الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا تجريبي
الشعبة : تقني رياضي

ثانوية ابن عليوي صالح
دورة ماي 2021

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 سا

اختر احد الموضوعين الاتيين

الموضوع الاول

التمرين الأول (4.5 نقاط)

1/ (V_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدها الأول V_0 و أساسها q حيث $\begin{cases}\ln V_0 + \ln V_2 = 2ln2 \\ e^{V_0} \times e^{V_1} = e^6\end{cases}$

ا) احسب V_1 و V_0 ثم استنتج قيمة الأساس q

ب) نضع $V_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$ عبر عن V_n بدلالة n ثم احسب $\lim V_n$

ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \ln V_0 + \ln V_1 + \ldots\ldots\ldots + \ln V_n$

2/ نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 6$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{9U_n + 10}$

ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq U_n \leq 10$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج انها متقاربة

ج) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - U_n)$

د) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 10 - U_n \leq V_n$

ه) استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثاني (4 نقاط)

اختر الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الاتية

1/ - صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و4 سوداء و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية زرقاء جميع الكرات متماثلة .نسحب عشوائيا كرية واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة فان امله الرياضياتي هو:

ا) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{2}{5}$ ج) 1

- نضيف n كرية سوداء الى الصندوق U_1 و n كرية حمراء الى الصندوق U_2 ونسحب كرية من الصندوق U_1 و كرية من الصندوق U_2

فأن قيمة n بحيث يكون احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين $\frac{7}{12}$ هي

ا) 1 ب) 2 ج) 3

2/ - الشكل الاسي للعدد المركب $Z = -\sin\theta + i\cos\theta$ هو

ا) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ب) $2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ ج) $e^{i(\pi-\theta)}$

- العدد : $(1+i)^{1442}$ يساوي

ا) 2^{721} ب) $i\,2^{721}$ ج) $2^{721}(1+i)$

التمرين الثالث (4.5 نقاط)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول (x,y) التالية $2021x - 2020y = 5 \quad \ldots (E)$

ا) بين ان العددين 2020 و 2021 اوليان فيما بينهما و استنتج ان المعادلة (E) تقبل حلولا

ب) بين انه اذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (E) فان $x \equiv 0[5]$

ج) استنتج حلا خاصا $(x_0\,,y_0)$ حيث $2022 \leq x_0 \leq 2027$ ثم حل المعادلة (E)

2/ عين الاعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv 5\ [2020] \\ a \equiv 0\ [2021] \end{cases}$

3/ ا) ادرس و حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 9

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0[9]$

ج) عين الثنائيات $(x\,,y)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) بحيث : $5^{y-x} \equiv 8[9]$

التمرين الرابع (7 نقاط)

I- g الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x + 1 - (2x+1)lnx$

1/ ا) احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g'

ب) بين انه من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ $g'(x) < 0$

ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $+\infty$ و 0 ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.83 < \alpha < 1.84$

3/ حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- f الدالة المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2lnx}{x^2+x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o.\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ وحدة الطول

(على محور الفواصل $1cm$ و على محور التراتيب $4cm$)

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسر النتيجتين هندسيا

2/ ا) بين انه من اجل كل x من $]0\,;+\infty[$ $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3/ بين ان $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4/ اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5/ أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f)

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - m$

7/ نعتبر الدالة h المعرفة على $]0\,,+\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

ادرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها

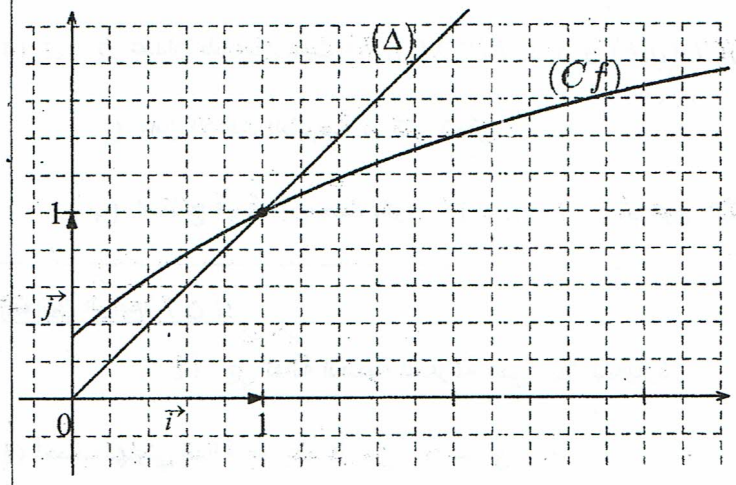
انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول (4,5 ن):

f الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.



α عدد حقيقي موجب . (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

II) نضع في كل ما يلي $\alpha=0$

1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول

ب) عبر بدلالة n عن v_n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+.....+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$

5) احسب بدلالة n المجموع T حيث: $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+.....+\ln(|v_{n+2019}|)$

التمرين الثاني(4 ن):

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي :

5 كريات حمراء مرقمة كما يلي: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 كريات خضراء مرقمة كما يلي : 0 ، 0 ، 1 ، 2 ، 2

نسحب عشوائيا من الكيس 4 كريات في آن واحد

1) أحسب احتمال كلا من الأحداث التالية :

A : الحصول على 4 كريات من نفس اللون
B : الحصول على 4 كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2020
C : الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي 4

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب 4 كريات الرقم الأكبر من بين الأرقام الأربعة

أ) عين قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون احتماله
ب) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X
ج) احسب احتمال الحدث : $|X-1|=1$

التمرين الثالث(4,5 ن):

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5

3) بين أن العدد 131 أولي

4) a و b عددان طبيعيان حيث $m=PPCM(a,b)$ و $d=PGCD(a,b)$

أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$

ب) استنتج قيمة n بحيث يكون $7<n<15$ ؛ ثم عين الثنائيات (a,b)

التمرين الرابع(7 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$

1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x+3-xe^{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2) أ - بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)

3) أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

4) أ - بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما على الترتيب α و β حيث:

$-3,05<\alpha<-3$ و $0,75<\beta<0,8$

ب- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج- أنشئ (T) ؛ (Δ) و (C_f)

5) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=x+m$

6) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ – بين أن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب- أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة الدالة h')

الموضوع الأول لشهادة البكالوريا 2021

التمرين الأول (4,5 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على ℕ بـ: u_0 = 6 و u_{n+1} = √(9u_n + 10)

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث: ln v_0 + ln v_2 = 2 ln 2 و e^{v_0} × e^{v_1} = e^6

1) أ) تبين أن v_1 = 4 و أن أساس المتتالية (v_n) هو q = 1/2

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم احسب بدلالة n المجموع S_n = ln v_0 + ln v_1 + ... + ln v_n

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: 6 ≤ u_n ≤ 10

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: 10 − u_{n+1} ≤ 1/2 (10 − u_n)

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: 10 − u_n ≤ (1/2)^n

ج) احسب lim_{n→+∞} u_n

التمرين الثاني (4 نقاط)

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: 6 ≤ u_n ≤ 9

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: 9 − u_{n+1} ≤ 3/10 (9 − u_n)

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: 9 − u_n ≤ 3 (3/10)^n

ج) احسب lim_{n→+∞} u_n

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على ℕ بـ: v_n = 1/(9 − u_n)

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أن u_n = 9 − 3/(n+1)

ج) احسب بدلالة n المجموع S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n

التمرين الثالث (4,5 نقاط)

(E) : 2021x − 2020y = 5

1) أ) بين أن (E) تقبل حلولا

ب) تحقق أن الثنائي (x_0, y_0) = (2021, 2021) حل لـ (E)

ج) حل المعادلة (E)

2) أ) عين الثنائي (x, y) حل (E) بحيث 2022 ≤ x ≤ 2027

ب) عين الثنائي (x_0, y_0) حل (E) بحيث x_0 + y_0 = 4047

3) عين الثنائي (x_1, y_1) حل (E) بحيث 2021(x_1 − 2025) = 2020(y_1 − 2026)

التمرين الرابع (4 نقاط)

1) أ) بين أن (1+i)^{1442} = 2^{721} i

ب) عين الشكل المثلثي للعدد (1+i)^{1442}

2) أ) بين أن C^1_{n+10} × C^1_{n+4} = n^2 + 14n + 40

ب) عين بدلالة n عدد الحالات المؤدية إلى الحدث A: "الحصول على جداء يساوي 40"

ج) عين n بحيث P(A) = 7/12

3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث (n^2 + 8n + 22)/(n^2 + 14n + 40) = 7/12

4) أ) عين الشكل المثلثي للعدد المركب z = −sin θ + i cos θ حيث θ ∈]0, π/2[

ب) استنتج أن z^{1442} = i 2^{721}

ج) عين θ بحيث z^{1442} = (1+i)^{1442}

التمرين الخامس (3 نقاط)

1) أ) بين أن E(X) = 0 × 24/40 + 1 × 16/40 = 2/5

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2) أ) عين بدلالة n عدد الحالات المؤدية إلى الحدث A: "الحصول على جداء يساوي 40"

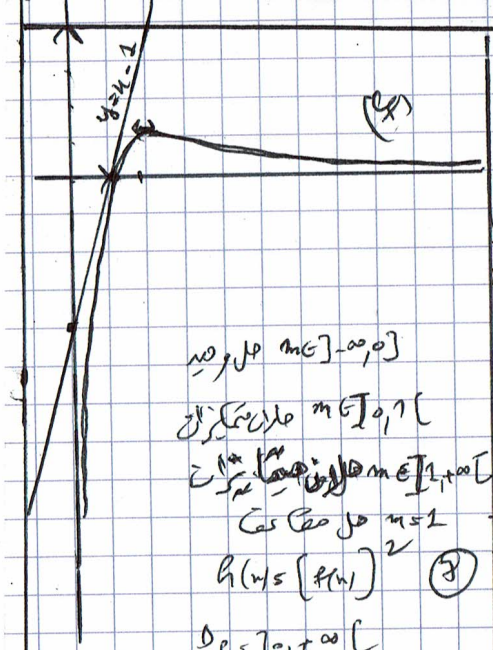
ب) عين n بحيث P(A) = 7/12

3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث (n^2 + 8n + 22)/(n^2 + 14n + 40) = 7/12

4) أ) عين الشكل المثلثي للعدد المركب z = −sin θ + i cos θ حيث θ ∈]0, π/2[

ب) استنتج أن z^{1442} = i 2^{721}

ج) عين θ بحيث z^{1442} = (1+i)^{1442}



من أجل كل $m \in]-\infty, 0]$

$f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا في $]0,1[$

$f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا في $]1,+\infty[$

$f(x) = 1$ لأن $x = 1$

(3) $h(x) = [f(x)]^2$

$D_h =]-1,+\infty[$

$h'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$2f'(x)f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$[\alpha, +\infty[$ و $]0,1]$ على h تناقصية

$[1, \alpha]$ على h تزايدية

x	0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(f(\alpha))^2$	$\searrow$	0

$D =]0,+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2+x}$ (II

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ $\left(\dfrac{-\infty}{0^+}\right)$ (1

x	0		$+\infty$
x^2+x	0^+	$+$	

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x+1} = 0 \times 0 = 0$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $g = 0$ بجوار $+\infty$ و يقع تحته

$f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}(x^2+x) - (2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$ (2

$f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(x^2+x)^2}$; $f'(x)$ و $g(x)$ من إشارة واحدة

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

f متزايدة تماما على $]0,\alpha]$

f متناقصة تماما على $[\alpha, +\infty[$

$f(\alpha) = \dfrac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}$ (3

$\ln\alpha = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$ لدينا $g(\alpha) = 0$ أي

$f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ $f(\alpha)$ حصر

$1,83 < \alpha < 1,84$

$0,232 < f(\alpha) < 0,234$ إذن

1 معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة

$y = f(1)(x-1) + f(1)$

$y = x - 2$

1 ف / 1 ن 5

(4) الوضعية النسبية

$f(x) - mx - m$

(C_f) و (Δ_m) نقطتا تقاطع إحداثيا

نقطة ثابتة $y = mx - m$

$m(1) - m = 0$ or $A(1,0)$

(IV (4 التمرين

$g(x) = x + 1 - (2x+1)\ln x$ (I

$D_g =]0,+\infty[$

$g'(x) = 1 - 2\ln x - \dfrac{2x+1}{x}$ (1

$g''(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2}$ (2

$x = \frac{1}{2}$ حيث $g''(x) = 0$

g' تقعر g $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ على

g' تحدب g $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g''(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$\|$	$\nearrow$	$3+2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$g'(\frac{1}{2}) = -3 + 2\ln 2 \simeq -1,61$

$g'(x) < 0$: $]0,+\infty[$ على g متناقصة تماما

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (2

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 + \frac{1}{x} - 2\ln - \frac{\ln x}{x}\right]$

$= -\infty$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$1,83 < \alpha < 1,84$ حيث $g(x) = 0$ (2

$(1,83; 1,84)$ على g تناقصية و تأخذ قيمها في

$g(1,84) = -0,013$ $g(1,83) = 0,013$

حسب جدول تغيرات g $g(x) = 0$ يقبل حلا وحيد

$g(\alpha) = 0$ حيث $1,83 < \alpha < 1,84$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

(3

$5^{6\times 327+1} \times 5^{325\times 6+4}$ [9]

$\equiv 1 \times 4$ [9]

$\equiv 4$ [9]

$1442^{1440n+12} \equiv 2^{1440n+12}$ [9]

$\equiv 2^{3(480n+4)}$ [9]

$\equiv 8^{480n+4}$ [9]

$\equiv (-1)^{480n+4}$ [9]

$\equiv 1$ [9]

$2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv$

$\equiv 4 + 1 + 4$ [9]

$\equiv 0$ [9]

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ العدد $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4$ يقبل القسمة على 9

$5^{8-n} \equiv 8$ [9]

$5^{2021k+2026-2020k-2025} \equiv 8$ [9]

$5^{k+1} \equiv 8$ [9]

$k+1 = 6k'+3$ أي

$k = 6k'+2$ أي

$y = 2021(6k'+2) + 2026$

$y = 12126k' + 6058$

$x = 2020(6k'+2) + 2025$

$x = 12120k' + 6065$

$S = \{(12120k'+6065, 12126k'+6058) / k' \in \mathbb{N}\}$

$2021 \mid 2020(y-2026)$ أي

بما أن 2020 و 2021 أوليان فيما بينهما

$y - 2026 = 2021k / 2021 \mid y - 2026$

$y = 2021k + 2026$ أي

$2021(x-2025) = 2020(2021k)$ أي

$x = 2020k + 2025$ أي

$S = \{(2020k+2025, 2021k+2026) / k \in \mathbb{Z}\}$

(2 لدينا $\begin{cases} 5^\alpha \equiv 5 \ [2020] \\ q \equiv 0 \ [2021] \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = 2020q + 5 \\ \alpha = 2021\beta \end{cases}$

$2020q + 5 = 2021\beta$

$2021\beta - 2020q = 5$ أي

$\beta = x = 2020k + 2025$

$q = y = 2021k + 2026$

$q \equiv 2020(2021k+2026) + 5$

$\equiv 4076240k + 4092525$

$\equiv 5$ [9]

5^n دورة 5^n بقوى متتالية

$5^0 \equiv 1$ [9] $5^1 \equiv 5$ [9] $5^2 \equiv 7$ [9]

$5^3 \equiv 8$ [9] $5^4 \equiv 4$ [9] $5^5 \equiv 2$ [9]

$5^6 \equiv 1$ [9] ومنه الدورة 6

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n \equiv$	1	5	7	8	4	2 [9]

(4 $2021^{1962n+1954} + 1442^{1440n+12} + 4 \equiv 0$ [9]

$2021^{1962n+1954} \equiv 5^{1962n+1954}$ [9]

$\equiv 5^{6\times 327+n+325\times 6+4}$ [9]

تصحيح الموضوع 2 - إدارة بكالوريا
- 2021 - الدورة الرئيسية شعبة رياضيات

التمرين الأول (4,5 نقط)

$D=[0,+\infty[$ $\quad f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$

I) (1) $u_{n+1}=f(u_n)$: نبين بالترجمة (u_n)

$u_{n+1}=f(u_n)=\frac{3u_n+1}{u_n+3}$ ، $u_0=q$ لدينا

$q=1$ أي $q=\frac{3q+1}{q+3}$ منه،

$q\geq 0$ أي $q=1$ منه،

(2) (u_n) متتالية ثابتة ومساوية لـ 1

$0\leq u_0<1$: n طبيعي عدد كل من أجل - (2

$u_0=0$ $\quad n=0$

محققة $P(0)$

$P(n+1)$ صحيحة، نبرهن أن $P(n)$ صحيحة

$0\leq u_n<1$ ، $P(n)$ صحيحة

$0\leq u_{n+1}<1$ ، $P(n+1)$ صحيحة؟

f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$، $0\leq u_n<1$

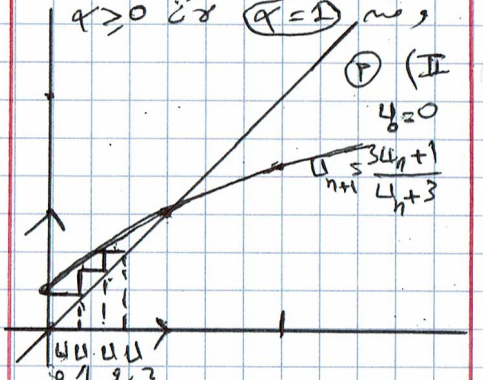
$f(0)\leq f(u_n)<f(1)$ منه،

أي $0\leq u_{n+1}<1$ ، $0\leq\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{3}\leq u_{n+1}<1$

منه $0\leq u_{n+1}<1$.

من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n<1$

محققة (u_n)



(3) (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 ومتقاربة نحو 1

$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n=\frac{1-u_n^2}{u_n+3}$ (أ

$u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+3}$

لدينا $0\leq u_n<1$ ، منه

$0\leq 1-u_n<1$ / $1\leq u_n+1<2$ / $3\leq u_n+3<4$

$u_{n+1}-u_n>0$ ، (u_n) متزايدة تماما

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 (ب

$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ (3

$v_{n+1}=v_n\times q$ متتالية هندسية (v_n) (أ

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{2u_n-2}{4u_n+2}$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\frac{1}{2}v_n$

$q=\frac{1}{2}$ أساسها (v_n) متتالية هندسية

$v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=-1$

$v_n=v_0q^n=-1\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (ب

$v_nu_n+v_n=u_n-1$ أي $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

$u_n=\frac{-v_n-1}{v_n-1}$ منه $u_n(v_n-1)=-v_n-1$ منه

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{-1}{-1}=1$ ، $u_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأن

$-1<\frac{1}{2}<1$

$S_n=1+\frac{v_{2021}}{v_{2020}}+\frac{v_{2022}}{v_{2020}}+\dots+\frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$ (4

$=\frac{v_{2020}+v_{2021}+v_{2022}+\dots+v_{n+2019}}{v_{2020}}$

$=\frac{1}{v_{2020}}\left[v_{2020}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}\right]$

$=2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=\boxed{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$T_n=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+\dots+\ln(|v_{n+2019}|)$

$\ln(|v_n|)=\ln\left|-1\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|=\ln\left(-1\left|\frac{1}{2}\right|^n\right)$ لدينا

$\ln(|v_n|)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{-n\ln 2}$

(w_n) متتالية حسابية حيث $w_n=(-\ln 2)n$ نضع

$w_0=0$ ، أساسها $r=-\ln 2$ أي

$T_n=w_n+w_{n+1}+\dots+w_{n+2019}$ / $n+2020$

$=\frac{2020}{2}\left[w_n+w_{n+2019}\right]$

$=1010\left[(-\ln 2)n+(-\ln 2)(n+2019)\right]$

$T_n=1010\left[(-2\ln 2)n+(-\ln 2)(2019)\right]$

التمرين الثاني (4 نقط)

(1) $2,2,1,1,0$ أو $5,2,2,1,0$ 10

$C_{10}^4=210$ عدد الحالات

$P(A)=\frac{C_5^4+C_5^4}{210}=\frac{1}{21}$ A: "الحصول على 4 كريات من نفس اللون"

$P(B)=\frac{C_3^2\times C_4^2}{210}=\frac{18}{210}=\frac{3}{35}$ B: "الحصول على كريتين من كل لون"

$P(C)=\frac{C_3^2\times C_4^2+C_3^2\times C_3^2\times C_4^1}{210}=\frac{9}{35}$ C: "الحصول على 4 كريات تحمل أرقاما مجموعها 4"

$0+1+1+2=4$ / $0+0+2+2=4$

(2) X: "عدد الكريات التي تحمل الرقم 1 المسحوبة"

X: 0 أو 1 أو 2

1, 1, 1, 0, 0, 0

$P(X=1)=\frac{C_6^4}{210}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$

$P(X=2)=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$ ومنه

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/14	13/14	

$E(X)=\sum_{i=1}^{3}p_ix_i$ أمل (ب

$=\frac{1}{14}+\frac{26}{14}=\frac{27}{14}$

$|X-1|=1$ أي $X=1$ أو $X=2$ (ج

$X-1=-1$ أي $X=0$ مرفوض

$P(|X-1|=1)=P(X=2)=\frac{13}{14}$

التمرين الثالث (4,5 نقط)

(1) $5\leq 2^n$ حسب قيم n الطبيعي

$2^0\equiv 1[5]$ / $2^1\equiv 2[5]$ / $2^2\equiv 4[5]$ / $2^3\equiv 3[5]$

4 دور، كل دور 4 بواقي $2^4\equiv 1[5]$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^n\equiv$	1	2	4	3	[5]

(2) إثبات أن 5 يقسم $(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1})$

$2014\equiv 2^2[5]$ لأن $2014\equiv 4[5]$ منه،

$2014^{2n+1}\equiv 2^{4n+2}[5]$ أي $2014^{2n+1}\equiv(2^2)^{2n+1}[5]$

$\equiv 4[5]$

$2\times 2016^{8n}\equiv 2[5]$ منه، $2016^{8n}\equiv 1[5]$ منه، $2016\equiv 1[5]$

$2017^{4n+3}\equiv 3[5]$ منه، $2017^{4n+3}\equiv 2^{4n+3}[5]$ منه، $2017\equiv 2[5]$

$2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 4-2+3[5]$ إذن

$\equiv 0[5]$

5 يقسم 0: صحيح

(3) $\sqrt{131}\approx 11,44$

11, 7, 5, 3, 2 أعداد أولية أصغر من 131

131 عدد أولي منه،

(4) $m=PPCM(a,b)$ $\quad d=PGCD(a,b)$

$\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ a\times b=5m\end{cases}$ (5

$D_h = \mathbb{R}^*$ $\quad h(x) = \dfrac{1+3x-e^{2x}}{x}$ ⑥

$h(x) = f(\frac{1}{x})$; $\mathbb{R}^*$ على h دالة ⑤

$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}+3-\frac{1}{x}e^{2(\frac{1}{x})}$

$= \dfrac{1+3x-e^{2x}}{x} = h(x)$

$h(x) = f(\frac{1}{x})$

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'(\frac{1}{x})$ (قاعدة مركب)

$\frac{1}{x^2} > 0$ لأن $x \neq 0$ ، $\frac{1}{x^2} < 0$ لأن $x < 0$ ومنه

$-\frac{1}{x^2} < 0$ لأن $f'(\frac{1}{x})$ و $f'(x)$ من نفس الإشارة

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	
$h(x)$	3	↘	‖	↗	3
		$-\infty$		$-\infty$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{1}{x}) \quad (\frac{1}{x}\to 0)$

$= f(0) = 3$

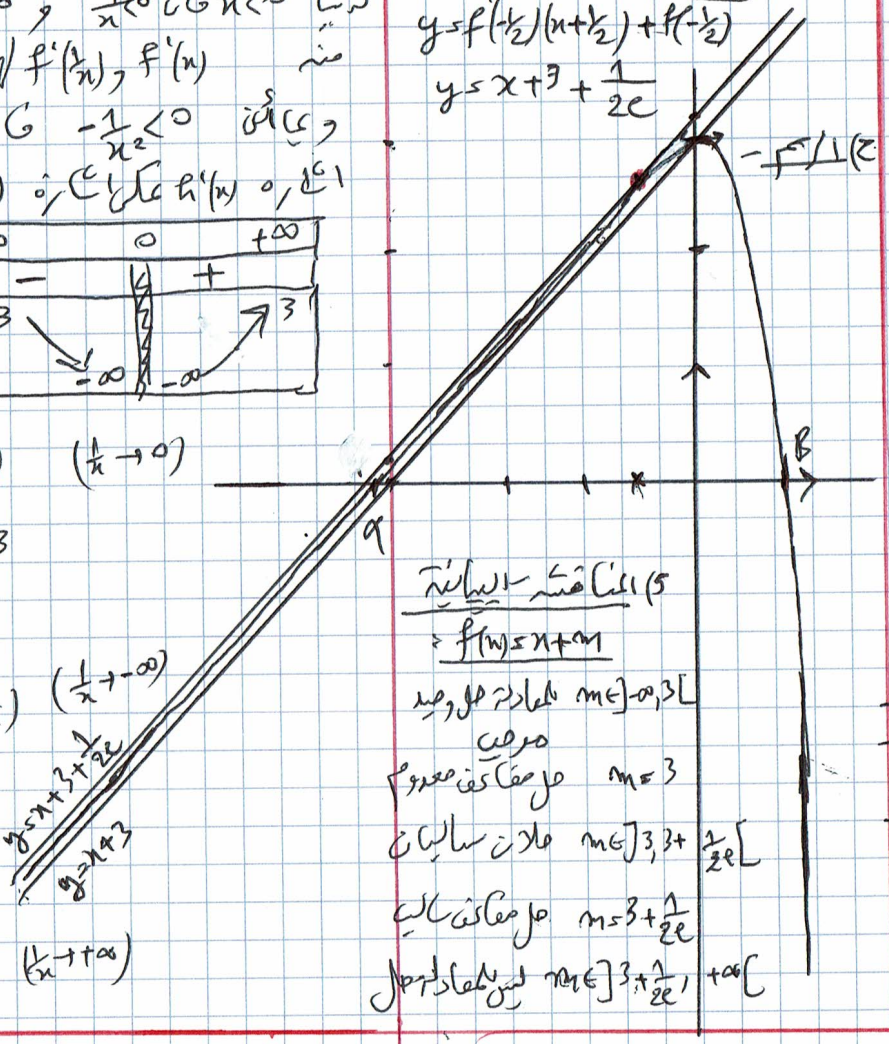
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) \quad (\frac{1}{x}\to-\infty)$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) \quad (\frac{1}{x}\to+\infty)$

$= -\infty$



$f(x) = 0$ يقبل حلا وحيدا α في $[0,75; 0,8]$

$f(0,8) \approx -0,16$ $\quad f(0,75) \approx 0,388$

$f(0,75) \times f(0,8) < 0$ لدينا

$f(\beta) = 0$ يقبل حلا وحيدا β في $]\alpha; 0,8[$ حيث $0,75 < \beta < 0,8$

ب) (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{1}{2}$:

$1-(1+2x)e^{2x} = 1$ إذا $g(x) = 1$ إذا $f'(x) = 1$

$1+2x = 0$ إذا $-(1+2x)e^{2x} = 0$ أي

$x = -\frac{1}{2}$

$y = f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2})$

$y = x+3+\frac{1}{2e}$

ج) أنشئ (T) و $(\mathcal{C}_f)$

د) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = x+m$

المعادلة تقبل حلا وحيدا إذا كان $m \in]-\infty; 3[$

المعادلة تقبل حلا مضاعفا إذا كان $m = 3$

المعادلة تقبل حلين متمايزين إذا كان $m \in]3; 3+\frac{1}{2e}[$

المعادلة تقبل حلا مضاعفا إذا كان $m = 3+\frac{1}{2e}$

المعادلة لا تقبل حلولا إذا كان $m \in]3+\frac{1}{2e}; +\infty[$

$[-1,+\infty[$ على g دراسة تغيرات

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	
$g(x)$	1	↗	$1+e^{-2}$	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$-$	

$g(0) = 0$ ③

$D = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x+3-xe^{2x}$ (II)

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+3-\frac{1}{2}(2xe^{2x}) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-e^{2x}\right) = -\infty$

② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+3) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}(2xe^{2x}) = 0$

$-\infty$ بجوار (Δ) مقارب مائل $(\mathcal{C}_f)$ و $(\Delta): y = x+3$

ب) الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ) :

$f(x)-(x+3) = -xe^{2x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	‖	$-$	
الوضعية	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)		A		$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)

$A(0;3)$ نقطة تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ و (Δ)

$f'(x) = 1-(e^{2x}+2xe^{2x})$: $\mathbb{R}$ على f' حساب

$= 1-(1+2x)e^{2x} = g(x)$

$g(x)$ و $f'(x)$ من نفس الإشارة

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

f متزايدة تماما على $]-\infty; 0]$

f متناقصة تماما على $[0; +\infty[$

④ $f(-3,05) \approx -3$ $\quad f(-3) \approx 0,0074$ $\quad f(-3,05) \approx -0,043$

$f(-3,05) \times f(-3) < 0$ لدينا

$-3,05 < \alpha < -3$ حيث $f(\alpha) = 0$ أي

$d = PGCD(a;b) = 5$ يعني $a \times b = 5m$

a' و b' عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما

$PGCD(a';b') = 1$ ، $b = 5b'$ $\quad a = 5a'$

$m = \frac{a \times b}{d} = a'b'd$ لدينا

حيث $3m+7d = 2^n-48$

أي $3a'b'd+7d = 2^n-48$

أي $3(5a'b')+7(5) = 2^n-48$

أي $3(5a'b')+7(5)+48 = 2^n$

$2^n = 5[3a'b'+7+9]+3$

$2^n \equiv 5[3a'b'+16]+3$

بما أن ① فإن $2^n \equiv 3[5]$ أي

$n = 4k+3$

$7 < 4k+3 < 15$ حيث $7 < n < 15$ ⑤

$n = 11$ أي $k = 2$ أي $1 < k < 3$ أي

$2^{11} = 5[3a'b'+16]+3$ أي

$2045 \equiv 5[3a'b'+16]$ أي

$a'b' = 133$ ، $a'b' = 7 \times 19$ أي

$(a';b') = (7;19)$ أو $(19;7)$

$(a;b) \in \{(5;665);(665;5)\}$ ومنه

التمرين ③ : ⑦

$D = \mathbb{R}$ $\quad g(x) = 1-(1+2x)e^{2x}$ (I

① $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-e^{2x}-2xe^{2x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$g'(x) = -[2e^{2x}+2e^{2x}(2x+1)]$

$= (-4x-4)e^{2x}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-4x-4$		$+$	‖	$-$	

g متزايدة تماما على $]-\infty; -1]$