الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي | دورة: ماي 2021

شعبة: التقني رياضي | ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

I. f الدالة المعرفة على المجال $I=[0;1]$ بـ: $f(x)=xe^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن الدالة f متزايدة على المجال I.
2. بين أنه من أجل $x\in I$ فإن $f(x)\in I$.

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

في الوثيقة المرفقة (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

1. باستعمال الوثيقة المرفقة مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ: 2، 2، 4 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 2، 2 و كريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0، 1.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس و نعتبر الحادثتين A و B حيث A: سحب ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى و B: سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.
2. بين أن $P(A\cap B)=\frac{5}{56}$ ثم استنتج $P(A\cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.
   - ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث:05 نقاط

1. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على العدد 9.

ب) بين أن العدد $5\times 2^{2021}+1441^{1962}+8^{1954}$ مضاعف للعدد 9.

ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $2018^{6n+4}+2n+3\equiv 0[9]$.

2. من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث $a_n=1+2+4+...+2^n$.

أ) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_n=2^{n+1}-1$ ثم عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n\equiv 0[9]$.

ب) بين أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $a_{n+1}=2a_n+1$ ثم استنتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

التمرين الرابع:07 نقاط

I. g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}+\ln(2)-\ln(x+1)$ و جدول تغيراتها المقابل.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$ln(2)$	↘	$-\infty$

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0,7<\alpha<-0,6$ و $3,2<\beta<3,4$.
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(2+\ln 2)x-(x+2)\ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2. بين أن $f(\beta)=\beta-2\ln(2)-1+\dfrac{1}{\beta+1}$ ثم اعط حصرا لـ $f(\beta)$.
3. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين احداثييها.

ب) أكتب معادلة للمماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة Ω.
4. أ) أرسم كلا من (Δ) و (C_f) يعطى $(C_f)\cap(xx')=\{(0;0),(7,26;0),(-0,88;0)\}$ و
$\begin{cases}\alpha=-0,63\\ f(\alpha)=-0,33\end{cases}$ ، $\begin{cases}\beta=3,31\\ f(\beta)=1,16\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=|m|x$ ثلاث حلول متمايزة.

ج) وضح كيف يمكن رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=-f(x)$ انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية: $5x-7y=13$ حيث x و y عددان صحيحان.

1. بين أنه إذا كان العدد الطبيعي d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y فإن $d=1$ أو $d=13$.
2. أ) جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0-y_0=13$.
   ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).
3. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $PGCD(x;y)=13$.
4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{56\beta 5}$ في النظام ذي الأساس 7 و يكتب $\overline{310\alpha 1}$ في النظام ذي الأساس 5 حيث α و β عددان طبيعيان.
   ✓ جد العددين α و β ثم أكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين الثاني:04 نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n+2n+1 \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n^2$.
2. ليكن المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.
   ✓ برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $u_{n+1}\equiv u_n\,[5]$.
4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{u_{n+1}-u_n}$.
   أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول ثم أكتب v_n بدلالة n.
   ب) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n=\ln v_0+\ln v_1+....+\ln v_{n-1}$ ثم استنتج مرة أخرى أن $u_n=n^2$.

التمرين الثالث:05 نقاط

I. عين العددين المركبين α و β حيث $\begin{cases} 2\alpha-\sqrt{3}\beta=3\sqrt{3}-i \\ \alpha i-\beta=0 \end{cases}$.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$، $z_B=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C=-1+\sqrt{3}i$.

1. أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z_A^n حقيقي سالب تماما.
2. أكتب z_B على الشكل المثلثي و الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ وحدد طبيعة المثلث OAC ثم عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول النقطة A إلى النقطة C محددا عناصره المميزة.

ج) بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ ثم استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع.

4. عين طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $Arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ مع k عدد صحيح.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = 2e^x - ex - e$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والأخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{2}ex^2 - ex$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متزايدة على المجالين $[-1;-\alpha]$ و $]-\infty;-1]$ ومتناقصة على المجال $[-\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3. عين دون حساب $\lim\limits_{x\to-\alpha} \frac{f(x)-f(-\alpha)}{x+\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4. h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h).

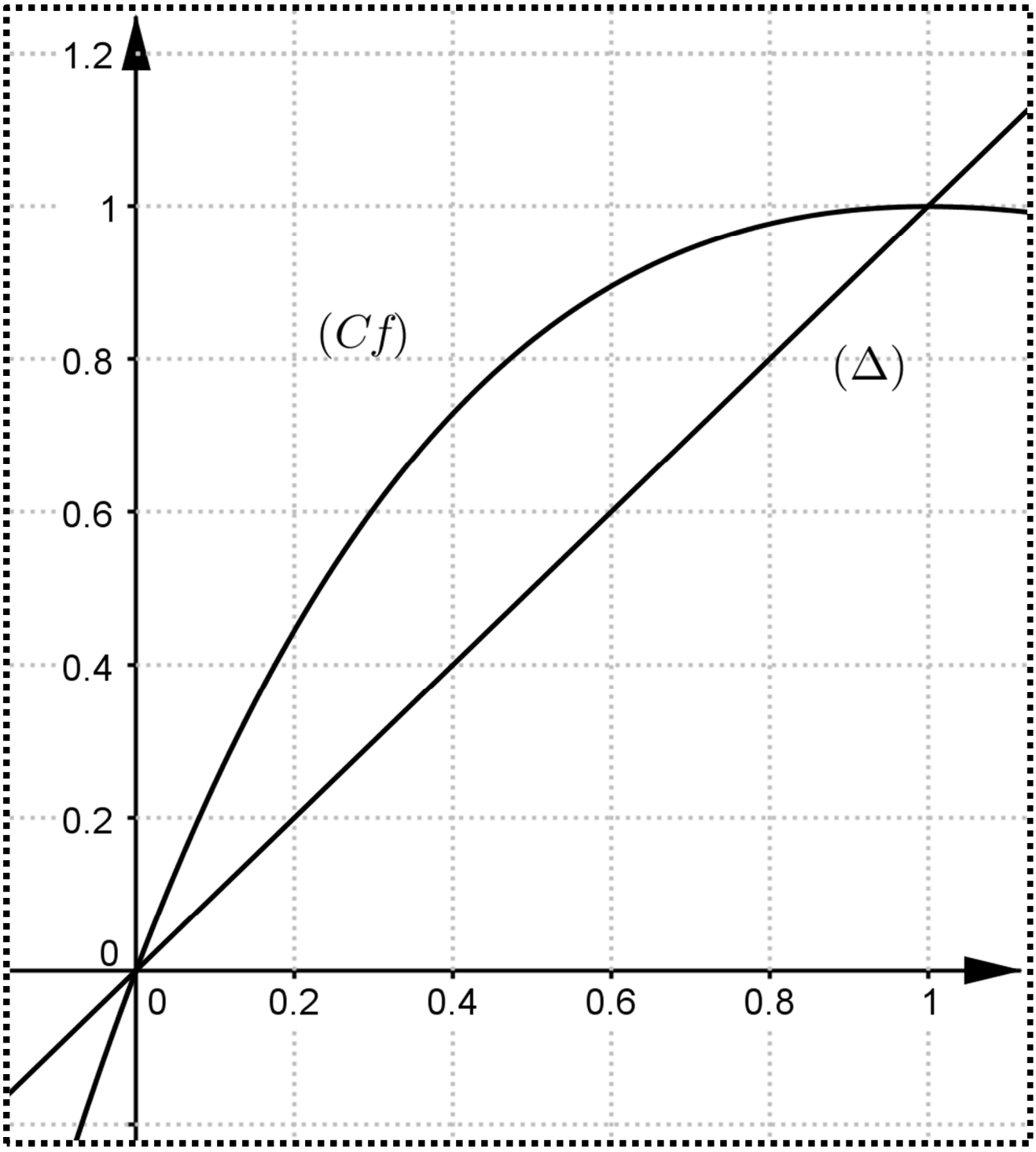
5. أ) أحسب $f(0)$ ثم أرسم (C_f). نقبل أن $\begin{cases}(C_f)\cap(xx') = \{(2,1;0)\}\\ f(-\alpha) = -2,24\end{cases}$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = m$ حلين موجبين و حل سالب.

انتهـــــــــى الموضـــــوع الثاني

الوثيقة المرفقة

الاسم:	اللقب:



التصحيح النموذجي لاختبار الكفاءات في مادة الرياضيات

المستوى: 3 ثر

الموضوع الأول:

حل التمرين الأول:

I) (0.18)

1) تبيان أن الدالة f متزايدة على المجال I:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I حيث

$$f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$$

لدينا $f'(x) = 0$ تكافئ $x = 1$ لأن $e^{1-x} \neq 0$

وهذه الإشارة من إشارة $f'(x)$ لأن $e^{1-x} > 0$

وعليه من أجل $x \in I$ فإن $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على I.

2) تبيان أنه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$ (0.18)

لدينا $x \in I$ معناه $x \in [0;1]$ ومنه $f(x) \in [f(0); f(1)]$

لأن الدالة f متزايدة على I.

لدينا $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$

ومنه من أجل $x \in I$ فإن $f(x) \in I$.

II) لدينا $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل: (0.18)

وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها. (0.18)

من البيان نلاحظ أن: $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ وعليه يبدو أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. ومتقاربة نحو العدد 1 (فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)).

0,f8

ج) البرهان بالترجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $0 < u_n < 1$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $u_0 = \frac{1}{5}$ و $0 < \frac{1}{5} < 1$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $0 < u_n < 1$ ولنبرهن أن

$P(n+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن $0 < u_{n+1} < 1$

لدينا $0 < u_n < 1$ ولما أن f متزايدة على $]0;1[$ فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$

أي $0 < u_{n+1} < 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالترجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n < 1$$

0,f8

ب) تبيان أن (u_n) متزايدة تماما:

لدينا $u_{n+1} - u_n = u_n e^{1-u_n} - u_n = u_n\left(e^{1-u_n} - 1\right)$

لدينا مما سبق $0 < u_n < 1$ ومنه $-1 < -u_n < 0$ ومنه

$0 < 1 - u_n < 1$ أي $1 < e^{1-u_n} < e$

ومنه $0 < e^{1-u_n} - 1 < e - 1$

وعليه $e^{1-u_n} - 1 > 0$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه الدالة المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

0,28

استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لدينا (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ومنه فهي متقاربة.

0,8

د) حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$:

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \;/\; \ell \in \mathbb{R}$ حيث ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

لدينا $f(\ell) = \ell$ مكافئة $\ell e^{1-\ell} = \ell$ ومنه $\ell\left(e^{1-\ell} - 1\right) = 0$

أي $\ell = 0$ أو $e^{1-\ell} = e^0$ ومنه $\ell = 1$

وبما أن $0 < u_n < 1$ و (u_n) متزايدة تماما فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

حل التمرين الثاني:

B_2	R_0	V_0
B_2	R_2	V_1
B_4	R_2	

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$:

(0,8) $P(A) = \dfrac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \dfrac{18}{56} = \dfrac{9}{28}$

(0,8) $P(B) = \dfrac{C_1^1 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_2^1}{56} = \dfrac{1+12}{56} = \dfrac{13}{56}$

2) بيان أن: $P(A \cap B) = \dfrac{5}{56}$

(0,8) لدينا $P(A \cap B) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{56} = \dfrac{5}{56}$

استنتاج $P(A \cup B)$:

(0,8) لدينا

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{18}{56} + \dfrac{13}{56} - \dfrac{5}{56} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$

3) تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

(1,8)

x_i	0	4	8	16
p_i	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{28}$

$P(X=0) = \dfrac{C_2^2 \times C_6^1 + C_2^1 \times C_6^2}{56} = \dfrac{6+30}{56} = \dfrac{36}{56} = \dfrac{9}{14}$

$P(X=4) = \dfrac{C_1^1 \times C_4^2}{56} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$, $P(X=8) = \dfrac{C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_4^3}{56} = \dfrac{1}{4}$

$P(X=16) = \dfrac{C_4^2 \times C_1^1}{56} = \dfrac{6}{56} = \dfrac{3}{28}$

حساب $E(X)$:

(0,8) $E(X) = \dfrac{12 + 32 + 48}{28} = \dfrac{92}{28} = \dfrac{23}{7}$

حل التمرين الثاني:

(1,28) 1) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9:

من أجل $n=0$ فإن $2^0 = 1 \equiv 1 [9]$

من أجل $n=1$ فإن $2^1 = 2 \equiv 2 [9]$

من أجل $n=2$ فإن $2^2 = 4 \equiv 4 [9]$

من أجل $n=3$ فإن $2^3 = 8 \equiv 8 [9]$

من أجل $n=4$ فإن $2^4 = 16 \equiv 7 [9]$

من أجل $n=5$ فإن $2^5 = 32 \equiv 5 [9]$

من أجل $n=6$ فإن $2^6 \equiv 64 \equiv 1 [9]$

وعليه بواقي قسمة 2^n على 9 نلخصها في الجدول التالي:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$n \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	8	7	5	$[9]$

ب) نبين أن العدد: $5\times 2^{2021} + 1441^{1962} + 8^{1954}$ مضاعف للعدد 9:

لدينا $2021 = 336\times 6 + 5$ ومنه $2^{2021} \equiv 5 [9]$

ومنه $5\times 2^{2021} \equiv 25 [9]$

أي $5\times 2^{2021} \equiv 7 [9]$

لدينا $1441 \equiv 1 [9]$ ومنه $1441^{1962} \equiv 1 [9]$

ولدينا $8 \equiv -1 [9]$ ومنه $8^{1954} \equiv 1 [9]$

وعليه $5\times 2^{2021} + 1441^{1962} + 8^{1954} \equiv 9 [9]$

$\equiv 0 [9]$

(0,75) ج) نعين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $2018^{6n+4} + 2n + 3 \equiv 0 [9]$

لدينا $2018 \equiv 2 [9]$ ومنه $2018^{6n+4} \equiv 2^{6n+4} [9]$

ومنه $2018^{6n+4} \equiv 7 [9]$

ومنه $2018^{6n+4} + 2n + 3 \equiv 0 [9]$ تكافئ $2n + 10 \equiv 0 [9]$

ومنه $2n + 1 \equiv 0 [9]$ أي $2n \equiv -1 [9]$ ومنه $2n \equiv 8 [9]$

وعليه $2^n \equiv 2^4 [9]$ أي $n \equiv 4 [9]$ أولية مع 9 أي

فيما يلي $n = 9k+4$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ج) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$a_n = 1+2+4+\dots+2^n$

أ/ تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $a_n = 2^{n+1}-1$

لدينا (0,8) $a_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$

لأن 2^n هو n حدا لمتتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول هو الواحد. 0,5

تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $a_n \equiv 0 [9]$ (0,8)

لدينا $a_n \equiv 0 [9]$ معناه $2^{n+1}-1 \equiv 0 [9]$ ومعناه $2^{n+1} \equiv 1 [9]$

وعليه $n+1 = 6k$ ومنه $n = 6k-1$ أي $n = 6k+5$

حيث $k \in \mathbb{N}$.

ب) تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = 2a_n + 1$ (0,8)

لدينا $a_{n+1} = 2^{n+1+1} - 1 = 2 \times 2^{n+1} - 2 + 1$

ومنه $a_{n+1} = 2(2^{n+1}-1) + 1$

وعليه: $a_{n+1} = 2a_n + 1$

استنتاج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما: (0,8)

لدينا $a_{n+1} = 2a_n + 1$ يكافئ $a_{n+1} - 2a_n = 1$ وعليه

حسب مبرهنة بيزو يستنتج أن a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

حل التمرين الرابع:

I) $g(x) = \frac{x}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1)$ حيث $D_g =]-1;+\infty[$

1) (1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث:

$-0,7 < \alpha < -0,6$ و $3,2 < \beta < 3,4$

لدينا الدالة g مستمرة و رتيبة على المجالين $]-0,7;-0,6[$ و $]3,2;3,4[$

و $g(-0,7) \times g(-0,6) < 0$ ، $g(3,2) \times g(3,4) < 0$

أي $\begin{cases} g(-0,7) \\ g(-0,6) \end{cases}$ $\begin{cases} g(3,2) \\ g(3,4) \end{cases}$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$ و $3,2 < \beta < 3,4$

(0,5) ب) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	-1		α		β		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

II) $f(x) = (2+\ln 2)x - (x+2)\ln(x+1)$

1) أ) تبيان أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ثم حساب $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

(0,5) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)\left[\frac{(2+\ln 2)x}{x+2} - \ln(x+1)\right] = -\infty$ ($+\infty$، $-\infty$)

(0,25) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x+2)(2+\ln 2)x - (x+2)\ln(x+1) = +\infty$ (-1، $-\infty$)

(0,5) ب) تبيان أنه من أجل $x \in]-1;+\infty[$; $f'(x) = g(x)$

لدينا من أجل $x \in]-1;+\infty[$ فإن:

$$f'(x) = 2+\ln 2 - \left(\ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1}\right) = 2+\ln 2 - \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$$

ومنه $f'(x) = \frac{2x+2-x-2}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1)$

ومنه $f'(x) = \frac{x}{x+1} + \ln 2 - \ln(x+1) = g(x)$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

(0,8)

x	-1		α		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	$-\infty$

2) تبيان أن $f(\beta) = \beta - 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{\beta+1}$

لدينا $f(\beta) = (2+\ln 2)\beta - (\beta+2)\ln(\beta+1)$

ولدينا $g(\beta) = 0$ معناه $\ln(\beta+1) = \frac{\beta}{\beta+1} + \ln(2)$

ومنه $f(\beta) = 2\beta + \beta\ln 2 - (\beta+2)\left(\frac{\beta}{\beta+1} + \ln 2\right)$

(0,8) $= 2\beta + \beta\ln 2 - \frac{\beta^2+2\beta}{\beta+1} - \beta\ln 2 - 2\ln 2$

$= 2\beta - \frac{\beta^2+\beta+\beta}{\beta+1} - 2\ln 2 = 2\beta - \beta - \frac{\beta}{\beta+1} - 2\ln 2$

$= \beta - 2\ln 2 - \frac{\beta+1-1}{\beta+1} = \beta - 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{\beta+1}$

وعليه $f(\beta) = \beta - 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{\beta+1}$

استخراج حصر لـ $f(\beta)$:

(0,8) لدينا $3,2 < \beta < 3,4$ ومنه $4,2 < \beta+1 < 4,4$ ومنه

$0,81 < \beta - 2\ln 2 - 1 < 1,01$ ولدينا $0,23 < \frac{1}{\beta+1} < 0,24$

وعليه $1,04 < f(\beta) < 1,25$

(0,8) 3) أ) تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف K يطلب تعيين إحداثيتها:

لدينا من أجل $x \in]-1,+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$

وعليه انطلاقا من جدول تغير الدالة g نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم من أجل $x = 0$ وتغير إشارتها وبالتالي النقطة $K(0;0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

(0,8) ب) كتابة معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة K:

لدينا $(\Delta): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $(\Delta): y = \ln(2)x$

ب) استنتج حسب قيم الوسيط الحقيقي m إشارة $f(x)$ ثم تحقق من أجل المعادلة $f(x)=|m|x$

ثلاث حلول متمايزة:

لدينا من أجل $m \in]f(\alpha); f(\beta)[$ أي $f(m) \in]f(\alpha); f(\beta)[$

لدينا من أجل $0 \leq |m| < \ln 2$ أي من أجل $|m| > 0$ و $|m| < \ln 2$

ومنه من أجل $m \in]-\ln 2; \ln 2[$ فإن المعادلة $f(x)=|m|x$ تقبل ثلاث حلول متمايزة

(0,8) ج) لتوضيح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) المميل البياني للدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)$

$h(x) = -f(x)$ نعلم أن (C_h) هو المميل البياني للدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $h(x) = -f(x)$

فإن $h(x) = -f(x)$ حيث (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

الموضوع الثاني :

حل التمرين الأول :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (ϵ) التالية $5x-4y=13$

1) تبيان أنه إذا كان $d=PGCD(x;y)$ فإن $d=1$ أو $d=13$:

(0,5) لدينا $d|x$ و $d|y$ ومنه $d|5x-4y$ أي $d|13$

وبما أن 13 عدد أولي فإن $d=1$ أو $d=13$

(0,5) ب) أ) إيجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (ϵ) حيث $x_0-y_0=13$

لدينا $\begin{cases} 5x_0-4y_0=13 \quad (1) \\ x_0-y_0=13 \quad (2) \end{cases}$ ومنه من (2) نجد أن $y_0=x_0-13$ ومنه

$5x_0-4x_0+91=13$

ومنه $x_0=39$ إذن $4x_0=156$

وعليه $y_0=39-13=26$ ومنه الحل الخاص للمعادلة (ϵ) حيث $x_0-y_0=13$ هو الثنائية $(39;26)$

(0,75) ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (ϵ) :

طريقة 1 : لدينا $\begin{cases} 5x-4y=13 \\ 5\times 39-4\times 26=13 \end{cases}$ ومنه $5(x-39)-4(y-26)=0$

أي $5(x-39)=4(y-26)$ ولما أن 5 و 4 أوليان فيما بينهما فإن حسب

خواص $\begin{cases} 5|y-26 \\ 4|x-39 \end{cases}$ أي $\begin{cases} y-26=5k \\ x-39=4k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=4k+39 \\ y=5k+26 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x=4k+4 \\ y=5k+1 \end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

ومنه حلول المعادلة (ϵ) هي الثنائيات $(4k+4;5k+1)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

طريقة 2 :

لدينا $5x-4y=13$ ومنه $5x=4y+13$ أي $5x\equiv 13[4]$

ومنه $5x\equiv 5\times 4[4]$ أي $x\equiv 4[4]$ ومنه $x=4k+4$

لأن 5 و 4 أوليان فيما بينهما. ومنه

ولدينا $4y=5x-13$ أي $4y\equiv -13[5]$ ومنه $4y\equiv 2[5]$

أي $4y\equiv 4[5]$ ومنه $y\equiv 1[5]$ ومنه $y=5k+1$

وعليه حلول المعادلة هي الثنائيات $(4k+4;5k+1)\ /\ k\in\mathbb{Z}$

3) تعيين بالتفاصيل $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي من أجلها $PGCD(x;y)=13$ (0,75)

ومنه $\begin{cases} x\equiv 0[13] \\ y\equiv 0[13] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 13\mid x \\ 13\mid y \end{cases}$

$\begin{cases} 4k\equiv 35[13] \\ 5k\equiv 25[13] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 4k\equiv 9[13] \\ 5k\equiv 12[13] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 4k+4\equiv 0[13] \\ 5k+1\equiv 0[13] \end{cases}$

$\begin{cases} k\equiv 5[13] \\ k\equiv 5[13] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 4k\equiv 4\times 5[13] \\ 5k\equiv 5\times 5[13] \end{cases}$ ومنه

$PGCD(5;13)=1$ و $PGCD(4;13)=1$ لأن

وعليه $k=13p+5$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

ومنه $\begin{cases} x=4(13p+5)+4 \\ y=5(13p+5)+1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=91p+39 \\ y=65p+26 \end{cases}$

وعليه، الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي من أجلها $PGCD(x;y)=13$

هي $(91p+39;65p+26)$ حيث $p\in\mathbb{Z}$

4) لدينا $N=\overline{56\beta 5}$ و $N=\overline{3100\alpha 1}$

حيث α و β عددان صحيحان:

إيجاد العددين α و β:

لدينا $0\leq\alpha\leq 4$ / $0\leq\beta\leq 4$

$N=5\times 4^3+6\times 4^2+4\beta+5=4\beta+2014$

$N=3\times 5^4+5^3+5\alpha+1=5\alpha+2001$

ومنه $5\alpha+2001=4\beta+2014$ أي $5\alpha-4\beta=13$ (1)

وعليه حسب الطريقة مع المعادلة (E) نجد

$\begin{cases} \alpha=4k+4 \\ \beta=5k+1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha=x \\ \beta=y \end{cases}$

ومنه $\alpha=4$ و $\beta=1$ أي $k=0$ حيث $\begin{matrix} 0\leq\alpha\leq 4 \\ 0\leq\beta\leq 4 \end{matrix}$

كتابة N في نظام العشري:

لدينا $\begin{cases} N=2014+4\times 1=2018 \\ N=2001+5\times 4=2021 \end{cases}$ (0,25) و

حل التمرين الثاني:

لدينا $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 1 \end{cases}$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = n^2$ (0,5 + 0,5)

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية $U_n = n^2$

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $U_0 = 0 = 0^2$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي $U_n = n^2$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن $U_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا $U_{n+1} = U_n + 2n + 1$

ولما أن $U_n = n^2$ فإن $U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{U_n = n^2}$

2) لدينا $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (0,5 + 0,5)

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $\frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0 = U_0$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي نبرهن أن: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

لدينا $S_{n+1} = S_n + U_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

ولما أن $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$

فإن: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(0,5) 3) أحسب قيم الأعداد الطبيعية n التي تحقق $u_{n+1} \equiv u_n [5]$

لدينا $u_{n+1} \equiv u_n [5]$ تكافئ $u_{n+1} - u_n \equiv 0 [5]$ أي $(2n+1)$

$2n \equiv 4 [5]$ أي $2n \equiv -1 [5]$ ومنه $2n+1 \equiv 0 [5]$

ومنه $n \equiv 2 [5]$ أي $n = 5k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ أو n يأخذ القيم 2 و 7 أو ليان وهكذا.

4) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = e^{u_{n+1} - u_n}$

أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها e^2 يطلب حساب حدها الأول.

(0,75) لدينا $v_{n+1} = e^{u_{n+2} - u_{n+1}} = e^{2n+3}$

ومنه $v_{n+1} = e^{2n+2+1} = e^2 \times e^{2n+1} = e^2 v_n$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول $v_0 = e$

ب) حساب v_{n+1} بدلالة n:

$v_{n+1} = e^{u_{n+2} - u_{n+1}} = e^{u_{n+3} + 2n + 3 - u_n - 2n - 1}$

$= e^{u_{n+3} - u_n + 2} = e^2 \times e^{u_{n+3} - u_n} = e^2 v_n$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$ وحدها الأول $v_0 = e$

(0,75) كتابة v_n بدلالة n: $v_n = v_0 \times q^n = e \times (e^2)^n = e^{2n+1}$

ج) حساب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_{n-1}$

(0,75) أ) لدينا $\ln v_n = 2n+1$ ومنه $(\ln v_n)$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول 1 وعليه:

$S'_n = \frac{n}{2}(1 + 2(n-1) + 1) = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = n^2$

ب:

$S'_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) = \ln(v_0 \times v_0 \times q \times \cdots \times v_0 \times q^{n-1})$

$= \ln(v_0^n \times q^{1+2+\cdots+n-1}) = \ln v_0^n + \ln q^{1+2+\cdots+n-1}$

$S'_n = n \ln v_0 + \frac{n-1}{2}(n) \times \ln q = n + (n-1)n = n(n-1+1) = n^2$

استنتاج صورة أخرى لـ u_n: $u_n = n^2$

لدينا $S'_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1}$

$S'_n = u_n - u_0$

(0,5) ومنه $\boxed{u_n = S'_n + u_0 = n^2 + 0 = n^2}$

حل التمرين الثالث :

I) تعيين العددين α و β حيث

(0,5) $\begin{cases} 2\alpha - \sqrt{3}\beta = 3\sqrt{3} - 2i & (1) \\ \alpha i - \beta = 0 & (2) \end{cases}$

لدينا من (2) $\beta = \alpha i$ وبالتعويض في (1) نجد

$\alpha(2 - \sqrt{3}i) = 3\sqrt{3} - i$ أي $2\alpha - \sqrt{3}\alpha i = 3\sqrt{3} - i$

ومنه $\alpha \dfrac{3\sqrt{3} - i}{2 - \sqrt{3}i} = \dfrac{(3\sqrt{3} - i)(2 + \sqrt{3}i)}{4} = \dfrac{6\sqrt{3} + 3i - 2i + \sqrt{3}}{4}$

$\dfrac{7\sqrt{3} + 4i}{4} = \sqrt{3} + i$

ومنه $\beta = (\sqrt{3} + i)i = -1 + \sqrt{3}i$

وبالتالي $\alpha = \sqrt{3} + i$

II) لدينا $Z_A = \sqrt{3} + i$ و $Z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z_A$ و $Z_C = -1 + \sqrt{3}i$

1) كتابة كل من Z_A . Z_B و Z_C على الشكل الأسي :

(0,75) $Z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$Z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} Z_A = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$Z_C = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(0,25) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها Z_A^n حقيقيا سالبا تماما :

Z_A^n حقيقي سالب تماما معناه $\arg(Z_A^n) = \pi + 2k\pi$

أي $n \arg(Z_A) = \pi(1 + 2k)$ ومنه $n\dfrac{\pi}{6} = \pi(1 + 2k)$

ومنه $n = 12k + 6$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2) كتابة Z_B على الشكل المثلثي والجبري :

(0,25) $Z_B = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$

(0,25) $Z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times (\sqrt{3} + i) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)(\sqrt{3} + i)$

$= (1 + i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

استنتاج القيم المضبوطة لـ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي والجبري نجد :

(0,25) $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

(0,25) $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

أي $\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$

3) إثبات أن $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (0,25)

تحديد طبيعة المثلث OAC:

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه (0,5)

وعليه المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين. $\begin{cases} OC = OA \\ (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

تعيين لاحقة النقطة I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OAC: (0,25)

بما أن المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين فإن I منتصف القطعة $[AC]$

وعليه $z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{\sqrt{3}+i - 1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي الذي يحول A إلى C مع تحديد عناصره المميزة:

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $z_C - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_O)$ (0,5)

ومنه C هو صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ (0,25)

ج) تبيان أن B هي صورة A بانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$:

B هو صورة A بانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$ معناه $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OC}}$ (0,25)

لدينا $\left.\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A = \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i - \sqrt{3}i \\ &= -1+\sqrt{3}i \end{aligned}\right\} z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OC}}$

$z_{\overrightarrow{OC}} = z_C - z_O = z_C = -1+\sqrt{3}i$

ومنه B هو صورة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$. (0,25)

استنتاج أن الرباعي $OABC$ مربع:

لدينا $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ و $OC = OA$ و $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}$

فإن الرباعي $OABC$ مربع.

4) تعيين طبيعة المجموعة (S) للنقط M من المستوى التي لاحقتها z تحقق $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi$ (0,25)

معناه $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}) = \pi + 2k\pi$ وعليه المجموعة (S) هي القطعة $[AC]$ ماعدا النقطتين A و C. (0,5)

حل التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x) = 2e^x - ex - e$ حيث $D_g = \mathbb{R}$

(1,5)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

حساب النهايات : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(2 - \frac{ex}{e^x} - \frac{e}{e^x}\right) = +\infty$

حساب $g'(x)$:

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2e^x - e$$

دراسة إشارة $g'(x)$ ؛ $g'(x) = 0$ تكافئ $2e^x - e = 0$ أي $e^x = \frac{e}{2}$

ومنه $x = \ln\frac{e}{2}$

x	$-\infty$		$\ln\frac{e}{2} = 1 - \ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty ; 1-\ln 2]$ ومتزايدة على المجال $[1-\ln 2 ; +\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		α		$1-\ln 2$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗	$(2\ln 2 - 1)e = -0,83$	↗		↗	$+\infty$

$g(1-\ln 2) = 2 - e(1-\ln 2) - 2 = 2\ln 2 - e = (2\ln 2 - 1)e$

(0,25) 2) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$

(0,25) لدينا $g(1) = 2e - e - e = 0$ ——— (1)

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-0,6 ; -0,58[$ من $\mathbb{R}$

(0,5) ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$ لأن $g(-0,6) \times g(-0,58) < 0$ حيث $\begin{cases} g(-0,6) = 0,01 \\ g(-0,58) = -0,02 \end{cases}$

(0,5) من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث $-0,6 < \alpha < -0,58$

(0,5) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{2}ex^2 - ex$

1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

0,28 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(-2 + \frac{1}{2}ex^2 e^{x} - ex e^{x}\right)$

$= -\infty$

0,28 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{-2}{x^2 e^x} + \frac{1}{2}e - \frac{e}{x}\right) = +\infty$

0,5 2) أ) بيان أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{-x} + ex - e$

$= 2e^{-x} - e(-x) - e = g(-x)$

ب) استنتاج أن الدالة f متزايدة على المجالين $[-\alpha; +\infty[$ و $]-\infty; -1]$

ومتناقصة على المجال $[-1; -\alpha]$:

لدينا $f'(x) = 0$ تكافئ $g(-x) = 0$ أي $-x = \alpha$ أو $-x = 1$ ومنه $x = -\alpha$ أو $x = -1$

لدينا $g(-x) > 0$ تكافئ $-x \in]-\infty, \alpha[\cup]1, +\infty[$

أي $x \in]-\infty, -1[\cup]-\alpha; +\infty[$

ومنه $g(-x) < 0$ تكافئ $x \in]-1; -\alpha[$ أي $-x \in]\alpha; 1[$

وعليه دراسة إشارة $f'(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5 وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-1; -\alpha[$ ومتزايدة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[-\alpha; +\infty[$.

0,28 تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

$f(-1) = -2e + \frac{1}{2}e + e = -e + \frac{1}{2}e = -\frac{1}{2}e$

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}e$	↘	$f(-\alpha)$	↗	$+\infty$

ج) تحديد دون حساب : $\lim_{x \to -\alpha} \frac{f(x) - f(-\alpha)}{x + \alpha}$

0,25 $\lim_{x \to -\alpha} \frac{f(x) - f(-\alpha)}{x + \alpha} = f'(-\alpha) = g(\alpha) = 0$

تفسير النتيجة بيانيا :

نقول أن (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

0,25

4) بيان (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد احداثيتها :

لدينا $f''(x) = g'(x) - g'(-x)$ ومنه $f''(x) = g'(x) - g'(-x)$

لدينا $f''(x) \geq 0$ تكافئ $g'(-x) \geq 0$ أي $-x \geq \ln 2 - 1$ أي $x \geq 1 - \ln 2$

لدينا $f''(x) < 0$ تكافئ $-g'(-x) < 0$ أي $g'(-x) < 0$

ومنه $-x \in]-\infty, 1 - \ln 2[$ ومنه $x \in]\ln(2) - 1; +\infty[$

وعليه إشارة $f''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$		$\ln(2) - 1$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

فبما أن f'' انعدمت مغيرة إشارتها عند $x = \ln(2) - 1$ فإن النقطة Ω أي $\Omega\left(\ln(2) - 1 ; f(\ln(2) - 1)\right)$ هي نقطة انعطاف.

$\Omega\left(\ln(2) - 1 ; \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2\right)$

$f(\ln(2) - 1) = -2e^{1 - \ln 2} + \frac{1}{2}e(\ln(2) - 1)^2 - e(\ln(2) - 1)$

$= -e + \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln(2) + e$

$= \frac{1}{2}e\left(\ln\frac{2}{e}\right)^2 - e\ln 2$

0,25 5) $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - ex$ / $D_h = \mathbb{R}$

0,25 حساب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - h(x) = \lim_{x \to +\infty} -2e^{-x} = 0$

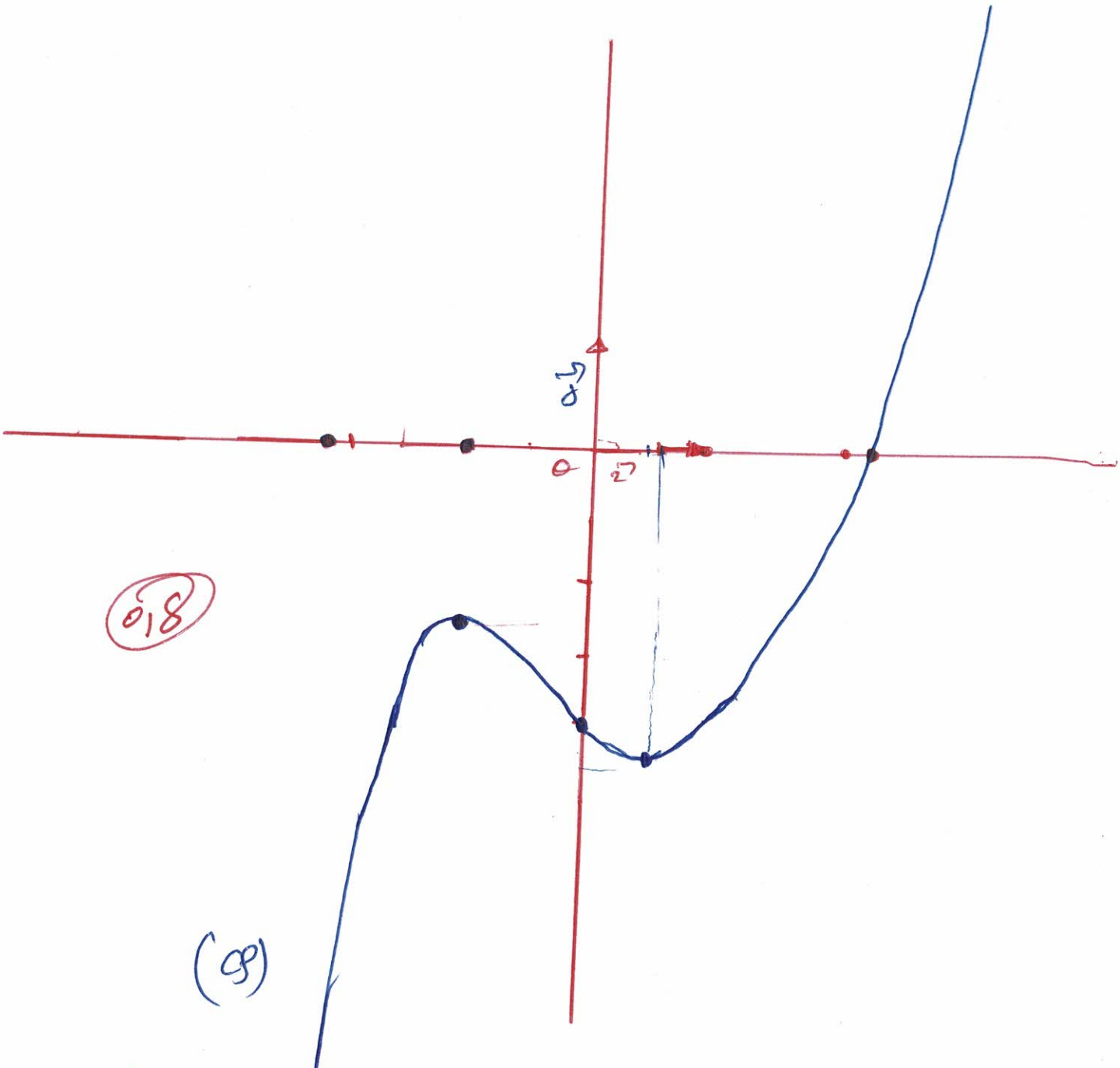
0,25 تفسير النتيجة بيانيا :

نقول أن (C_f) و (C_h) متقاربان عند $+\infty$.

0,25 بما أن $f(x) - h(x) = -2e^{-x} < 0$ فإن (C_f) يقع تحت (C_h) من أجل $x \in \mathbb{R}$

5) أحسب $f(0)$ ثم أرسم (C_f):

لدينا $f(0) = -2$ (0,28)



(0,18)

ب) أعين بيانيا وبدقة الوسيط الحقيقي m الذي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = m$ حلين موجبين وحل سالب.

لدينا من أجل $m \in]f(-1); -2[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب. (0,28)

الوثيقة المرفقة

الاسم: | اللقب: