

موضوع تجريبي للتدرب رقم 02 مع الحل المفصل

التمرين الأول (المتتاليات العددية) : * 05 نقاط *

في الشكل أدناه المنحني (C_f) يمثل الدالة f المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.
والمستقيم (d) ذا المعادلة $y = x$.

(1) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) والمستقيم (d) .
(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]-1; +\infty[$ ، ثم بين أنه إذا كان : $x \in [1; 2]$ فإن : $f(x) \in [1; 2]$.

(3) نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ- باستعمال (C_f) و (d) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2 و u_3 مظهرا خطوط الإنشاء ، ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 < u_n < 2$.

ج- ادرس رتبة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \frac{3}{2}$ وأن المتتالية (u_n) متقاربة .

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^n$.

ج- أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة الحد العام (u_n) بدلالة n وحدد نهايتها من جديد .

(6) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$.

- عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني (الإحتمالات) : * 04 نقاط *

يحتوي كيس غير شفاف على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام : 0 ، 0 ، 1 ، 2 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 .

(كل الكريات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع .
- نعتبر الأحداث التالية :

A : "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" .

B : "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم" .

C : "الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام المسجلة عليها غير معدوم" .

- 1) أحسب الإحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$ و $P(C)$.
 2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تجربة جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .
 أ- حدد قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .
 ب- أحسب الإحتمال : $P(e^{X^2-X} > 1)$.

التمرين الثالث (الأعداد المركبة) : * 05 نقاط *

- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 18) = 0$.
 2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقاط : A ، B ، C و D التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = 2i$ ، $z_B = -2i$ ، $z_C = 3 - 3i$ و $z_D = 3 + 3i$.
 أ- ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ أحسب مساحته .
 ب- بين أن النقاط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω يطلب تعيين إحداثياتها .
 3) أ- أكتب العدد z_D على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب α إذا علمت أن :

$$\alpha \times z_D = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

 ب- أعط الشكل الجبري للعدد المركب α ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.
 ج- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد α^n تخيليا صرفا .
 د- بين أن العدد $(\sqrt{2}\alpha)^{1440}$ حقيقي .
 4) أ- نعتبر (Π) هي مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z^2 + 4) = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $(k \in \mathbb{Z})$
 - عين طبيعة المجموعة (Π) .
 ب- لتكن (C) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة z حيث : $|z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$.
 - تحقق أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة (C) ، ثم حدد طبيعة هذه الأخيرة .

التمرين الرابع (الدوال اللوغاريتمية) : * 06 نقاط *

- I) الدالة g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.
 1) احسب نهاية الدالة g عند 0 وعند $+\infty$ ، ثم فسر بيانيا النهاية عند 0 .
 2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
 3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$.
 ب- تحقق أن : $1,83 < \alpha < 1,84$.
 4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
 II) الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ ، (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 1) احسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتائج بيانيا .
 2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.
 ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ المماس (T) ومثل المنحنى (C) .

5) نعتبر المستقيمات (d_m) المعرفة بالمعادلة $y = m^2x - 1$ حيث : m وسيط حقيقي .

أ- بين أن جميع المستقيمات (d_m) تمر بنقطة ثابتة يطلب تحديد إحداثياتها .

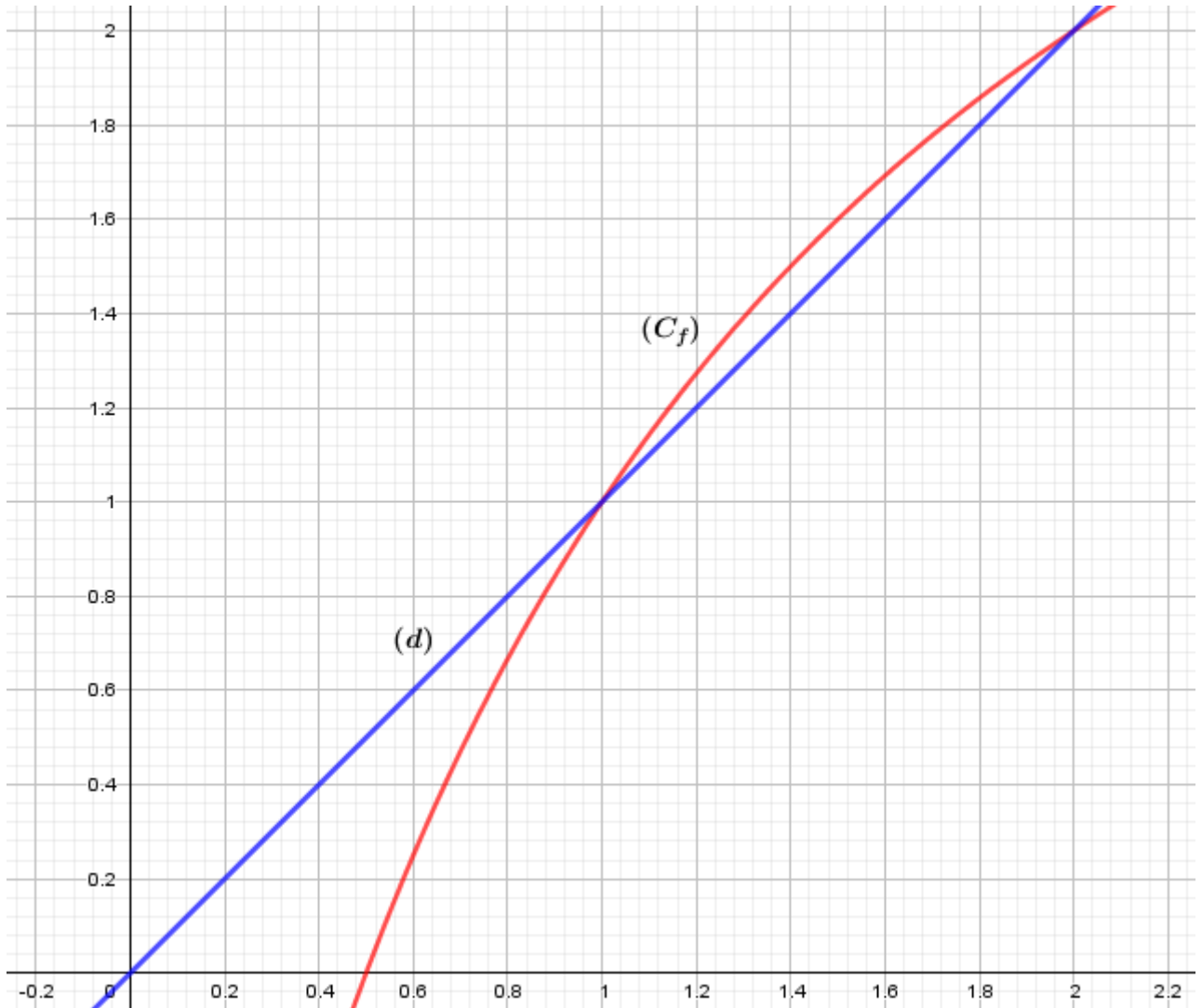
ب- ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x) = m^2x - 1$.

6) الدالة h معرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي : $h(x) = \frac{2\ln|x|}{x^2 + |x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني .

أ- بين أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C) بواسطة تحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه .

ب- مثل (C_h) في نفس المعلم السابق .

(الوثيقة المرفقة بالتمارين الأول) :



إنتهى _____ ك . أ : بلقاسم عبدالرزاق

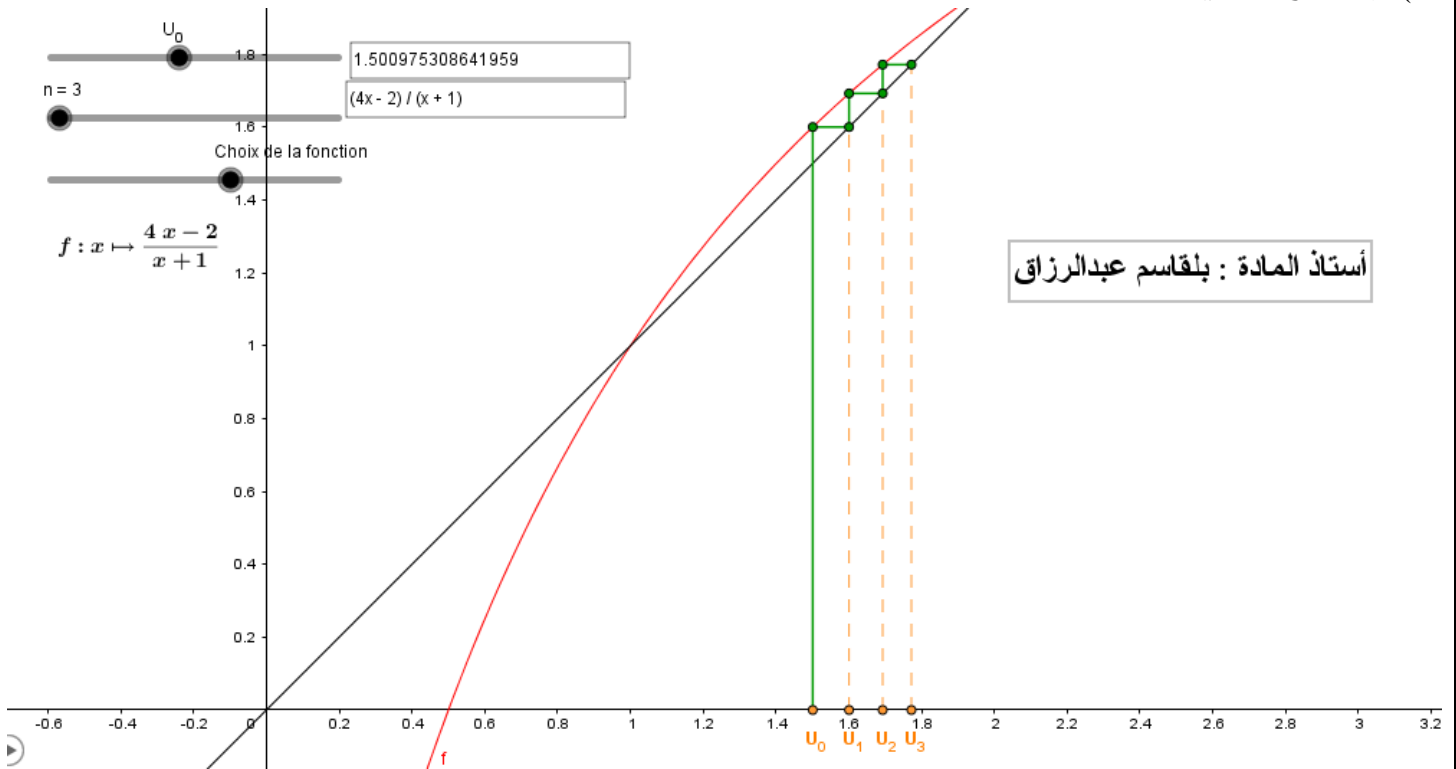
حل مقترح للتمرين الأول (المتتاليات العددية) :

1) نحل المعادلة $f(x) = x$ أي : $\frac{4x-2}{x+1} = x$ أي نجد : $x^2 - 3x + 2 = 0$ ، لدينا مجموع المعاملات يساوي 0 ومنه :
 $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ ، إذن : $(C_f) \cap (d) = \{(1;1), (2;2)\}$.

2) لدينا من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ أي : $f'(x) > 0$ ، إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$.

لدينا : $x \in [1, 2]$ أي : $1 < x < 2$ ، بما أن الدالة f متزايدة على $]-1; +\infty[$ فإن : $f(1) < f(x) < f(2)$ أي نجد :
 $1 < f(x) < 2$ وبالتالي : $f(x) \in [1, 2]$.

3) لدينا : $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
 أ) الإنشاء والتخمين :



- نلاحظ أن : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متزايدة .

كما نلاحظ أن الحدود تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (d) أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متقاربة .

ب) نستعمل البرهان بالتراجع لنبين الخاصية : $1 < u_n < 2$ $P(n)$.

- نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ أي لدينا : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $1 < \frac{3}{2} < 2$ ومنه : $1 < u_0 < 2$ (محققة) .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $1 < u_n < 2$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $1 < u_{n+1} < 2$.

لدينا فرضاً أن : $1 < u_n < 2$ وحسب الجواب (2) : بما أن : $u_n \in]1, 2[$ فإن : $f(u_n) \in]1, 2[$ أي : $1 < f(u_n) < 2$.

ومنه : $1 < u_{n+1} < 2$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 < u_n < 2$.

ج) أولاً نحسب $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1}$$

و $u_n + 1 > 0$ ومنه : يكون : $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

- بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$ و $u_0 = \frac{3}{2}$ فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $u_n \geq \frac{3}{2}$.

- بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

4) أ) لنبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

$$\text{نحسب أولا } 2 - u_{n+1} : 2 - u_{n+1} = 2 - \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 2 - 4u_n + 2}{u_n + 1} = \frac{-2u_n + 4}{u_n + 1}$$

لدينا : $1 < u_n < 2$ ومنه : $0 < -2u_n + 4 < 2$ إذن يمكن كتابة : $2 - u_{n+1} = (-2u_n + 4) \times \frac{1}{u_n + 1}$.

$$\text{نعلم أن : } u_n \geq \frac{3}{2} \text{ أي : } u_n + 1 \geq \frac{5}{2} \text{ أي : } \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{2}{5} \text{ أي : } (-2u_n + 4) \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{2}{5}(-2u_n + 4) : \frac{-2u_n + 4}{u_n + 1} \leq \frac{2}{5} \times 2(-u_n + 2)$$

$$\text{ومنه : } \frac{-2u_n + 4}{u_n + 1} \leq \frac{4}{5}(-u_n + 2) \text{ ، إذن : } \boxed{2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)} \text{ هو المطلوب .}$$

ب) لنبرهن بالتراجع عن الخاصية : $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ $P(n)$.

- لنتحقق صحة الخاصية من أجل $n = 0$ أي : $2 - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$ أي : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ومنه : $2 - u_0 \leq \frac{1}{2}$ (محققة) .

- نفرض صحة الخاصية من أجل n كيفي أي : $2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ونبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي : $2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$$\text{لدينا من جهة أن : } 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ أي : } \frac{4}{5}(2 - u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{4}{5} \text{ ومنه : } \frac{4}{5}(2 - u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{ومن جهة أخرى لدينا : } 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n) \text{ ، إذن : من هذا وذاك نجد : } 2 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن : } \boxed{2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

$$\text{ج) لدينا : } 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ ونعلم أن : } 2 - u_n > 0 \text{ وبالتالي : } 0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \text{ ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - u_n) = 0 \text{ وهذا يدل على أن : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

$$5) \text{ من أجل كل } n \in \mathbb{N} \text{ لدينا : } v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

$$\text{أ- لدينا : } v_{n+1} = \frac{2}{3} \times v_n \text{ أي : } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{2u_n - 4}{u_n + 1}}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 1}} = \frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2}{3} \left(\frac{u_n - 2}{u_n - 1} \right)$$

$$\text{ومن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ وحدها الأول } v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = -1$$

$$\text{ب- نجد : } \boxed{v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n} \text{ ولدينا : } v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \text{ أي : } v_n \cdot u_n - v_n = u_n - 2 \text{ أي : } v_n \cdot u_n - u_n = v_n - 2 \text{ أي : } u_n(v_n - 1) = v_n - 2$$

$$\text{ومنه نجد : } u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \text{ ، إذن : } \boxed{u_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}} \text{ ، أي : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2} \text{ لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\begin{aligned}
 (6) \text{ لدينا : } S_n &= \frac{1}{u_0-1} + \frac{1}{u_1-1} + \dots + \frac{1}{u_n-1} \\
 S_n &= -(v_0-1) - (v_1-1) + \dots - (v_n-1) : \text{ أي } , \frac{1}{u_n-1} = -(v_n-1) : \text{ أي } u_n-1 = \frac{-1}{v_n-1} \\
 S_n &= -[(v_0+v_1+\dots+v_n)+(-1-1-\dots-1)] : \text{ أي } S_n = -[(v_0-1)+(v_1-1)+\dots+(v_n-1)] \\
 \text{ومنه : } S_n &= -\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} - 1(n+1) \right] : \text{ أي } S_n = 3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + (n+1) \\
 \text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1 : \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 1
 \end{aligned}$$

حل مقترح للتمرين الثاني (الإحتمالات) :

1) حساب إحتمال الأحداث :

$$\text{الحدث } A : (V,V,V) \text{ أو } (R,R,R) : \text{ أي } P(A) = \frac{A_4^3 + A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{2 \times 24}{720} = \frac{48}{720} : \text{ ومنه } P(A) = \frac{1}{15}$$

$$\text{الحدث } B : (1,1,1) \text{ أو } (2,2,2) : \text{ أي } P(B) = \frac{A_5^3 + A_3^3}{A_{10}^3} = \frac{60+6}{720} = \frac{66}{720} : \text{ ومنه } P(B) = \frac{11}{120}$$

$$\text{الحدث } A \cap B : (V_1, V_1, V_1) : \text{ أي } P(A \cap B) = \frac{A_3^3}{A_{10}^3} = \frac{6}{720} : \text{ ومنه } P(A \cap B) = \frac{1}{120}$$

بما أن الحدثين A و B كيفيين فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{أي نجد : } P(A \cup B) = \frac{1}{15} + \frac{11}{120} - \frac{1}{120} = \frac{18}{120} : \text{ ومنه } P(A \cup B) = \frac{3}{20}$$

الحدث C : هنا كأننا نجزء الكريات الموجودة في الكيس لكريات تحمل رقم معدوم وأخرى لا تحمل رقم معدوم .

$$\text{أي : } P(C) = \frac{A_8^3}{A_{10}^3} = \frac{336}{720} : \text{ ومنه } P(C) = \frac{7}{15}$$

2) أ- لدينا : X يعبر عن جداء الأرقام الظاهرة في السحب .

ومنه قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 4 ، 8 .

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X يكون كما يلي :

$$P(X=0) = 1 - P(C) = 1 - \frac{336}{720} = \frac{384}{720} \text{ أو } P(X=0) = \frac{3(A_2^1 \times A_8^2) + 3(A_2^2 \times A_8^1)}{720} = \frac{336+48}{720} = \frac{384}{720}$$

$$P(X=2) = \frac{3(A_5^2 \times A_3^1)}{720} = \frac{3 \times 60}{720} = \frac{180}{720} , P(X=1) = \frac{A_5^3}{720} = \frac{60}{720}$$

$$P(X=8) = \frac{A_3^3}{720} = \frac{6}{720} , P(X=4) = \frac{3(A_3^2 \times A_5^1)}{720} = \frac{3 \times 30}{720} = \frac{90}{720}$$

x_i	0	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{384}{720}$	$\frac{60}{720}$	$\frac{180}{720}$	$\frac{90}{720}$	$\frac{6}{720}$

ب- لدينا : $e^{X^2-X} > 1$ تكافئ : $X^2 - X > 0$ ومنه : $X(X-1) > 0$

بعد دراسة الإشارة نجد أنه يكون : $X(X-1) > 0$: $X > 1$.

إذن : $P(e^{x^2-x} > 1) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=8)$ أي : $P(e^{x^2-x} > 1) = \frac{180}{720} + \frac{90}{720} + \frac{6}{720} = \frac{276}{720}$

ومنه نجد : $P(e^{x^2-x} > 1) = \frac{23}{60}$

حل مقترح للتمرين الثالث (الأعداد المركبة) :

1) حل المعادلة :

لدينا : $(z^2 + 4)(z^2 - 6z + 18) = 0$ تكافئ : $z^2 + 4 = 0$ أو $z^2 - 6z + 18 = 0$.

ومنه : $z^2 + 4 = 0$ أو $\Delta = -36 = (6i)^2$ أي : $z^2 = -4$ ومنه : $\begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -2i \end{cases}$ أو $\begin{cases} z_3 = 3-3i \\ z_4 = 3+3i \end{cases}$.

إذن : $S = \{-2i, 2i, 3-3i, 3+3i\}$.

2) أ- بما أن النقطتان A و B متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل وأيضا النقطتان C و D متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل (لديه ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيان) ، أيضا ولدينا أيضا : $AD = BC$ بالتالي : الرباعي ABCD شبه منحرف متقايس الضلعين .

- بالنسبة لمساحة شبه المنحرف نطبق القانون باستعمال الأعداد المركبة ونجد مساحته ببساطة .

ب- بما أن للقطعتين [AB] و [CD] نفس المحور والذي هو حامل محور الفواصل (xx') فهذا يدل على أن الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C و D مركزها سيكون ينتمي لحامل محور الفواصل ، إذن : $\omega(x, 0)$.

لكن نعلم أن : $\omega A = \omega D$ أي : $|z_A - z_\omega| = |z_D - z_\omega|$ أي : $|2i - x| = |3+3i - x|$ أي : $|-x+2i| = |3-x+3i|$

ومنه : $\sqrt{(-x)^2 + 2^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 3^2}$ أي : $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$ أي : $x^2 + 4 = x^2 - 6x + 18$ أي : $6x = 14$ أي : $x = \frac{7}{3}$ ومنه : $\omega\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

إذن : النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $\omega\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

3) أ- لدينا : $z_D = 3+3i$ أي : $|z_D| = 3\sqrt{2}$ و $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ إذن : $\arg(z_D) = \theta$ ومنه : $\arg(z_D) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

إذن : $z_D = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $\alpha \times z_D = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ أي : $\alpha \times 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه : $\alpha = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ أي : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

أي : $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ إذن : $|\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$.

ب- لدينا : $\alpha = \frac{3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}{z_D} = \frac{3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3+3i} = \frac{3+3\sqrt{3}i}{3+3i}$.

أي : $\alpha = \frac{3+3\sqrt{3}i}{6+6i} = \frac{(3+3\sqrt{3}i)(6-6i)}{72} = \frac{18-18i+18\sqrt{3}i+18\sqrt{3}}{72} = \frac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i}{4}$.

- بالمطابقة بين الشكل الأسّي والشكل الجبري للعدد α نجد :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ج- العدد α^n تخيلي صرف معناه : $\arg(\alpha^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي : $n \cdot \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أي : $\frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi$: $\frac{n}{12} = \frac{1}{2} + k$ بضرب الطرفين في 12 نجد : $n = 12k + 6$ مع $(k \in \mathbb{N})$.

د- لدينا : $1 = e^{i120\pi} = e^{i\frac{1440\pi}{12}} = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440} = \left(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440} = \left(\sqrt{2}\alpha\right)^{1440}$ ومنه : العدد $(\sqrt{2}\alpha)^{1440}$ حقيقي.

4) أ- لدينا : $\arg(z^2 + 4) = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي : $\arg[(z - 2i)(z + 2i)] = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

لأن : $z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2$ ، أي : $\arg(z - 2i) + \arg(z + 2i) = \arg(z + 2i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ وبالتالي نجد :

$\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ أي : $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي : $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن : المجموعة (Π) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A ويشكل زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .

ب- لدينا : $(C) : |z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$

- النقطة $O \in (C)$ معناه : $|z_O - z_C|^2 + |z_O - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$ أي : $|z_C|^2 + |z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$

ومنه : $|z_C|^2 + |z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$ أي : $(\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2 = (\sqrt{36})^2$ أي : $36 = 36$ (محقة)

إذن : النقطة $O \in (C)$

لدينا : $(C) : |z - z_C|^2 + |z - z_D|^2 = |z_D - z_C|^2$ أي تصبح : $CM^2 + DM^2 = CD^2$ (C)

فكرة مهمة:

العلاقة : $CM^2 + DM^2 = CD^2$ تدل على أن النقطة M ممكن أن تنطبق على C أو على D .
أو تدل على أن المثلث MCD قائم في M وفي الحالتين النقطة M تكون في الدائرة ذات القطر $[CD]$.

إذن : المجموعة (C) هي الدائرة ذات القطر $[CD]$.

ملاحظة: يمكن استخدام الشكل الجبري $(z = x + iy)$ للوصول إلى المعادلة الديكارتية للدائرة (C) .

حل مقترح للتمرين الرابع (الدالة اللوغاريتمية) :

الجزء الأول : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1) حساب النهايات :

(*) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{2x+1} - \ln x \right) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x+1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty$

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} - \ln x \right) = -\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty$

(*) التفسير البياني للنهاية عند 0 : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحني (C_g) .

(2) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ تكون $g'(x) < 0$ إذن : الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$.

(*) جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) أ (*) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]0; +\infty[$ صورة هذا الأخير هي المجال $]-\infty; +\infty[$ و بما أن :

$0 \in]-\infty; +\infty[$ فإن : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$.

ب) لدينا : $\begin{cases} g(1,83) = 0,002 \\ g(1,84) = -0,002 \end{cases}$ أي : $g(1,84) < 0 < g(1,83)$ و منه : $1,83 < \alpha < 1,84$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(4) إشارة $g(x)$:

الجزء الثاني : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$.

(1) حساب النهايات :

(*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \ln x}{x^2 + x} \right) = -\infty$ لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \ln x) = -\infty$.

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{x^2 + x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln x}{x(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \cdot \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x+1} \right) = 0$ لأن : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{cases}$.

(*) التفسير البياني :

- المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحني (C) .

- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

(2) أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x}(x^2 + x) + (2x+1) \cdot \ln x}{(x^2 + x)^2}$.

أي : $f'(x) = 2 \cdot \frac{(x+1) - (2x+1) \cdot \ln x}{(x^2 + x)^2}$ (نستخرج $(2x+1)$ عامل مشترك) تصبح :

$f'(x) = 2(2x+1) \cdot \frac{\frac{x+1}{2x+1} - \ln x}{(x^2 + x)^2}$ و منه نجد : $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2 + x)^2} \times g(x)$ هو المطلوب .

ب) نعلم أنه على المجال $]0; +\infty[$ يكون : $\frac{2(2x+1)}{(x^2 + x)^2} > 0$ إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

و بالتالي : لما $x \in]-\infty; \alpha]$ تكون : $g(x) \geq 0$ أي : $f'(x) \geq 0$ إذن : الدالة f متزايدة على $]-\infty; \alpha]$.

و لما $x \in]\alpha; +\infty[$ تكون : $g(x) < 0$ أي : $f'(x) < 0$ إذن : الدالة f متناقصة على $]\alpha; +\infty[$.

(ج) نعلم أن : $g(\alpha) = 0$ أي : $\frac{\alpha+1}{2\alpha+1} - \ln \alpha = 0$ و منه : $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$.

(*) لنحسب $f(\alpha)$ نجد : $f(\alpha) = \frac{2 \ln \alpha}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{2 \times \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}{\alpha^2 + \alpha} = 2 \times \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha^2 + \alpha} = 2 \times \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$

و منه نتحصل على : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ هو المطلوب .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(*) جدول التغيرات :

(د) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $1,83 < \alpha < 1,84$ أي : $4,66 < 2\alpha+1 < 4,68$ أي : $\frac{1}{4,68} < \frac{1}{2\alpha+1} < \frac{1}{4,66}$ و منه نجد :

(1) $0,213 < \frac{1}{2\alpha+1} < 0,214...$ و لدينا : $1,83 < \alpha < 1,84$ أي : $\frac{1}{1,84} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1,83}$ و منه :

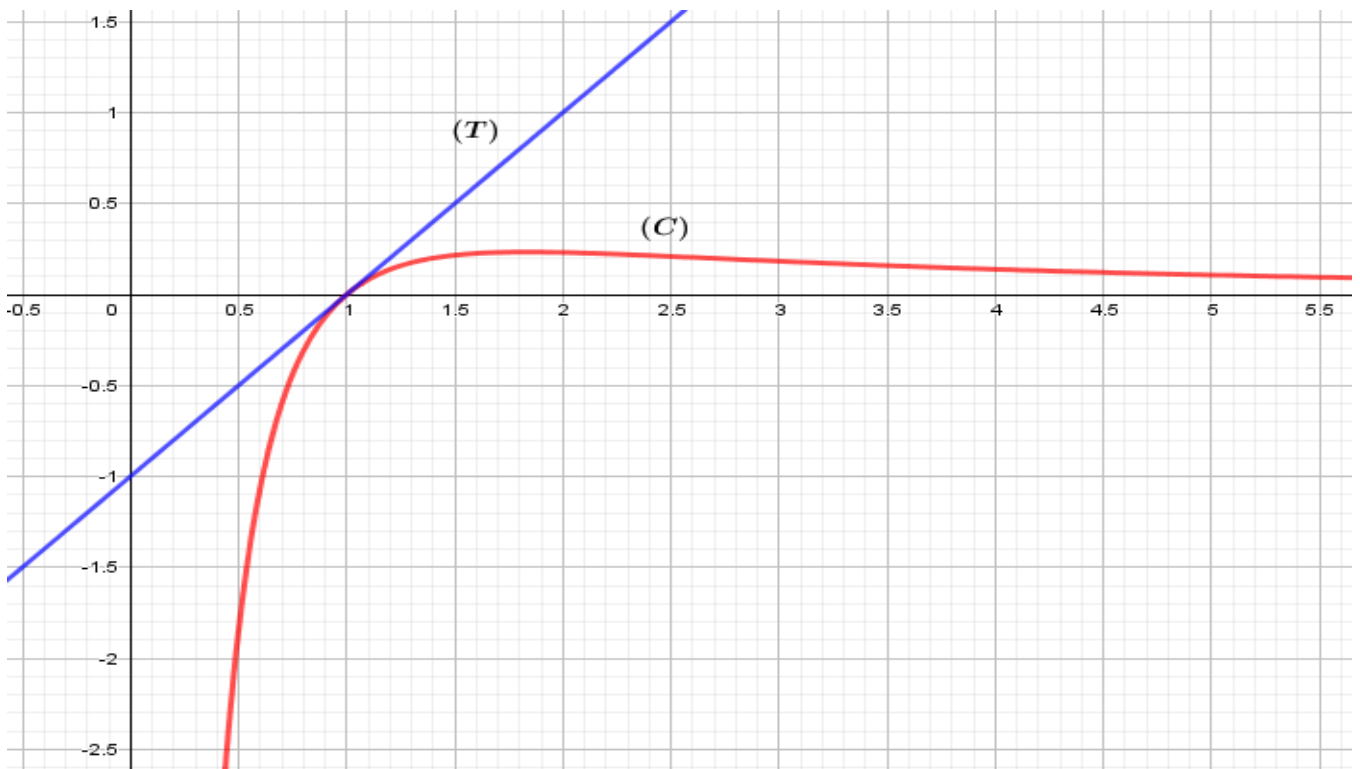
(2) $0,543 < \frac{1}{\alpha} < 0,546...$ بضرب (1) في (2) نجد : $0,115 < \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)} < 0,116$

أي : $0,230 < \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)} < 0,232$ إذن : $0,230 < f(\alpha) < 0,232$.

(3) كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي : $(T): y = (x-1) + 0$ و منه : $(T): y = x-1$.

(4) الإنشاء :



(5) أ) لدينا : $y = m^2x - 1$: (d_m) .

- إذا كان : $x = 0$ فإن : $y = -1$ و النقطة $A(0, -1)$ تنتمي إلى جميع المستقيمات (d_m) .
- ب) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = m^2x - 1$. (ملاحظة : $m^2 \geq 0$) .
- (*) في حالة $m^2 = 0$ أي : $m = 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .
- (*) في حالة $0 < m^2 < 1$ أي : $-1 < m < 1$ المعادلة تقبل حلين متميزين .
- (*) في حالة $m^2 = 1$ أي : $m = 1$ أو $m = -1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو 1 .
- (*) في حالة $m^2 > 1$ أي : $m > 1$ أو $m < -1$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .

(6) أ) لدينا : $h(x) = \frac{2\ln|x|}{x^2 + |x|}$.

- بما أن : $x \in]-\infty, 0[$ فإن : $|x| = -x$ و منه : $h(x) = \frac{2\ln(-x)}{x^2 - x}$ أي : $h(x) = f(-x)$.
- إذن : (C_h) نظير (C) بالنسبة إلى حامل محور الترتيب .
- أي : (C_h) هو صورة (C) بواسطة التناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب .

ب) الإنشاء :

