**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة الـــدفـــاع الوطـــــني** — **السنة الدراسية : 2020 - 2021**

**أركان الجيش الوطني الشعبي** — **البكـــالوريـــا التجريـــــبـــي**

**دائرة الإستعمال و التحضيـــر** — **المـــــدة : 03 ساعات و نصف**

**مديرية مدارس أشبال الأمـــة**

---

**الشعبة: علوم تجريبية** — **إختبار مادة الرياضيات** — **دورة 2021**

---

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول:(05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط : $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = iz_A$ و $z_C = \overline{z_A}$ ( $\overline{z_A}$ هو مرافق $z_A$ ) .

1) أكتب كلا من $z_A$ و $z_B$ على الشكل الجبري .

2) أ – حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $(E)$..... $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ .

ب – إستنتج أن النقطة $A$ هي صورة $B$ بواسطة تحاك $h$ مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $z_\Omega$

( حيث : $z_\Omega$ هي حل المعادلة $(E)$ ) يطلب تعين نسبته ، ثم أكتب عبارته المركبة .

3) أ – جـــد المركز و نصف القطر للدائرة $(C)$ المحيطة بالمثلث $ABC$ .

ب – بين أن النقطة $H$ ذات اللاحقة $z_H = -1+3i$ هي مركز الدائرة $(C')$ صورة $(C)$ بالتحاكي $h$ ، ثم عين معادلة ديكارتية للدائرة $(C')$ .

4) عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا .

5) أ – عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $z = z_C - k\left(\frac{z_A}{z_C}\right)$ مع $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$ .

ب – عين $(\Gamma')$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\arg\left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^2\right] = \pi + 2k\pi$ مع $(k \in \mathbb{Z})$ .

### التمرين الثاني:(04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

1) نسحب من الكيس ثلاث كرات في آن واحد :

أحسب إحتمال كل حادثة من الأحداث التالية :

$A$ : "الكرات المسحوبة كلها حمراء" ، $B$ : "توجد كرة واحدة حمراء في السحب"

$C$ : "توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب" ، $D$ : "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة مثنى مثنى" .

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها $n$ كرة خضراء حيث : $(n \geq 2)$ ، ثم نسحب كرتين منه على التوالي و بدون إرجاع .

- نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي $(-10)$ نقطة و سحب كرة خضراء يساوي $(+5)$ نقطة .
- ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها :

أ – أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي $X$ ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$ .

ب – عين قيمة $n$ حتى تكون اللعبة عادلة .

ج – كيف نختار عدد الكرات الخضراء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ .

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{4}{u_n + 3} \end{cases}$ .

1) عين قيم $u_0$ حتى تكون المتتالية $(u_n)$ ثابتة .

2) فيما يلي نضع : $u_0 = 0$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $0 \le u_n < 1$ .

ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة و أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $0 < 1 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{3}(1 - u_n)$ .

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $0 < 1 - u_n \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ .

ج- إستنتج نهاية المتتالية $(u_n)$ من جديد .

4) لتكن $(v_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .

أ- بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- عبر عن $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

ج – أحسب بدلالة $n$ المجموعين $T_n$ و $T'_n$ حيث :

$T_n = \dfrac{1}{u_0 + 2} + \dfrac{1}{u_1 + 2} + ..... + \dfrac{1}{u_n + 2}$ و $\ln(T'_n) = v_0 + v_1 + ..... + v_n$ .

## التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 + (x-2)e^{-x+2}$ .

1) أدرس إتجاه تغير الدالة $g$ و شكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$ .

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ الحقيقية .

II) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$ ، $(C_f)$ هو المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$ .

1) أ – أحسب كلا من : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

ب – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإن : $f'(x)=g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

ج – بين أن : $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2}{\alpha-2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

2) أ – أثبت أن المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته $y=2x-1$ .

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

ج – بين أن المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يطلب تحديد معادلة له .

د – أحسب كلا من : $f(0)$ و $f(2)$ ، ثم أنشئ : $(\Delta)$ ، $(T)$ و المنحني $(C_f)$ .

3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتى تقبل المعادلة : $2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$ حلين متمايزين .

III) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $h(x)=(x-1)e^{-x+1}$ .

1) باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية $H$ للدالة $h$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0 .

2) ليكن $\lambda$ عددا حقيقيا حيث : $\lambda>1$ ، $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=\lambda$ و $x=1$ .

– أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة $\lambda$ ، ثم أحسب : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ .

**إنتهى الموضوع الأول**

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول:(04 نقاط)

يحتوي صندوق $U_1$ على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين (لا نفرق بينها عند اللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) احسب احتمالات الأحداث التالية :

$A$ : " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء ".

$B$ : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون ".

$C$ : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل " .

2) أ- ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها.

- عين قيم المتغير العشوائي $X$ .
- بين أن: $P(X=3)=\frac{24}{84}$ ثم استنتج $P(X=2)$ وعين قانون احتمال $X$ .

ب -نقترح اللعبة التالية: يدفع اللاعب مبلغ $50DA$ قبل اجراء السحب. ويكسب $25DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .

- هل اللعبة مربحة له ؟ .

## التمرين الثاني:(04 نقاط)

I) $f$ الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $f(x)=x-\ln(x+1)$ .

1) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $]-1;+\infty[$.

2) استنتج أنه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ فإن: $\ln(x+1)\le x$ .

II) نضع : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n-\ln(1+u_n) \end{cases}$.(من أجل كل عدد طبيعي $n$).

1) احسب $u_1$ ، $u_2$.

2) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n\ge 0$ .

3) أ - أثبت أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة واستنتج أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ فإن: $u_n\le 1$.

ب - استنتج أن المتتالية $(u_n)$متقاربة وأحسب نهايتها .

## التمرين الثالث:(05 نقاط)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $(C)$ كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z)=z^3-8$.

1) تحقق أن : $(z-2)(z^2+2z+4)=z^3-8$.

2) استنتج كل حلول المعادلة : $z^3-8=0$ ..

II) نعتبر في المستوي المركب $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ذات اللواحق : $z_A=-1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2$ على الترتيب .

1) اكتب $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ على الشكل الأسي.

2) استنتج أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة .(يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها).

3) بين أن: $z_A^{2017}=2^{2016}.z_A$ ، ثم استنتج ما يلي : $\left(z_A{}^{2017}+z_B{}^{2017}+z_C{}^{2017}\right)$.

4) اكتب العدد المركب $L=\dfrac{z_B-z_A}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ثم الأسي .

5) أ – اعط تفسيرا هندسيا لطويلته وعمدته .

ب – استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

## التمرين الرابع:(07 نقاط)

I) $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـالعبارة : $h(x)=e^x-x+2$ .

1) ادرس تغيرات الدالة $h$ .

2) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $e^x-x-1\geq 0$ .

II) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=e^{-x}(x-1)+x+1$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن : $f'(x)=e^{-x}.h(x)$ .

2) ادرس تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

4) أثبت أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$. عين معادلة له.

5) ادرس الوضع النسبي لـــ $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$.

6) برهن أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها.

III) ليكن $(T_a)$ مستقيم معادلته: $y=x+a$ حيث: $a\in\mathbb{R}$ .

1) عين $a$ حتى يكون $(T_a)$ مماسا لـــ $(C_f)$ في نقطة يطلب تعيين احداثييها .

2) احسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ثم أنشئ كلا من $(\Delta)$ ، $(T_a)$ و $(C_f)$.

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^x-x+1=0$.

**إنتهى الموضوع الثاني**