

⚠ تجنب الشطب و استعمال المصحح.

النموذج الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n}$.

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.
- (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ب) إستنتج أن (u_n) متقاربة, ثم أحسب نهايتها.

- (3) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$.
أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = \frac{3}{2}$.

- ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n , أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.

النموذج الثاني: (08 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (1 - x)e^x$.

- (1) أ) أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و عند $-\infty$.
ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.
 - (3) تحقق أن : $1.27 < \alpha < 1.28$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$, ثم تحقق أن : $e^{-\alpha} = \alpha - 1$.
- II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 3cm).

- (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$.
- (2) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.
- (3) أوجد نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$, شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (4) بين أن $f(\alpha) = \alpha$ و $f(-\alpha) = 0$.
- (5) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
ب) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) .
- (6) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = -\alpha$.
- (7) أرسم (Δ) , (T) و (C_f) في المعلم السابق.
- (8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + f(m)$.

- (III) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$
- (1) باستعمال (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون الحساب.
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \alpha$.
- (3) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$, إستنتج تقارب المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (07 نقاط)

- I h دالة معرفة على $] -\infty; 2[$ بـ : $h(x) = 1 - \frac{x^2}{2-x}$
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا.
- (2) أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) حل في $] -\infty; 2[$ المعادلة $h(x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
- (4) عين من أجل كل عدد حقيقي x من $] -\infty; 2[$ إشارة $h(x)$.
- II f دالة معرفة على المجال $] -\infty; 2[$ بـ : $f(x) = x^2 + 6x - 2 + 8\ln(2-x)$, (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- (2) أثبت أنه من أجل كل x من $] -\infty; 2[$ أن : $f'(x) = 2h(x)$, ثم إستنتج إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (3) تحقق أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها.
- (4) أكتب معادلة المماس (T) عند نقطة من (C_f) فاصلتها 0.
- (5) أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في المجال $]1.7; 1.8[$.
- (6) أرسم (C_f) و (T) .
- (7) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $] -2; 2[$ بـ : $g(x) = x^2 + 6|x| - 2 + 8\ln(2-|x|)$.
- (أ) برهن أن $g(x)$ زوجية, ماذا تستنتج بيانيا.
- (ب) أكتب g دون رمز القيمة المطلقة.
- (ج) إنطلاقا من التمثيل البياني لـ (C_f) إشرح كيفية إنشاء (C_g) , ثم أرسم (C_g) .

إذا أردت أن تنجح بحق، سنجعل قلبنا منا، وإذا كنت لا تريد فسنجعلك عدونا.

أسناننا الملائكة : مزيان محمد

😊 إذا أردت أن تنجح بحق، ستجد طريقا ما، وإذا كنت لا تريد فستجد عذرا.

التمرين الأول: (05 نقاط)

لدينا: $u_1 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n}$.

1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$:

نسمي الخاصية ب: $p(n): u_n > \frac{1}{e}$

(1 مرحلة التحقق:

نتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل $n = 1$ $u_1 = e^2 > \frac{1}{e}$ و منه $p(1)$ محققة.

(2 مرحلة الفرضية و البرهان:

نفرض أن الخاصية $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أي: $u_n > \frac{1}{e}$ و نبرهن صحة الخاصية

$p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي نبرهن أن: $u_{n+1} > \frac{1}{e}$.

لدينا: $u_n > \frac{1}{e}$ و منه: $\sqrt{u_n} > \sqrt{\frac{1}{e}}$ و منه: $\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}}$ بالضرب في $e^{-\frac{1}{2}}$

نجد: $e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}} = e^{-1}$ إذن: $e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} > e^{-1}$ أي: $e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} > \frac{1}{e}$ إذن الخاصية $p(n+1)$

صحيحة من أجل $n+1$

و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: $p(n): u_n > \frac{1}{e}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

2 أ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

أي نبرهن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{u_n}}{u_n} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} \cdot \sqrt{u_n}} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}}$$

ندرس إشارة البسط $e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n}$ لدينا من البرهان بالتراجع $u_n > e^{-1}$ أي: $\sqrt{u_n} > \sqrt{e^{-1}}$ و منه:

$$\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}} \text{ و منه: } e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n} < 0 \text{ و منه: } \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0 \text{ أي: } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

إستنتاج إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ب لدينا من البرهان بالتراجع: $u_n > \frac{1}{e}$ أي المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بـ $\frac{1}{e}$ و هي متناقصة على $\mathbb{N}^*$ إذن فهي متقاربة نحو العدد ℓ .

حساب نهاية (u_n) : بما أن (u_n) متقاربة $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n} = e^{-\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ell} \text{ و منه: } \ell = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\ell}$$

إذن نحل هذه المعادلة, نربع الطرفين فتصبح : $\ell^2 = (e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ell})^2$ و منه : $\ell^2 = e^{-1}\ell$:
 إذن : $\ell^2 - e^{-1}\ell = 0$ إذن : $\ell(\ell - e^{-1}) = 0$ يعني : $\ell = 0$ (مرفوض) أو $\ell - e^{-1} = 0$ و منه :
 $\ell = e^{-1}$

3 لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$

أ البرهان أن (v_n) متتالية هندسية :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln e^{-\frac{1}{2}} + \ln \sqrt{u_n}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}(1 + (-\frac{1}{2}) + \ln \sqrt{u_n}) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}) = \frac{1}{2} \cdot v_n \end{aligned}$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول :

$$v_1 = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_1} = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{e^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln e^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

ب عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

إستنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$ و منه : $v_n - \frac{1}{2} = \ln \sqrt{u_n}$ و منه : $v_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln u_n$ و منه :
 $2v_n - 1 = \ln u_n$ و منه : $e^{2v_n-1} = u_n$, إذن : $u_n = e^{2\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}-1}$ و بالتالي : $u_n = e^{3(\frac{1}{2})^{n-1}-1}$
 حساب نهاية u_n :

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 : \text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{3(\frac{1}{2})^{n-1}-1} = e^{-1}$$

4 حساب المجموع S_n بدلالة n حيث :

$$S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \ln u_n} &= \frac{1}{1 + \ln(e^{3(\frac{1}{2})^{n-1}-1})} = \frac{1}{1 + 3(\frac{1}{2})^{n-1} - 1} = \frac{1}{3(\frac{1}{2})^{n-1}} \\ S_n &= \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{1}{3(\frac{1}{2})^0} + \frac{1}{3(\frac{1}{2})^1} + \dots + \frac{1}{3(\frac{1}{2})^{n-1}} \\ S_n &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\frac{1^0}{2^0}} + \frac{1}{\frac{1^1}{2^1}} + \dots + \frac{1}{\frac{1^{n-1}}{2^{n-1}}} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{2^0}{1^0} + \frac{2^1}{1^1} + \dots + \frac{2^{n-1}}{1^{n-1}} \right] \\ S_n &= \frac{1}{3} [2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}] = \frac{1}{3} \left[1 \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) \right] = \frac{1}{3} (2^n - 1) \end{aligned}$$

البعض بين الثاني: (08 نقاط)

$$x \in \mathbb{R} / g(x) = 1 + (1-x)e^x \quad (I)$$

أ نهاية g عند $+\infty$ و $-\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x.e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x - x.e^x = 1$ و منه : $g(x) = 1 + e^x - x.e^x$
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

ب) اتجاه تغير الدالة g:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = -e^x + (1-x).e^x = e^x.(-1+1-x) = -x.e^x$:
وبذلك إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x$ على $\mathbb{R}$ لأن : $e^x > 0$
وبالتالي g متزايدة تماما على $] -\infty; 0]$ و g متناقصة تماما على $] 0; +\infty[$.
جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	2	$-\infty$

$$g(0) = 1 + e^0 = 2$$

2) التحقق أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\mathbb{R}$

في المجال $] -\infty; 0]$ لدينا : $1 < g(x) \leq 2$ و متزايدة تماما و منه $g(x) = 0$ لا تقبل حلا في المجال $] -\infty; 0]$
لكن في المجال $] 0; +\infty[$ فإن : $g(x) \leq 2$ و g متناقصة تماما على المجال إذا $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] 0; +\infty[$.

وبذلك المعادلة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $] 0; +\infty[$.

3) التحقق أن : $1.27 < \alpha < 1.28$ بما أن : $g(1.27) \simeq 0.039$ و $g(1.28) \simeq -0.007$.

فإن : $g(1.27) \times g(1.28) < 0$ إذن : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $1.27 < \alpha < 1.28$.

إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

من جدول تغيرات الدالة g و $g(\alpha) = 0$ نستنتج جدول إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

التحقق أن $e^{-\alpha} = \alpha - 1$:

لدينا : $g(\alpha) = 0$ و منه : $1 + (1-\alpha).e^\alpha = 0$ و منه : $e^{-\alpha} \times 1 + (1-\alpha).e^\alpha = 0$
و منه : $e^{-\alpha} + (1-\alpha)e^0 = 0$ و منه : $e^{-\alpha} + (1-\alpha) = 0$ وبالتالي : $e^{-\alpha} = \alpha - 1$.

$$x \in \mathbb{R} / f(x) = 1 + \frac{x}{e^x + 1} \quad (II)$$

1) التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \frac{(e^x + 1) - e^x.x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1 + (1-x).e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

2 اتجاه تغير الدالة f :

بما أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و بالتالي : الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha]$ و متناقصة تماما على $[\alpha; +\infty[$.

3 نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$:

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$: لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{e^x + 1} = -\infty$
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$
 • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$
 جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	1

4 التحقق أن $f(\alpha) = \alpha$ و $f(-\alpha) = 0$:

لدينا : $f(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{e^\alpha + 1}$ و من جهة أخرى لدينا : $e^{-\alpha} = \alpha - 1$ فإن $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ و بذلك :
 $f(\alpha) = \alpha$: إذن $f(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} = 1 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 + \alpha - 1} = 1 + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} = 1 + \alpha - 1 = \alpha$
 لدينا : $f(-\alpha) = 1 + \frac{-\alpha}{e^{-\alpha} + 1}$ و منه : $f(-\alpha) = 1 + \frac{-\alpha}{\alpha - 1 + 1} = 1 - 1 = 0$
 إذن : $f(-\alpha) = 0$

5 أ إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{e^x + 1} - x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} - x$
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x.e^x = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x.e^x - x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x.e^x}{e^x + 1} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = 0$ و بذلك المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 1$ بجوار $-\infty$.

ب الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $(f(x) - y_\Delta)$ على $\mathbb{R}$.
 $f(x) - y_\Delta = 1 + \frac{x}{e^x + 1} - x - 1 = \frac{x}{e^x + 1} - x = \frac{x - x.e^x - x}{e^x + 1} = \frac{-x.e^x}{e^x + 1} = -x \times \frac{e^x}{e^x + 1}$
 إشارة الفرق من إشارة $-x$ على $\mathbb{R}$ لأن $\frac{e^x}{e^x + 1} > 0$
 و بذلك : (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]-\infty; 0[$
 و (C_f) يقع أسفل (Δ) في المجال $]0; +\infty[$

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0;1)$.

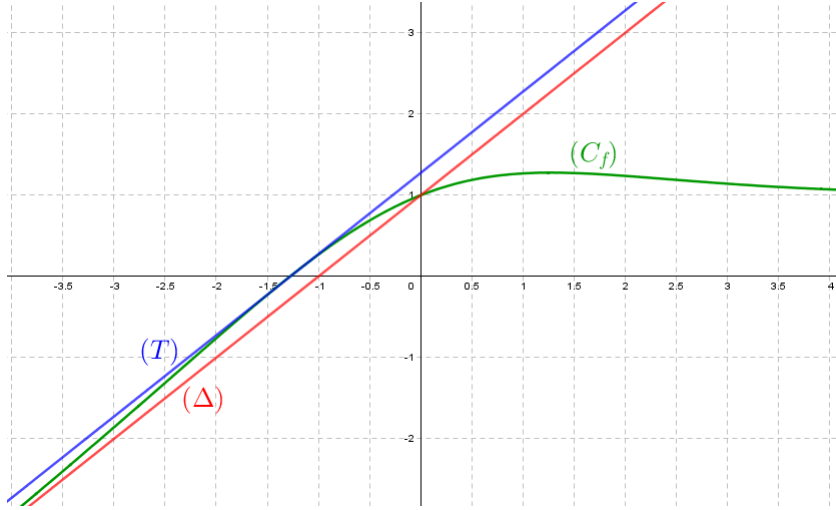
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)

6 كتابة معادلة المماس (T) ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -\alpha$:

$$f(-\alpha) = \frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2} = \frac{1 + (1+\alpha)e^{-\alpha}}{(\alpha - 1 + 1)^2} = \frac{1 + (1+\alpha)(\alpha - 1)}{\alpha^2} = \frac{1 + \alpha^2 - 1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$$

و لدينا : $f(-\alpha) = 0$ و بالتالي : $(T) : y = x + \alpha$

7 رسم (Δ) , (T) و (C_f) :



8 المناقشة البيانية : $(I) \mapsto f(x) = x + f(m)$

و منه (I) تكافئ : $y = f(x)$ و $y = x + f(m)$ (مناقشة ماثلة).

و منه حلول المعادلة (I) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta_m) : y = x + f(m)$ ميله ثابت

1 نلاحظ أن : $m = -\alpha$ فإن $(\Delta_m) = (T)$ و $m = 0$ فإن $(\Delta_m) = (\Delta)$: من البيان نستنتج أن :

• $m \in]-\infty; 0[$ المعادلة تقبل حل موجب.

• $m = 0$ المعادلة تقبل حل معدوم.

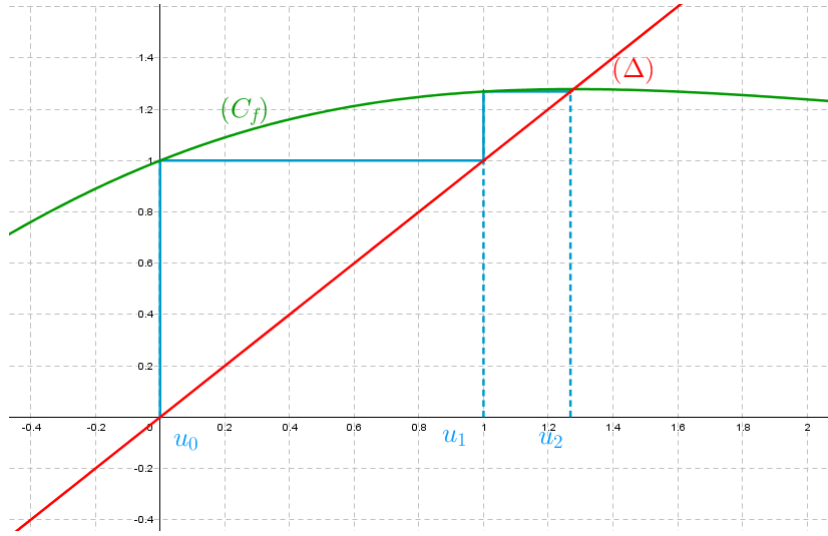
• $m \in]0; \alpha[$ المعادلة تقبل حلين سالبين.

• $m = \alpha$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب $-\alpha$.

• $m \in]\alpha; +\infty[$ المعادلة تقبل حلين سالبين.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N} \quad (\text{III})$$

1 تمثيل الحدود على محور الفواصل :



2 إثبات بالتراجع من أجل $0 \leq u_n \leq \alpha : n \in \mathbb{N}$

(1) مرحلة التحقق : من أجل $n = 0$ $\begin{cases} u_0 = 0 \\ 0 \leq 0 \leq \alpha \end{cases}$ و منه $0 \leq u_0 \leq \alpha$ محققة .

(2) مرحلة الفرضية والبرهان : نفرض أن $0 \leq u_n \leq \alpha$ و نبهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ لدينا : $0 \leq u_n \leq \alpha$ و f متزايدة على $[0; \alpha]$ و منه : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$ و منه $0 \leq 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ و بذلك $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ محققة.

و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع : $0 \leq u_n \leq \alpha$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3 إثبات أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ على $\mathbb{N}$ لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 + \frac{u_n}{e^{u_n} + 1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e^{u_n} + 1 + u_n - u_n \cdot e^{u_n} - u_n}{e^{u_n} + 1} = \frac{1 + (1 - u_n)e^{u_n}}{e^{u_n} + 1} = \frac{g(u_n)}{e^{u_n} + 1}$$

بما أن : $0 \leq u_n \leq \alpha$ فإن : $0 \leq g(u_n) \leq 2$ و منه : $g(u_n) \geq 0$ و من جهة أخرى $e^{u_n} + 1 > 0$ و بذلك : $\frac{g(u_n)}{e^{u_n} + 1} \geq 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي : (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4 إستنتاج تقارب المتتالية (u_n) : بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

التمرين الثالث: (07 نقاط)

$$h(x) = 1 - \frac{x^2}{2-x} \quad x \in]-\infty; 2[\quad (\text{I})$$

1 حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{x^2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 = -4 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 - x = 0^+ : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 1 - \frac{x^2}{2-x} = -\infty$$

2 إتجاه تغير الدالة h :

$$h'(x) = \frac{-2x(2-x) - (-1)(-x^2)}{(2-x)^2} = \frac{-4x + 2x^2 - x^2}{(2-x)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(2-x)^2} = \frac{-x(-x+4)}{(2-x)^2}$$

و منه إشارة $h'(x)$ من إشارة $(-x)$ لأن $\frac{-x+4}{(2-x)^2} > 0$ على $] -\infty; 2[$.

x	$-\infty$	0	2
$-x$	+	0	-

و منه h متزايدة تماماً على $[0; 2[$ و متناقصة تماماً على $] -\infty; 0]$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	2
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

$$h(1) = 1 - \frac{(1)^2}{2-1} = 1 - 1 = 0$$

3 حل المعادلة $h(x) = 0$:

$$h(x) = 0 \text{ و منه } 1 - \frac{x^2}{2-x} = 0 \text{ و منه } \frac{x^2}{2-x} = 1 \text{ و منه } x^2 = 2-x \text{ و منه } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\text{منه } (x-1)(x+2) = 0 \text{ أي } x-1 = 0 \text{ أو } x+2 = 0 \text{ أي } x = 1 \text{ أو } x = -2$$

و منه (C_h) يقطع محور الفواصل في نقطتين $(1; 0)$ و $(-2; 0)$.

4 إشارة $h(x)$ على المجال $] -\infty; 2[$:

من جدول تغيرات الدالة h : $h(1) = h(-2) = 0$

x	$-\infty$	-2	1	2	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$x \in] -\infty; 2[/ f(x) = x^2 + 6x - 2 + 8\ln(2-x) \quad (\text{II})$$

1 حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty : \text{منه} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 8 \ln(2-x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 6x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \searrow 2} f(x) = -\infty : \text{منه} \quad \lim_{x \searrow 2} 8 \ln(2-x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \searrow 2} x^2 + 6x - 2 = 4$$

و منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي لـ (C_f) .

2) إثبات أن : $f'(x) = 2h(x)$:

من أجل كل $x \in]-\infty; 2[$ فإن :

$$f'(x) = 2x + 6 + \frac{8(-1)}{2-x} = 2 \left[x + 3 - \frac{4}{2-x} \right] = 2 \left[1 + \frac{(2+x)(2-x) - 4}{2-x} \right]$$

$$f'(x) = 2 \left(1 + \frac{4 - x^2 - 4}{2-x} \right) = 2 \left(1 - \frac{x^2}{2-x} \right) = 2h(x)$$

و منه نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$ على المجال $]-\infty; 2[$.

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	-2			1	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(2-) \simeq 1.1$			5	$-\infty$

$$f(1) = 1 + 6 - 2 + 8 \ln 1 = 5 \quad \text{و} \quad f(-2) = -10 + 8 \ln 4 \simeq 1.1$$

3) إيجاد إحداثيات نقطة إنعطاف :

ندرس إشارة $f''(x)$:

$$f''(x) = [2h(x)]' = 2h'(x) : \text{فإن} \quad x \in]-\infty; 2[$$

$$h'(x) = 0 : \text{معناه} \quad f''(x) = 0$$

x	$-\infty$	0	2
$f''(x) = 2h'(x)$	$+$	0	$-$

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند 0 و غيرت من إشارتها فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $(0; f(0))$ حيث :

$$f(0) = -2 + 8 \ln 2 \simeq 3.55$$

4) معادلة المماس (T) لـ (C_f) :

$$\text{لدينا} : f'(0) = 2h(0) = 2(1) = 2 \quad \text{و} \quad f(0) = -2 + 8 \ln 2$$

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) : \text{و منه} : (T) : y = 2x - 2 + 8 \ln 2$$

5) إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في المجال $[1.7; 1.8]$:

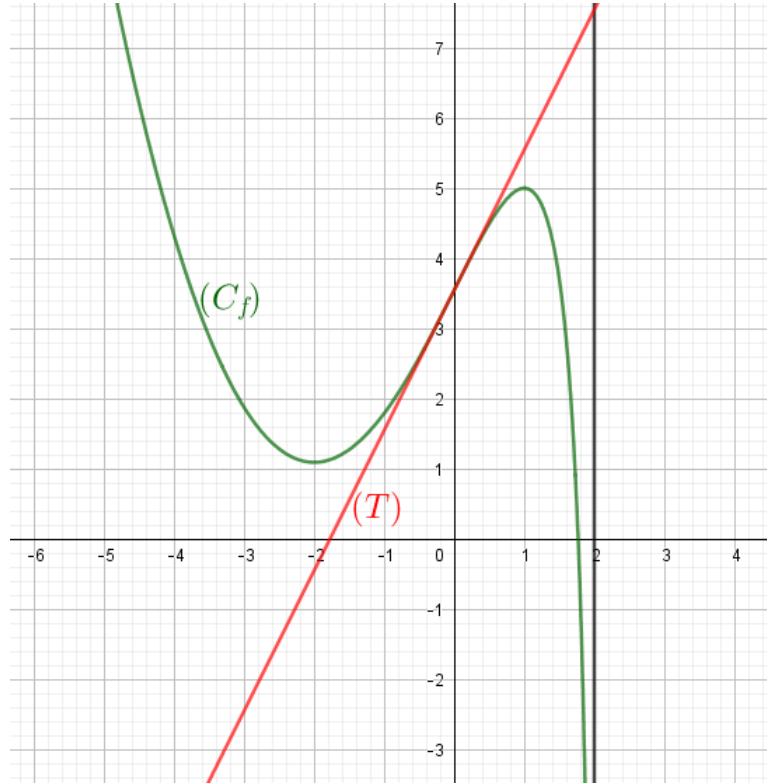
من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن : $f(x) > 0$ في المجال $]-\infty; 1[$.

أما في المجال $]1;2[$ f مستمرة و متناقصة تماما و هي كذلك في المجال $[1.7;1.8]$

$$f(1.7) = 1.45 \text{ و } f(1.8) = -0.83$$

ومنه : $f(1.7) \times f(1.8) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(\alpha;0)$ حيث : $1.7 < \alpha < 1.8$.

6 رسم المماس (T) و المنحنى (C_f) :



$$x \in]-2;2[/ g(x) = x^2 + 6|x| - 2 + 8\ln(2 - |x|) \quad \text{7}$$

أ تبين أن الدالة g زوجية :

لدينا : $D_g =]-2;2[$ متناظر بالنسبة للصفر .

$$g(-x) = (-x)^2 + 6|-x| - 2 + 8\ln(2 - |-x|) = x^2 + 6|x| - 2 + 8\ln(2 - |x|) = g(x)$$

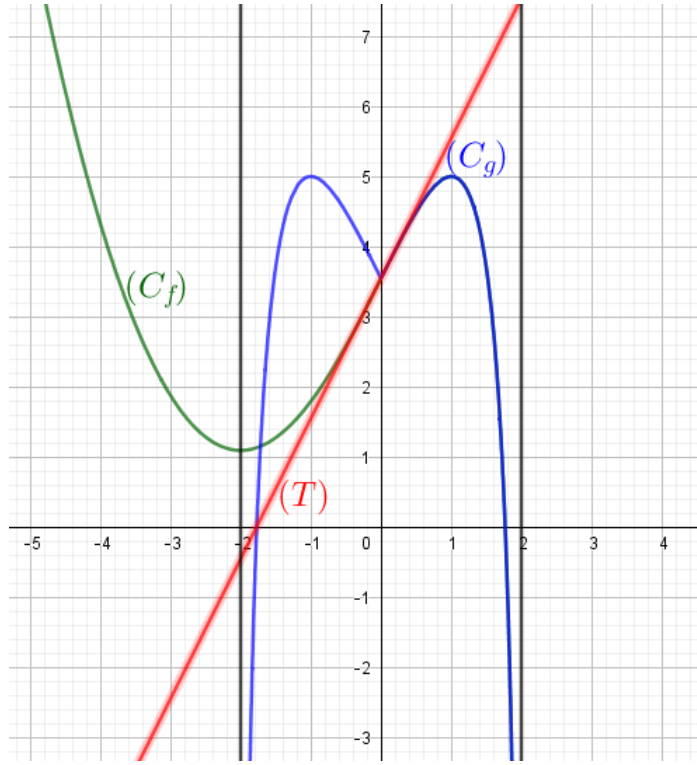
ومنه : الدالة g زوجية على المجال $] -2;2[$ و منه نستنتج أن (C_g) متناظر بالنسبة لمحور الترتيب .

ب كتابة g دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 6x - 2 + 8\ln(2 + x) & /x \in]-2;0[\\ g(x) = x^2 + 6x - 2 + 8\ln(2 - x) & /x \in [0;2[\end{cases} \quad \text{ومنه : } \begin{cases} |x| = -x & /x \leq 0 \\ |x| = x & /x \geq 0 \end{cases}$$

ج إنشاء (C_g) :

لدينا : $g(x) = f(x)$ في المجال $[0;2[$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f) في هذا المجال
 $g(-x) = g(x) = f(x)$ في المجال $] -2;0[$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.



📌 بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021 ولا تنسونا من خالص دعائكم