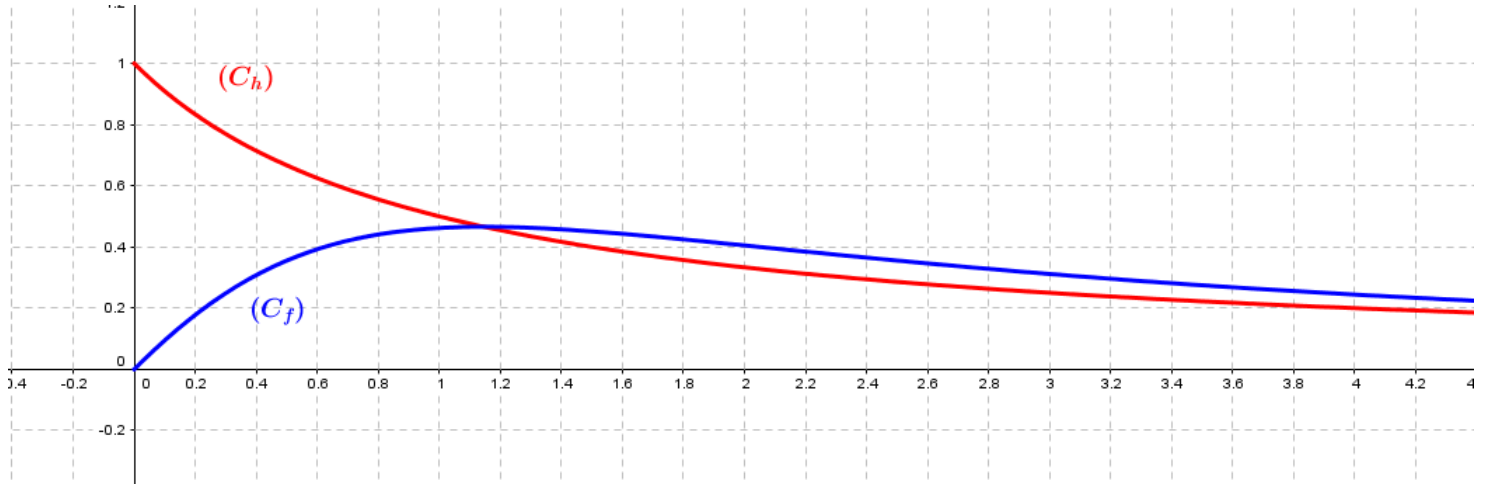
2- (ا) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0, +\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) \cdot f(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{xe^x + 1 - (e^x - 1)(x+1)}{(x+1)(xe^x + 1)} \\ &= \frac{xe^x + 1 - xe^x - e^x + x + 1}{(x+1)(xe^x + 1)} \\ &= \frac{x+2-e^x}{(x+1)(xe^x + 1)} = \frac{g(x)}{(x+1)(xe^x + 1)} \end{aligned}$$

(ب) لدينا $x+1 > 0$ و $xe^x + 1 > 0$ لأن $e^x \geq 0$ إذن إشارة $h(x) - f(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
الوضع النسبي بين (C_h) و (C_f)	(C_h) فوق (C_f)	(C_f) يقطع (C_h) في $(\alpha, \frac{1}{\alpha+1})$	(C_h) تحت (C_f)

3- التمثيلان البيانيان (C_h) و (C_f)



الموضوع الثاني

التمرين الأول

- 1- سيختار الأستاذ معه ثلاثة تلاميذ يعني $p = 3$ من اجل سبعة تلاميذ هذا يعني $n = 7$ ومنه عدد اللجان التي يمكن تكوينها: $A_7^3 = 210$

-2

$$p(A) = \frac{A_1^1 \times A_6^2 \times A_3^1}{A_7^3} = \frac{90}{210}$$

$$p(B) = \frac{A_5^1 \times A_2^2 \times A_3^1}{A_7^3} = \frac{30}{210}$$

$$p(C) = 0$$

$$p(D) = \frac{A_5^3}{A_7^3} = \frac{60}{210}$$

- 3- (ا) في هذا السؤال ننبه أن لغة التمرين مهمة ويجب على التلميذ أن يركز جيدا، الاستاذ في اللجنة المكونة، ومنه القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: $X = \{2, 3, 4\}$

(ب)

$$p(X = 2) = p(B) = \frac{30}{210} \quad p(X = 3) = \frac{A_5^2 \times A_2^1 \times A_3^2}{A_7^3} = \frac{120}{210} \quad p(X = 4) = p(D) = \frac{60}{210}$$

★ قانون الاحتمال

$X = x_i$	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{30}{210}$	$\frac{120}{210}$	$\frac{60}{210}$

التمرين الثاني

1- حساب u_0 و u_1 و u_2 و v_0 و v_1 و v_2 .

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad u_1 = 2 \quad u_2 = \frac{9}{2} \quad v_0 = 1 \quad v_1 = 0 \quad v_2 = -\frac{1}{2}$$

2- (أ) اثبات أن (w_n) متتالية حسابية معيننا أساسها وحدها الأول

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= u_{n+1} - v_{n+1} - u_n + v_n \\ &= \frac{2^{n+1} + 3(n+1) - 1}{2} - \left(\frac{2^{n+1} - 3(n+1) + 1}{2} \right) - \left(\frac{2^n + 3n - 1}{2} \right) + \frac{2^n - 3n + 1}{2} \\ &= \frac{2^{n+1} + 3n + 2 - 2^{n+1} + 3n + 2 - 2^n - 3n + 1 + 2^n - 3n + 1}{2} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $w_0 = -1$

(ب) حساب المجموع:

$$S = w_0 + w_1 + \dots + w_{10} = \frac{(w_0 + w_{10})}{2} \times (11) = \frac{(28)}{2} \times (11) = 154$$
 لدينا

3- (أ) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $t_n = u_n + v_n = \frac{2^n + 3n - 1}{2} + \frac{2^n - 3n + 1}{2} = \frac{2 \times 2^n}{2} = 2^n$ ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $t_0 = 1$.

(ب) حساب المجموع S'

$$S' = t_0 + t_1 + \dots + t_{10} = (1) \left(\frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} \right) = -1 + 2^{11} = 2^{11} - 1$$
 لدينا

4- (أ) التحقق أن $S = S_1 - S_2$

لدينا:

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= (u_0 + u_1 + \dots + u_{10}) - (v_0 + v_1 + \dots + v_{10}) \\ &= (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + \dots + (u_{10} - v_{10}) = w_0 + w_1 + \dots + w_{10} = S \end{aligned}$$

طريقة (2) التحقق أن $S' = S_1 + S_2$ بنفس الطريقة السابقة

(ب) لدينا $\begin{cases} S_1 - S_2 = 154 \\ S_1 + S_2 = 2^{11} - 1 \end{cases}$ نحل جملة المعادلتين في $\mathbb{R}^2$

$$S_2 = \frac{1833}{2} \text{ و } S_1 = \frac{2201}{2}$$
 فنجد

التمرين الثالث

1- تعيين a ، b و c

$$\begin{aligned} \text{يكافئ} \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + c + (2a + b)i = 0 \end{cases} & \text{يكافئ} \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a(1 + i)^2 + 0(1 + i) + c = 0 \end{cases} & \text{يكافئ} \begin{cases} P(1) = 1 \\ P(1 + i) = 0 \end{cases} \\ & & \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} & \text{يكافئ} \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + c = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2- $(1 + i)$ هو جذر لـ $P(z)$ ومنه $(1 + i)$ هو الجذر الآخر لـ $P(z)$ ، لأن $P(z)$ كثير حدود من الدرجة الثانية يقبل حلين مترافقين في $\mathbb{C}$

$$z_B = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} \quad , \quad z_A = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{و} \quad z_B = 1 - i \quad , \quad z_A = 1 + i \quad (1)$$

(ب) $\frac{z_A}{z_B} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$ لدينا $\left| \frac{z_A}{z_B} \right| = 1$ و $\text{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه إذن المثلث OAB مثلث قائم في O ومتساوي الساقين.

(ج) $z_C = 2$ لدينا $OA = AC = BC = OB = \sqrt{2}$ و $(\vec{OB}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $OACB$ مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$.

التمرين الرابع

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad (1)$$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين $x = 0$ و $x = -1$ معادلتان لهما على الترتيب.

2- (أ) f قابلة للاشتقاق على مجالات مجموعة تعريفها ومن أجل كل $x \in D_f$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}}{\frac{x^2}{x+1}} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x^2} = \frac{x(x+2)}{x^2(x+1)} = \frac{(x+2)}{x(x+1)}$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

(ب)

f متناقصة تماما على المجال $]-1, 0[$ و f متزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3- (أ) $(E): x^2 = x + 1$ حلا (E) هما $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ب) نضع $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لدينا $\alpha \times \beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1$ ومنه $\beta = \frac{-1}{\alpha}$

(ج) فاصلتا نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هما حلا المعادلة $f(x) = 0$ في D_f

$f(x) = 0$ تكافئ $\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = 0$ تكافئ $\frac{x^2}{x+1} = 1$ تكافئ $x^2 = x + 1$ تكافئ (E) و α و β ينتميان إلى D_f

$$\begin{aligned}
 (T): y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) &= \frac{\alpha + 2}{\alpha(\alpha + 1)}(x - \alpha) = \frac{(\alpha + 1) + 1}{\alpha(\alpha + 1)}(x - \alpha) \\
 &= \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha) \\
 &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha)
 \end{aligned}$$

(د) لدينا $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(0 - \alpha) = -1 - \frac{1}{\alpha^2}$ ومنه $A \in (T)$

4- إنشاء (C_f) و (T)

