الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2021

شعبة: العلوم التجريبية — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n + 1}$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;3]$ بـ: $f(x) = 4 - \dfrac{4}{x+1}$ و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le 3$.
   ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.
3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le 3 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(3 - u_n)$.
   ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le 3 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (3 - u_0)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على خمس كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء و كريتين خضراوين. نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع و نعتبر الحادثتين A و B حيث A: سحب كريتين من نفس اللون و B: سحب كرية بيضاء على الأقل.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.
2. أحسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(A \cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.
   - ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثالث: 05 نقاط

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $\left(z - \sqrt{3}\right)\left(z^2 - \sqrt{3}z + 1\right) = 0$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_C=\overline{z_B}$ و $z_D=\sqrt{3}$.

1. بين أن النقطة A صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$ ثم استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
2. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.ثم بين أن $\left(\dfrac{z_A}{2}\right)^{2021}\times\left(z_B\right)^{1441}\times\left(z_C\right)^{1962}=1$.
3. ليكن f التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M\left(z\right)$ إلى النقطة $M'\left(z'\right)$ حيث: $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-i$.

أ) عين طبيعة التحويل النقطي f محددا عناصره المميزة.

ب) بين أن النقطة B صورة النقطة D بالتحويل النقطي f ثم استنتج طبيعة كلا من المثلث BCD و الرباعي $ABCD$.

4. عين طبيعة المجموعة $\left(E\right)$ مجموعة النقط من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق

$Arg\left(z-z_B\right)=Arg\left(\overline{z}-z_C\right)+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g\left(x\right)=x-3+4\ln\left(x+1\right)$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ثم تحقق أن $0,74<\alpha<0,76$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g\left(x\right)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\dfrac{4\ln\left(x+1\right)}{x+1}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}f\left(x\right)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f'\left(x\right)=\dfrac{g\left(x\right)}{\left(x+1\right)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. أ) بين أن $f\left(\alpha\right)=-\dfrac{\left(\alpha-3\right)^2}{4\left(\alpha+1\right)}$.

ب) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(\alpha\right)}{x-\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)$ و $\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-h\left(x\right)\right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ و $\left(C_h\right)$.

4. أ) عين احداثيات نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع حاملي محوري الاحداثيات.

ب) أرسم $\left(C_f\right)$ ثم أرسم $\left(C'\right)$ التمثيل البياني للدالة $|f|$، نأخذ $f\left(\alpha\right)=-0,72$.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2 و ثلاث كريات سوداء مرقمة بـ: 1، 2، 3 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

1. أحسب احتمال كلا من الحوادث التالية:
   - ✓ A : سحب ثلاث كريات من نفس اللون.
   - ✓ B : سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها عدد فردي.
   - ✓ C : سحب ثلاث كريات جداء أرقامها عدد زوجي.
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
   - ➢ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني:04 نقاط

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}eu_n + \frac{2}{3}e^{n+1} \end{cases}$ و $v_n = u_n - e^n$.

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}e$ يطلب حساب حدها الأول.

   ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

   ج) أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

2. نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $w_n = \ln(u_n - v_n)$.
   أ) تحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n$.
   ب) بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   ج) ليكن المجموع S_n حيث $S_n = w_0^2 + w_1^2 + ... + w_n^2$.
   - ✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

التمرين الثالث:05 نقاط

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A = 2i$، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

1. أ) أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل المثلثي ثم استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

   ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_B^n حقيقي سالب تماما.

2. أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.

ب) استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. f التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = 2iz + 4 + 2i$.
   - ✓ بين أن f تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.
4. عين طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\left|\overline{z} - \sqrt{3} + i\right| = \left|iz + 2\right|$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = e^{2x} - 4x - 1$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والأخر α حيث $0,62 < \alpha < 0,64$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \left(2x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + x - 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

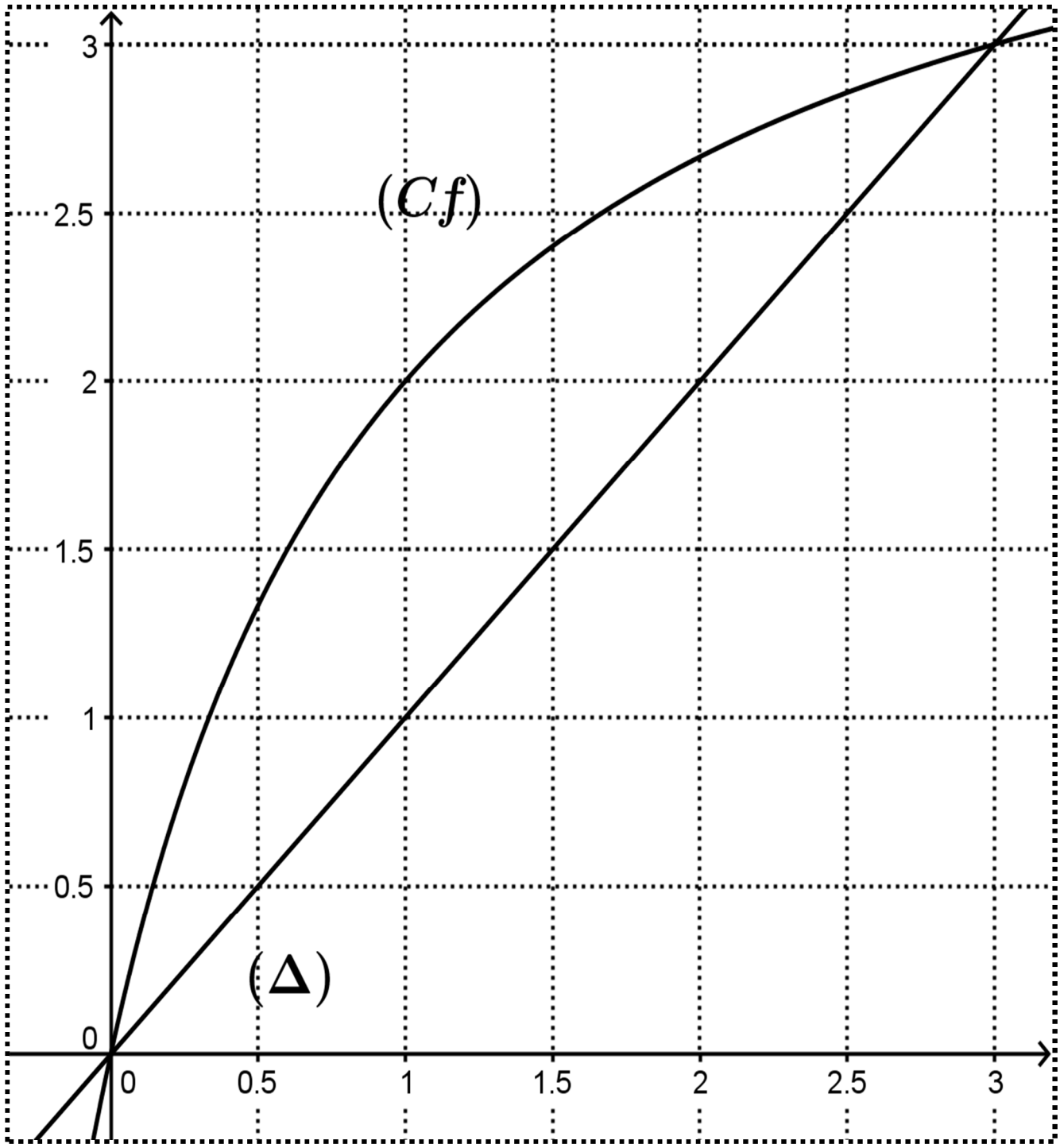
ب) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-2x} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. بين أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{4}; 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).
3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)
   ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
4. أ) أرسم كلا من (Δ)، (T) و (C_f). نقبل أن $\begin{cases} (C_f) \cap (xx') = \{(-0,5;0)\} \\ f(\alpha) = 0,4 \end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين في الإشارة.

انتهـــــــــى الموضـــــوع الثاني

الوثيقة المرفقة	
الاسم:	اللقب:



التصحيح النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية

الموضوع الأول

1) تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل: (0,18)

إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها: (0,25)

من البيان نلاحظ أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ وعليه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

ونلاحظ أيضا أن (u_n) متقاربة نهايتها تقاطع (cp) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ $(x = 3)$

2) f) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$ (0,75)

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $0 \leq u_n \leq 3$

لدينا $u_0 = 1$ ولما أن $0 \leq 1 \leq 3$ فإن $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $0 \leq u_n \leq 3$ ونبرهن أن $P(n+1)$ محققة أي نبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $4 \leq u_n + 4 \leq 7$ ومنه $\frac{1}{7} \leq \frac{4}{u_n+4} \leq \frac{1}{4}$

ومنه $-4 \leq \frac{-4}{u_n+4} \leq -\frac{4}{7}$ ومنه $0 \leq 4 - \frac{4}{u_n+4} \leq 3$

وبالتالي $0 \leq u_{n+1} \leq 3$ وعليه $P(n+1)$ محققة

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$ (0,75)

ب) تبيان أن (u_n) متزايدة تماما:

لدينا $u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{4}{u_n+4} - u_n = \frac{4u_n}{u_n+4} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+4}$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - u_n^2}{u_n+4} = \frac{u_n(3-u_n)}{u_n+4}$

لدينا $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $u_{n+1} > 0$ و $u_n \geq 0$ و $3 - u_n \geq 0$ وعليه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

3) أ) البيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{4}(u_n - 3)$

لدينا $u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n}{u_n + 1} - 3 = \frac{4u_n - 3u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

لدينا $0 \leq u_n \leq 3$ ومنه $u_n - 3 \leq 0$ و $u_n + 1 > 0$ وعليه $u_{n+1} - 3 \geq 0$ ①

(0,25) • استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من 2 على فهي متقاربة

(0,75) ج) إثبات أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-u_n)$

لدينا: $3-u_{n+1} = 3-\frac{4u_n}{u_n+1} = \frac{3u_n+3-4u_n}{u_n+1} = \frac{3-u_n}{u_n+1}$

لدينا حسب $1 \leq u_n \leq 3$ ومنه $u_n+1 > 0$ و $3-u_n \geq 0$ وعليه

$3-u_{n+1} \geq 0$ ——— (1)

لدينا $1 \leq u_n$ ومنه $u_n+1 \geq 2$ أي $\frac{1}{u_n+1} \leq \frac{1}{2}$ ومنه

$\frac{3-u_n}{u_n+1} \leq \frac{1}{2}(3-u_n)$ وبالتالي $3-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-u_n)$ ——— (2)

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-u_n)$

(0,5) ب) استنتاج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 3-u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (3-u_0)$

لدينا حسب

$0 \leq 3-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(3-u_n)$ — n

ومنه

$0 \leq 3-u_1 \leq \frac{1}{2}(3-u_0)$ — 1

$0 \leq 3-u_2 \leq \frac{1}{2}(3-u_1)$ — 2

⋮ ⋮

$0 \leq 3-u_n \leq \frac{1}{2}(3-u_{n-1})$ — n

بضرب طرفي المتراجحات 1، 2، ... n طرف في طرف نجد:

$0 \leq (3-u_1)(3-u_2)\times\cdots\times(3-u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (3-u_0)\times(3-u_1)\times\cdots\times(3-u_{n-1})$

وبالتالي: $0 \leq 3-u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (3-u_0)$

(0,5) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لما أن $0 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-u_n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

حل التمرين الثاني:

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

(0,18) $$P(A) = \frac{A_3^2 + A_2^1}{A_5^2} = \frac{6+2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

(0,18) $$P(B) = \frac{2A_3^1 \times A_2^1 + A_3^2}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

2) حساب $P(A \cap B)$ ثم استنتاج $P(A \cup B)$:

(0,18) $$P(A \cap B) = \frac{A_3^2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(0,18) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

(0,25x6) 3) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

x_i	1	2	3
p_i	$P(X=1) = \frac{A_3^2}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$	$P(X=2) = \frac{2A_3^1 A_2^1}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	$P(X=3) = \frac{A_2^2}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

(0,18) $$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = \frac{3}{10} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$$

$$= \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{9}{5}}$$

وحسنة

حل التمرين الثالث:

I) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-\sqrt{3})(z^2-\sqrt{3}z+1)=0$ (0,75)

لدينا $(z-\sqrt{3})(z^2-\sqrt{3}z+1)=0$ تكافئ $z=\sqrt{3}$ أو $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

لدينا $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ معادلة من الدرجة الثانية و $\Delta = 3-4 = -1 = i^2$

تقبل حلين مترافقين هما: $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

و $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

وعليه حلول المعادلة (E) هي $\sqrt{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

II) لدينا $z_A = \sqrt{3}+i$ ، $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_C = \overline{z_B} = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

و $z_D = \sqrt{3}$

1) تبيان أن النقطة A هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$: (0,8)

لدينا $z_{\overrightarrow{BA}} = z_A - z_B = \sqrt{3}+i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

و $z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

بما أن $z_{\overrightarrow{BA}} = z_{\overrightarrow{CD}}$ فإن A هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$

استنتاج أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع: (0,25)

بما أن $z_{\overrightarrow{BA}} = z_{\overrightarrow{CD}}$ فإن الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

2) كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي: (0,25)

لدينا: $z_A = \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ (0,25)

$z_B = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C = \overline{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ 0,25×2

تبيان أن $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2021} \times (z_B)^{1441} \times (z_C)^{1962} = 1$ (0,5)

لدينا: $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2021} \times (z_B)^{1441} \times (z_C)^{1962} = e^{i\left(\frac{2021\pi + 1441\pi - 1962\pi}{6}\right)}$

$= e^{i\times 250\pi} = \cos(0) + i\sin 0 = 1$

3) لدينا $f(M)=M'$ معناه $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-i$

0,75 أ/ تعيين طبيعة التحويل النقطي f مع تحديد عناصره المميزة:

لدينا $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\in\mathbb{C}^*$ حيث $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$

ومنه f دوران زاويته θ حيث $\theta=Arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ ومركزه A النقطة ذات اللاحقة

$$z_A=\frac{b}{1-a}=\frac{-i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

أي $z_A=\frac{-2i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{-2i\left(1+\sqrt{3}i\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=z_C$

وبالتالي f دوران زاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$ ومركزه النقطة C.

0,25 ب) لبيان أن النقطة B هو صورة D بالتحويل f:

لدينا $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_D-i=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt{3}-i$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-i=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=z_B$$

0,75 استنتاج طبيعة المثلث BCD واستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

لما أن B هو صورة D بالتحويل f فإن $CB=CD$ و $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{3}$

وعليه المثلث BCD متقايس الأضلاع

لدينا هما سبق الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ولما أن $CB=CD$

فإن $ABCD$ معين

0,5 4) تعيين طبيعة المجموعة (Θ) لما M تمسح $(\mathcal{C})$ حيث $Arg(z-z_B)=Arg(\overline{z}-\overline{z_C})+2k\pi$

لدينا $Arg(z-z_B)=Arg(\overline{z}-\overline{z_B})+2k\pi$ تكافئ

$Arg(z-z_B)=Arg(\overline{z-z_B})+2k\pi$ "

$Arg(z-z_B)=-Arg(z-z_B)+2k\pi$ "

$2Arg(z-z_B)=2k\pi$ "

وتكافئ $Arg(z-z_B)=k\pi$ أي $2Arg(z-z_B)=2k\pi$ أي $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{BM})=k\pi$

وبالتالي المجموعة (Θ) هي المستقيم (BM) الذي يشمل B ما عدا النقطة B حيث M تمسح $(\mathcal{C})$ باستثناء النقطتين A و C.

حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x) = x - 3 + 4\ln(x+1)$ حيث g معرفة على $]-1,+\infty[$ (1,28)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -1} g(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

حساب $g'(x)$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ حيث

$$g'(x) = 1 + \frac{4}{x+1} > 0$$

بما أن $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ‖	$\nearrow$	$+\infty$

(0,5) 2) أ) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1,+\infty[$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ وبما أن $\lim_{x \to -1} g(x) \times \lim_{x \to +\infty} g(x) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1;+\infty[$.

(0,28) التحقق أن $0,\!F4 < \alpha < 0,\!F6$

بما أن $g(0,\!F4) \times g(0,\!F6) < 0$ أي $\begin{cases} g(0,\!F4) = -0,04 \\ g(0,\!F6) = 0,02 \end{cases}$ فإن

$$0,\!F4 < \alpha < 0,\!F6$$

ب) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

(0,28)

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$D_f =]-1, +\infty[$ لدينا (C_f) ∈ $\Rightarrow f(x) = \ln(x+1) - 4\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ (2

(0,5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ لحساب $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$ (1 بيان أن (C_f)

لدينا

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \ln(x+1)\left(1 - \frac{4}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) - 4\frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

(0,5) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ $x \in]-1, +\infty[$ ب) بيان أنه من أجل

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{4}{x+1} \times (x+1) - 4\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{4 - 4\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-4+4\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

ومنه $f'(x) = \dfrac{x-3+4\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

(0,5) تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

(0,5) $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-3)^2}{4(\alpha+1)}$ (2 بيان أن $f(\alpha) = \dfrac{1}{4}\alpha + 1 - \dfrac{1}{\alpha+1}$

$\ln(\alpha+1) = \dfrac{3-\alpha}{4}$

لدينا $f(\alpha) = \ln(\alpha+1) - 4\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1}$

ومنه $f(\alpha) = \dfrac{3-\alpha}{4} - \dfrac{3-\alpha}{\alpha+1} = (3-\alpha)\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\alpha+1}\right)$

$$= (3-\alpha)\left(\frac{\alpha-3}{4(\alpha+1)}\right) = -\frac{(\alpha-3)^2}{4(\alpha+1)}$$

وهذه $g(q) = -\frac{(q-3)^2}{4(q+1)}$

(0,25) ب) أحسب دون حساب $\lim_{x \to q} \frac{g(x)-g(q)}{x-q}$

لدينا $\lim_{x \to q} \frac{g(x)-g(q)}{x-q} = g'(q) = 0$ لأن $g'(q) = \frac{g(q)}{(q+1)^2} = 0$

(0,25) التفسير البياني:

نقول أن (C_g) يقبل مماسا هو ذا حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة q.

(0,25) 3) لدينا $D_h =]-1, +\infty[$ مع $h(x) = \ln(x+1)$

(0,25) أ) حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x) - h(x)$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) - h(x) = \lim_{x \to +\infty} -4\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

(0,25) التفسير البياني:

نقول أن (C_f) و (C_h) متقاربان بجوار $+\infty$.

(0,25) ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h):

لدينا $f(x) - h(x) = 0$ تكافئ $-4\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ تكافئ $\ln(x+1) = 0$

أي $x+1 = 1$ ومنه $x = 0$ وعليه الوضع النسبي لـ (C_h) و (C_f)

يكون كالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-h(x)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_h) أعلى (C_f)		(C_f) يقطع (C_h)		(C_f) أسفل (C_h)

(0,75) 4) أحسب النهايات عند أطراف D_f ثم فسر النتائج هندسياً.

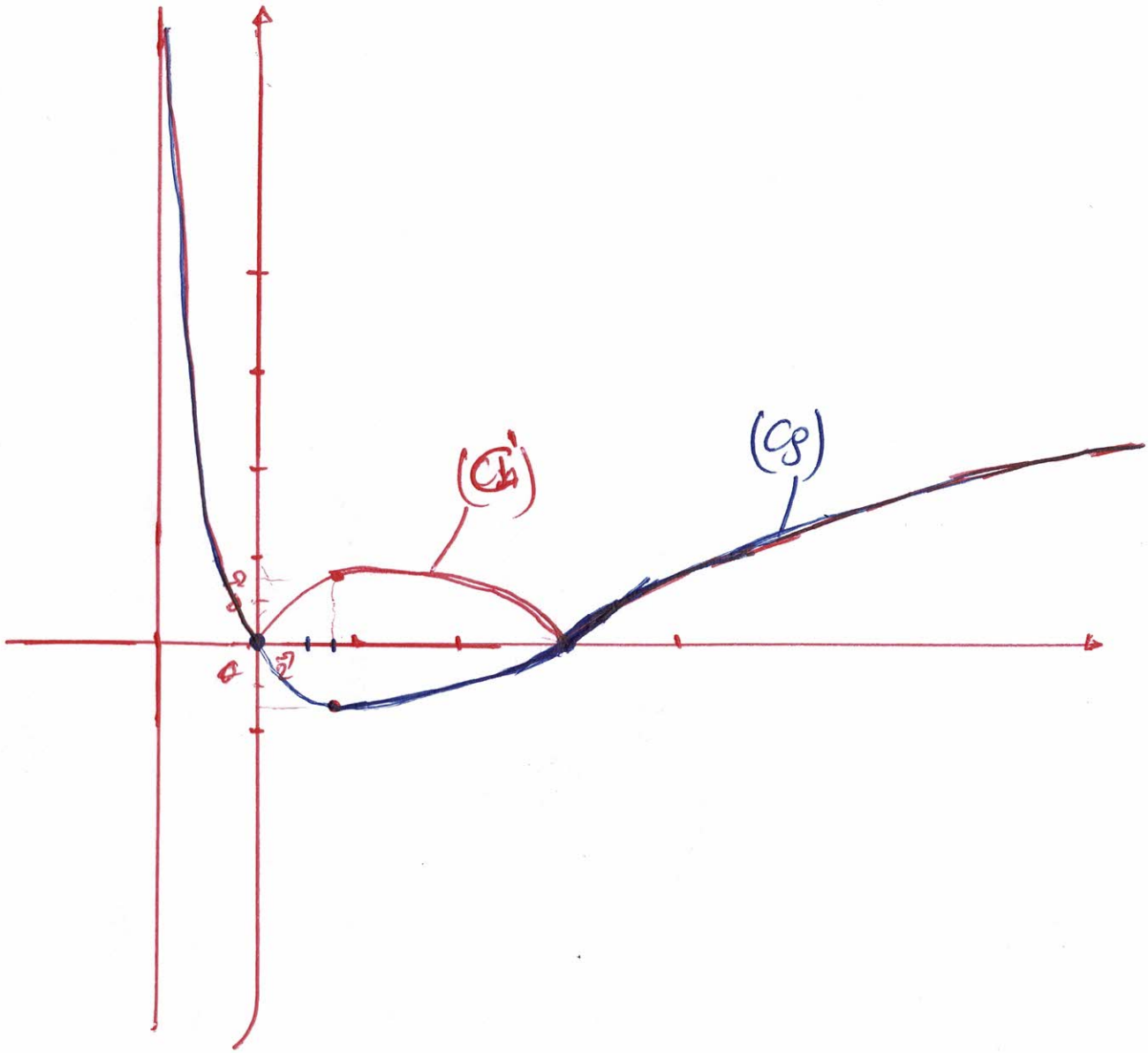
لدينا $f(x)=0$ تكافئ $\ln(x+1)\left(1-\frac{4}{x+1}\right)=0$

وتكافئ $\ln(x+1)=0$ أو $\frac{x-3}{x+1}=0$ ومنه $\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$ أو

وعليه $(C_f)\cap(xx')=\{(0;0);(3;0)\}$

و $(C_f)\cap(yy')=\{(0;0)\}$

(0,5) ب) رسم (C_f) ثم رسم (C') المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:



الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:

R_1	R_2	N_1	N_3
R_1'	R_2	N_2	N_3

1) حساب احتمال كل من الحوادث التالية:

(0,8) $P(A) = \dfrac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$

(0,8) $P(B) = \dfrac{C_3^3 + C_3^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_1^1}{35} = \dfrac{13}{35}$

(0,8) $P(C) = \dfrac{C_3^3 + C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + 2 \times C_3^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_1^1}{35}$

$= \dfrac{31}{35}$

(2)

2) تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X:

x_i	1	2	3	4	6	8	12
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$

$P(X=1) = \dfrac{C_3^3}{35} = \dfrac{1}{35}$, $P(X=2) = \dfrac{C_3^2 \times C_3^1}{35} = \dfrac{9}{35}$

$P(X=3) = \dfrac{C_3^2 \times C_1^1}{35} = \dfrac{3}{35}$, $P(X=4) = \dfrac{C_3^2 \times C_3^1}{35} = \dfrac{9}{35}$

$P(X=6) = \dfrac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{35} = \dfrac{9}{35}$, $P(X=8) = \dfrac{C_3^3}{35} = \dfrac{1}{35}$

$P(X=12) = \dfrac{C_3^2 \times C_1^1}{35} = \dfrac{3}{35}$

(0,5) حساب $E(X)$: $E(X) = \dfrac{1+18+9+36+54+8+36}{35} = \dfrac{162}{35}$

حل التمرين الثاني:

$v_n = u_n - e^n$ و $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}e u_n + \frac{2}{3}e^{n+1} \end{cases}$ لدينا

أ) 1) بيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}e$ ثم حساب حدها الأول:

(0,5) $v_{n+1} = u_{n+1} - e^{n+1} = \frac{1}{3}e u_n + \frac{2}{3}e^{n+1} - e^{n+1}$ لدينا

$= \frac{1}{3}e u_n - \frac{1}{3}e^{n+1} = \frac{1}{3}e u_n - \frac{1}{3}e \times e^n$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{3}e(u_n - e^n) = \frac{1}{3}e v_n$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}e$ وحدها الأول

$v_0 = u_0 - e^0 = 2 - 1 = 1$

(0,25) ب) كتابة v_n بدلالة n:

(0,25) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}e\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا $v_n = u_n - e^n$ ومنه $u_n = v_n + e^n = \left(\frac{1}{3}e\right)^n + e^n$

(0,5) ج) حساب بدلالة n المجموع T_n حيث $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$T_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}e} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}e} = \frac{3}{2e}\left(1 - \left(\frac{1}{3}e\right)^{n+1}\right)$

د) لدينا $w_n = \ln(u_n - v_n)$:

(0,25) أ) التحقق أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n$

لدينا $w_n = \ln(u_n - v_n) = \ln e^n = n$

(0,5) ب) بيان أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

لدينا $w_{n+1} = w_n + 1$ ومنه (w_n) حسابية أساسها 1، وحدها الأول $w_0 = 0$

ج) لدينا $S_n = w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2$

البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(0,5) نرمز $P(n)$ للخاصية $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

لدينا $S_1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ و $w_1^2 = 1^2 = 1$

ومنه $P(1)$ محققة

نفترض أن $P(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}$ ولنبرهن أن $P(n+1)$ محققة

أي نبرهن أن $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا $S_{n+1} = S_n + w_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

ومنه $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

ولدينا من جهة أخرى: $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$

وعليه $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

ومنه $P(n+1)$ محققة وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع هذه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

حل التمرين الثالث :

لدينا $z_A = 2i$ ، $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) أ) كتابة كل من z_A و z_B و z_C على الشكل المثلثي :

$$z_A = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad z_B = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_C = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

(0,5) استنتاج أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها :

لدينا $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ أي $OA = OB = OC = 2$

ومنه النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

ب) تحديد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_B^n عددا حقيقيا سالبا تماما.

(0,5) z_B^n عدد حقيقي سالب تماما معناه $\arg(z_B^n) = \pi + 2k\pi$

ومنه $n\frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{N}$

$n = 6 + 12k$

2) أ) كتابة $\frac{z_C}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي :

(0,5) $$\frac{z_C}{z_B} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - i)}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

(0,25) $$\frac{z_C}{z_B} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

ب) استنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

(0,25 × 2) بالمطابقة بين الشكل المثلثي والشكل الجبري نجد :

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3) لدينا $f(M)=M'$ معناه $z'=2iz+4+2i$

ب) بيان أن f تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره الهندسية

لما أن $2i\in\mathbb{C}^*$ مع $|2i|\neq 1$ فإن f تشابه مباشر (0,25)

نسبته $k=|2i|=2$ وزاويته $\theta=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$ ومركزه Ω (0,25×3)

الذي لحقته z_Ω حيث:

$$z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{4+2i}{1-2i}=\frac{(4+2i)(1+2i)}{5}=\frac{4+8i+2i-4}{5}$$

$$z_\Omega=2i=z_A$$

أي

4) تحديد مجموعة النقط (S) التي تحقق $|\bar{z}-\sqrt{3}+2i|=|iz+2|$ (0,75)

لدينا

$$|\bar{z}-(\sqrt{3}-2i)|=|i^2\left(z+\frac{2}{i^2}\right)|$$

وتكافئ

$$|\bar{z}-\bar{z}_B|=|i^2||z-2i|$$

$$|\overline{z-z_B}|=|z-z_A|$$

$$|z-z_B|=|z-z_A|$$

$$MA=MB$$

ومنه مجموعة S هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

حل التمرين الرابع:

I) لتكن $g(x) = e^{2x} - 4x - 1$ حيث $D_g = \mathbb{R}$ (1,25)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(e^{x} - 4\frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2e^{2x} - 4 \quad : x \in \mathbb{R}$$ لدينا من أجل

دراسة إشارة $g'(x)$:

لدينا $g'(x) = 0$ تكافئ $2e^{2x} - 4 = 0$ أي $e^{2x} = 2$ و منه $2x = \ln 2$

$$x = \ln\sqrt{2}$$

ومنه $g'(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\ln\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \ln\sqrt{2}]$

ومتزايدة على المجال $[\ln\sqrt{2}; +\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		0		$\ln\sqrt{2}$		$\ln 4$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$			
$g(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1 - 2\ln 2$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(\ln\sqrt{2}) = e^{2\ln\sqrt{2}} - 4\ln\sqrt{2} - 1 = 2 - \ln 4 - 1$$
$$= 1 - 2\ln 2$$

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $0,62 < \alpha < 0,64$ (0,25)

لدينا $g(0) = 0$

(0,5) لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]\ln\sqrt{2}; +\infty[$

و $]0,62; 0,64[\subset]\ln\sqrt{2}; +\infty[$ و $g(0,62) \times g(0,64) < 0$

إذن $\begin{cases} g(0,62) \simeq -0,02 \\ g(0,64) \simeq 0,03 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

(2) المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,62; 0,64[$

حسب (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم

و الآخر α حيث $0,62 < \alpha < 0,64$

(0,5)

ب) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(II) $f(x) = \left(2x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x} + x - 1$ حيث $D_f = \mathbb{R}$

1) أ) حساب $\lim f(x)$ و $\lim f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x+\frac{3}{2}\right)e^{-2x} + x - 1 = -\infty$ ($2x+\frac{3}{2} \to -\infty$, $e^{-2x} \to +\infty$, $x-1 \to -\infty$)

(0,25×2)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{2e^{2x}} + x - 1 = +\infty$ ($\frac{2x}{e^{2x}} \to 0$, $\frac{3}{2e^{2x}} \to 0$, $x-1 \to +\infty$)

(0,5)

ب) تبيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-2x} g(x)$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}\left(2x+\frac{3}{2}\right) + 1$

$= e^{-2x}\left(2 - 4x - 3 + e^{2x}\right) = e^{-2x}\left(e^{2x} - 4x - 1\right)$

ومنه $f'(x) = e^{-2x} g(x)$

نستنتج جدول تغيرات الدالة f:

$f(0) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

(0,5)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) تبيان أن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{4}; 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$ تنتمي لمنحنى (C_f).

لدينا $g'(x) = e^{-2x} g(x)$

ومنه: $g'(x) = -2e^{-2x} g(x) + g'(x) e^{-2x}$

$= e^{-2x}\left(-2g(x) + g'(x)\right)$

(0,25) $= e^{-2x}\left(-2e^{2x} + 8x + 2 + 2e^{2x} - 4\right)$

ومنه $g''(x) = (8x - 2) e^{-2x}$

لدينا $g''(x) = 0$ تكافئ $x = \frac{1}{4}$ ومنه إشارة $g''(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن g'' انعدمت من أجل $x = \frac{1}{4}$ وغيرت إشارتها فإن النقطة $\Omega\left(\frac{1}{4}; f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ أي $\Omega\left(\frac{1}{4}; 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$ تمثل نقطة انعطاف لـ (C_f) لأن:

$g\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} - 1 = 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}$

3) أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

(0,25) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + \frac{3}{2}\right) e^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{2e^{2x}} = 0$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

(0,5) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ):

لدينا $f(x) - (x-1) = 0$ تكافئ $2x + \frac{3}{2} = 0$ لأن $e^{-2x} \neq 0$

ومنه $2x = -\frac{3}{2}$ أي $x = -\frac{3}{4}$

وعليه الوضع النسبي كالتالي:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

ب) تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (D) يطلب تعيين معادلته

(0,5) لدينا $g'(x) = 1$ تكافئ $g(x) = e^{2x}$ أي $-4x - 1 = 0$ ومنه $x = -\frac{1}{4}$ وعليه (C_f) يقبل مماسا (T) موازي لـ (D) معادلته كما يلي:

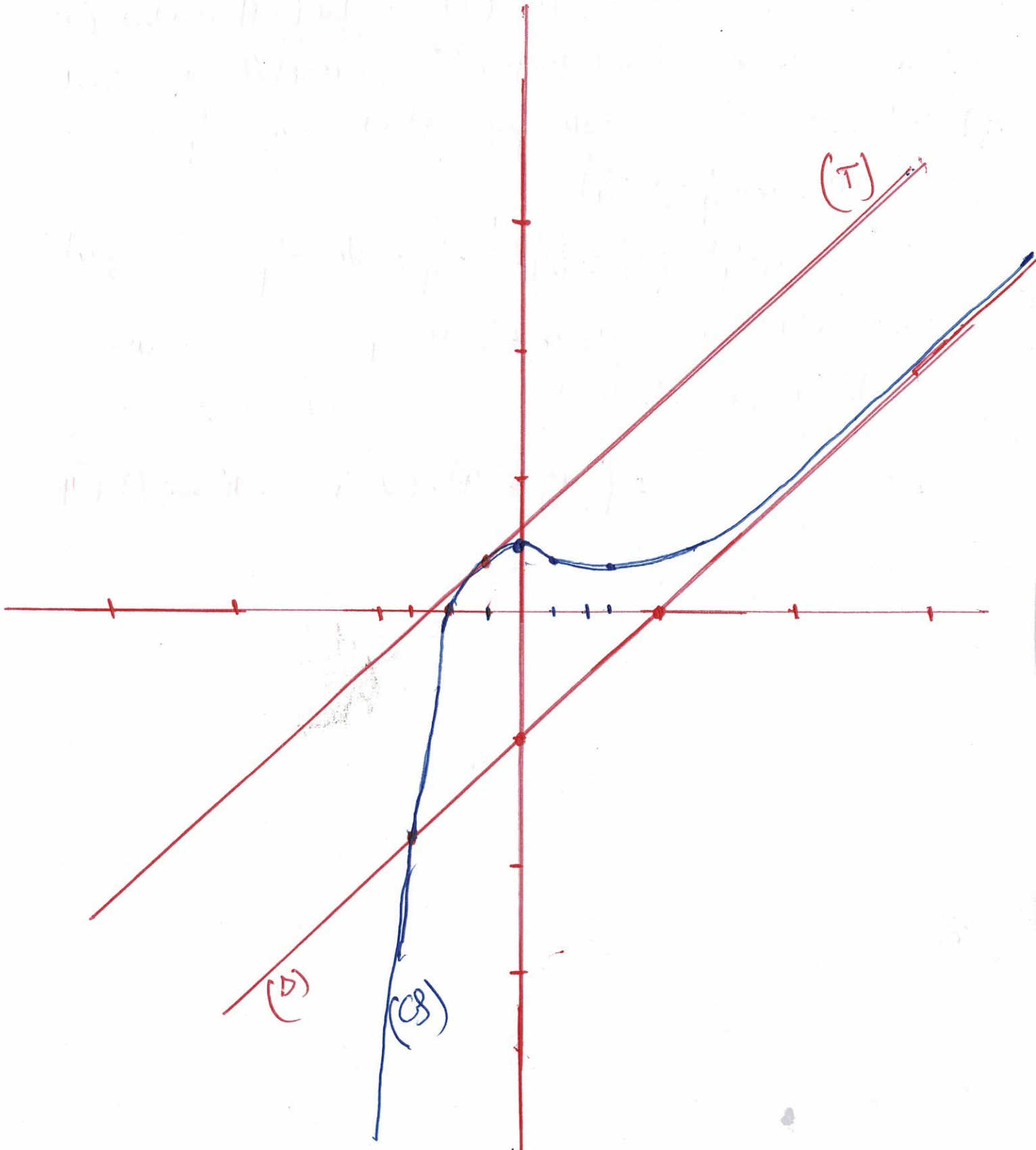
$$y = x + \frac{1}{4} + f\left(-\frac{1}{4}\right)$$

لدينا $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} = \sqrt{e} - \frac{5}{4}$

ومنه $y = x + \frac{1}{4} + \sqrt{e} - \frac{5}{4}$ ومنه معادلة لـ (T)

$$y = x + \sqrt{e} - 1$$

(0,5) ج) إثبات أن (Δ) و (T) و (C_f) :



د) أحسب بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين عن حلول الشارحة.

0,28

لما m من أجل $m \in]-1; \frac{1}{2}[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين عن حلول الشارحة.

الوثيقة المرفقة

الاسم:

اللقب: